

数学名师特级教师倾心之作
掌握方法提高素养必读之书

高中数学

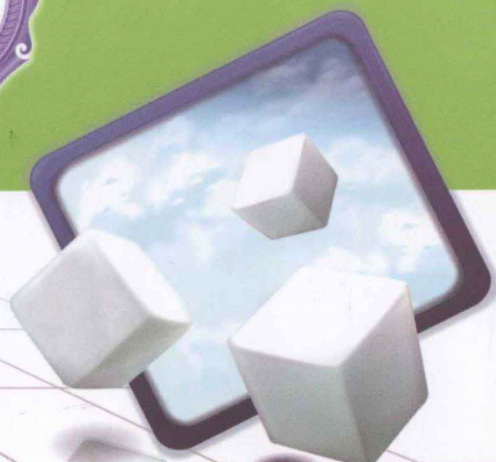
轻松学

编著 杨冠夏 于世章 蒋万磊

策划 刘宗寅



- ① 核心知识建构
- ② 学习方法导引
- ③ 情境材料荟萃
- ④ 典型习题探究



 中国海洋大学出版社
CHINA OCEAN UNIVERSITY PRESS

责任编辑 / 鲁 丰

装帧设计 / 少 刚

终 审 / 杨立敏

这是一套数学学习方法指导书，它告诉高中生朋友这样一个道理：数学可以轻松学好。

它倡导的是“低起点，高标准”。
“低起点，高标准”是一种学习艺术，也是一种学习策略。

高中数学 轻松学

它依据高中数学的教学顺序，以专题讨论的形式，本着“低起点，高标准”的要求，引导高中生朋友建构知识体系，理解核心知识；认识知识特征，遵循学习规律；融入学习情境，把握学习对策；强化问题探究，学会科学解题，从而提高数学素养，实现轻松学好数学的目标。



ISBN 978-7-81125-417-4



9 787811 254174 >

定价：29.50元

掌握方法 提高素养

高中数学

轻松学

编著 杨冠夏 于世章 蒋万磊

策划 刘宗寅



中国海洋大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学轻松学. 必修1, 必修2, 必修3/杨冠夏编著.
—青岛: 中国海洋大学出版社, 2012. 5

ISBN 978-7-81125-417-4

I. ①高… II. ①杨… III. ①中学数学课—高中—
教学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第087109号

出版发行 中国海洋大学出版社有限公司
社 址 青岛市香港东路23号 邮政编码 266071
出 版 人 杨立敏
网 址 <http://www.ouc-press.com>
电子信箱 cbsbgs@ouc.edu.cn
订购电话 0532-82032573(传真)
责任编辑 鲁 丰 电 话 0532-82032643
印 制 日照日报印务中心
版 次 2012年5月第1版
印 次 2012年5月第1次印刷
成品尺寸 170 mm×230 mm
印 张 20.75
字 数 372千字
定 价 29.50元

《高中数学轻松学》

主要作者简介

杨冠夏 中学高级教师、特级教师，青岛市首批学科带头人，山东省初等数学研究会副会长，国家数学奥林匹克高级教练；曾获青岛市优秀教师、山东省富民兴鲁劳动奖章、全国模范教师荣誉称号，享受国务院特殊津贴。

退休前任青岛二中数学组组长；现受聘于青岛 39 中，任课堂教学咨询专家。从事高中数学教学 40 余年，日常教学、高考辅导成绩突出。在数学奥林匹克竞赛辅导过程中，所辅导的青岛二中学生荣获 38 届 IMO 金牌。长期从事“数学学科特征教学法”研究，著有《高中数学基础与境界》一书，发表教学论文 20 余篇，2009 年荣获全国数学科学方法论课题研究杰出个人称号。

于世章 中学高级教师、特级教师，山东省优秀教师，山东省课程团队专家，山东省数学会初等数学研究会常务理事；青岛市专业技术拔尖人才，青岛市中小学教师培训专家讲师团成员，青岛大学师范学院硕士生导师；国家级课题“手持技术与数学新课程整合”青岛试验区领导小组副组长、课题组组长，青岛市教育科学“十一五”规划研究课题“数学变式教学法研究”课题组组长，青岛市教研室中心组成员、市兼职教研员，青岛二中数学教研组组长；教育部中学数学实验教材研究组优秀实验教师，全国中小学教材审查专家库学科审查专家，全国数学方法论哲学委员会副秘书长，全国数学方法论“MM”研究会常务理事。

著有《在学生的心灵中旅行》一书，是三部论文集的主编，在国家级、省级刊物上发表教育教学论文 30 余篇。

董天龙 中学高级教师、特级教师,全国师德先进个人,山东省优秀教师,青岛市教学能手,青岛市劳动模范,青岛大学师范学院硕士研究生指导教师,青岛市教科所客座研究员,青岛市高考“7+1小组”成员,青岛市中小学教师培训资源库专家,青岛市首批名师工程人选,青岛二中名牌教师,青岛二中教学专家。

编写《高中数学新教材新思维》等学生用书四部;撰写的《焕发学生生命激情,打造数学生命课堂》等多篇论文在国家级、省级杂志发表,或在全国、省市评选中获奖;主持并承担青岛市教育科学“十一五”规划研究课题《数学教学对学生思维品质发展影响的研究》。

策划简介

刘宗寅 编审,曾任中学教师、教研员,省教育报刊社副社长兼副总编辑,省教育科学研究所所长,大学出版社总编辑、社长,全国科普作协会员。

长期从事中学教育教学研究、科普宣传和图书策划工作。策划并主持编写了中学生学习方法丛书、青少年科学教育丛书、“三导”(导学、导读、导用)丛书、科学故事88(套书)、科学发现的艺术(套书)、名校名师直击高考考点(套书)、名家名师直击中考考点(套书)等图书;编著教育、教学、科普类图书十余部,发表教育教学论文、学习指导文章和科普宣传文章数十篇;作为主编之一参加过省编初中教材(原国家教委审定)及教师用书、地方课程教材(省教育厅审定)及教师用书的编写工作,系新课标高中教材(教育部审定)及教师用书的作者和责任编辑;参编的图书曾获国家图书奖。

致

高中生朋友

——数学可以轻松学好

我教了40多年的数学，退休后仍工作在教学第一线。这些年来，我一直想为高中生朋友写一本关于数学学习方法的指导书，想告诉各位朋友这样一个道理：数学可以轻松学好。

怎样才算“轻松学好数学”了呢？

我们的“轻松”是指效率高、兴趣浓、有成就感，还指可以化难为易。

这里的“学好”指的是把握数学的学科本质，提高个人的数学素养，有较强的解决数学问题的能力。

说实话，数学是一门抽象性强又特别讲究思想方法的学科，学好这门学科着实需要下一番苦工夫。既然如此，怎么又说可以“轻松学好”呢？

问题就在于，是以什么样的心态来对待数学学习，是以什么样的策略来进行数学学习。

许多年来，由于有些同学学习不得法，舍本求末，忽视了对于数学学习规律的自主探究，误认为学数学只是解数学题，盲目地泡进题海，一味地多做题、钻难题，题目做了不少但成效不大，学习负担十分沉重；还有一些同学，不了解数学究竟是一门什么样的学科，不知道学习数学到底有什么价值，学习被动，枯燥无味，认为数学太难学了，有的甚至想放弃数学学习。所有这些，都成为这些同学数学学习道路上的绊脚石，也使数学学习成为一个沉重的话题。

那么，怎样才能“轻松学好数学”呢？这套《高中数学轻松学》将为你支三招。

第一招，“不仅要看树木，更要看森林。要把树木看做森林中的树木”。这里，把知识点比做树木，把全部高中数学知识或一单元的数学知识比做森林。这第一招就是从“森林”（系统）的角度来认识每一棵树（知识点）的特征。

就拿“集合”一章来说吧。

集合是一个新知识,要涉及好多新名词、新符号,看起来比初中数学要抽象。其实,“集合”用了一章的篇幅,就是让你学习一种数学语言,这种语言会看会用,明白了,这一章的学习也就成功了,而且这种成功会带动整个高中数学的学习。

看到了吧?了解了知识的特征,把握了知识的核心,就抓住了有关数学知识的“纲”,就可以“纲举目张”,学习起来就不必面面俱到、负担多多了。

第二招,解数学题要在夯实知识基础的前提下掌握有关的解题规律。

有些同学认为数学题变化多端,一个题一个样,他们更青睐各种各样的具体题型及其解题技巧。

其实,解数学题是有基本规律的,掌握规律重于记住一些零星技巧。

例如,有些同学会感到必修4中的“三角恒等变换”公式多、变形多、难以驾驭,其实,只要掌握了其中的两个原则和八种技法,以它们做工具,你就会发现自己眼也明了手也巧了,“三角恒等变换”根本就不在话下。

再如,对于必修5中的“等差数列和等比数列”,只要提炼出它们的四种表达形式并以这四种表达方式做工具,不必去死记那么多派生性质,不论遇到什么样的数列题,都能很容易地找到下手之处。

具体的数学解题技巧可能千变万化,不过,无论如何变化也离不开一定的规律。只要掌握了解题规律,不必进行那么多的重复性训练,不必死记题型硬套模式,就可以自如地应对各种数学题。

第三招,从简单的知识入手,从会做的题目入手,永远不忽视基础,循序渐进地学习。

就拿立体几何(必修2,选修2-1)来说吧,人们都说入门难。那么,怎样做到轻松入门哪?成功的经验是用“看图说话”做入门的抓手、用“十六字诀”做入门的规范。找到这些简单的突破口,立体几何会越学越容易,再也难不着你。

一些同学做稍微综合一点的数学题,不是速度慢,就是常出错,甚至还会无从下手。深究起来,千原因万原因,最重要的原因是知识基础没有打好;之所以对于综合题缺乏洞察力,根子还在于对那些低起点的简单题没有吃透,没有从中学到本质的东西,浅尝辄止,一晃而过,这就是问题的病根。

数学大师华罗庚有一句话说得很到位、很深刻:

“退,足够地退,退到最原始而不失去重要性的地方,这是学好数学的一个



诀窍。”

也正是基于以上三点,我们写了《高中数学轻松学》这套书。

在这套书中,我们不断地强调“低起点,高标准”,什么意思呢?

“低起点,高标准”是指要从低起点出发,不轻视浅显的知识;即使浅显的知识,也要从中发现问题,追问几个为什么,刨根问底,把问题看准了、弄透了,理清它的来龙去脉,抓住其中的关键。也就是说,不仅应当知其然,而且应当知其所以然;不仅要知其所以然,而且要追究“怎样才能达到知其所以然的境界”。

“低起点,高标准”并不是降低对数学学习的要求;相反,是为了在容易地跨进门槛后能站稳脚跟,轻松地取得进一步学习数学的发言权,展开对于数学思想方法的探究与追求,达到数学学习的“高标准”。

“低起点,高标准”是一种学习策略,是一种学习艺术。它会时刻提醒你,数学学习的高层次和数学基础总是紧密相连的,任何能力的提高都离不开数学基础。

“低起点,高标准”会一步一步引导你攀上数学学习的高峰,让你在学习中学取数学的理性和睿智,享受数学文化的熏陶,提高会使你受益终生的数学素养。

《高中数学轻松学》共分三册:第一册包括必修1、必修2、必修3的内容;第二册包括必修4、必修5的内容;第三册包括选修2-1、选修2-2、选修2-3的内容。

《高中数学轻松学》将学习内容分为若干专题,每一专题又分为四个部分。

第一部分:核心知识建构

这一部分以清楚、准确、简捷为特点,引导你轻松梳理知识脉络,建立知识体系,明确知识定位,掌握知识核心。

第二部分:学习方法导引

这一部分是本书的重点,立足于本专题知识的特征,提出相应的学习策略。俗话说,一把钥匙开一把锁。有了对知识特征的揭示和对解题规律的提炼,你才会成为“解牛”的“庖丁”。

这一部分还安排了许多典型例题,引导你把握所介绍的解题方法,感悟所揭示的解题规律。

第三部分:情境材料荟萃

这一部分介绍的与本专题相关的数学史话、数学家故事以及数学在实践中的应用,会让你体会数学从哪里来又到哪里去,了解数学文化及其价值,体验数

学的神奇与魅力。

情感与兴趣是你轻松学好数学的动力。

第四部分:典型习题探究

这一部分所给习题不多,但个个都有代表性;不仅给出了一般习题,还给出一些探究问题,引导你对本专题内容进行反思、总结、探索,进一步掌握本专题所介绍的思想、方法和规律。

每一专题的开始都有一段“题记”,那是对这一专题的地位和价值的定位,是对这一专题的知识特征或核心思想的概括。

愿《高中数学轻松学》成为你的良师益友,助你轻松学好数学,取得优异成绩!

致 谢

《高中数学轻松学》有幸得到全国著名特级教师,全国初等数学研究会发起人和顾问、全国著名特级教师杨之先生的指导,甚为感激。

《高中数学轻松学》的出版得益于我的老同学、长期从事中学教育教学研究的刘宗寅先生的精心策划,得益于青岛39中及白刚勋校长的热情帮助,得益于中国海洋大学出版社的大力支持。在此,深表谢意。

同时,我还要感谢于世章老师、董天龙老师、卞文老师、蒋万磊老师、于志昌老师、赵晟珂老师的真诚合作,感谢孙云霞老师、曹晓冬老师、王成平老师的积极协助。

杨冠夏
2012年3月

目录 Contents

致高中生朋友

必修 1

专题 1 集合语言	3
专题 2 二次函数、二次方程和二次不等式	23
专题 3 函数的概念	51
专题 4 函数的性质及其研究方法	67
专题 5 基本初等函数——指数函数、对数函数与幂函数	90
专题 6 函数思想及函数应用	110
参考答案	136

必修 2

专题 1 空间几何体和它的平面投影图形	151
专题 2 立体几何语言及空间的平行与垂直	181
专题 3 平面直角坐标系与直线的方程	208
专题 4 圆的方程	232
参考答案	247

必修 3

专题 1 算法初步	263
专题 2 统计	288
专题 3 简单的概率问题	303
参考答案	315

必修 1

专题1 集合语言

专题2 二次函数、二次方程和二次不等式

专题3 函数的概念

专题4 函数的性质及其研究方法

专题5 基本初等函数——指数函数，对数

函数与幂函数

专题6 函数思想及函数应用

学习数学学什么?



◆ 我们从数学当中可以学到什么?

回答:数学是思维的体操.

学数学的核心是学习数学的思维方法.学习数学知识和数学方法可以从中获取数学的理性和睿智.

◆ 什么是数学的思维?

回答:数学的思维包括数学的发现和数学的证明与推演.

发现和证明推演,二者缺少了哪一条,都不是完整的数学思维.

◆ 那么,数学发现和数学证明推演需要做什么准备吗?

回答:需要,要做好数学语言的准备.

不论是数学发现,还是数证明推演,它们都需要一个顶顶重要的基础,

那就是数学语言.

专题 1

集合语言

学集合,就是在学集合的数学语言.

集合,是符号语言进入高中数学,并引领高中数学走向逻辑完备与纯粹的宣言书.

——题记



一、集合的概念

集合是不定义概念

集合是原始的数学概念.如同点、直线、平面这些数学概念一样,集合没有定义.

教材在先给出“元素”的基础上给出对集合的描述:“一些元素组成的总体叫做集合.”

集合由组成集合的元素所确定.只要在两个集合中有不同的元素,那么这两个集合就不相同.

组成集合的元素可以是数,可以是有序实数组,也可以是点,或是几何图形……作为集合的元素可以是任何确定的对象.

二、集合对元素的三个限定

书写集合,研究集合,元素要遵循下面三个限定.

1. 关系的确定性

对于集合 M ,任给一个确定的对象 a ,要么 $a \in M$,要么 $a \notin M$,二者有且仅有一

种成立.

保证集合 M 中元素不杂,我们称这为集合的**纯粹性**,而保证集合 M 中元素不漏,我们称这为集合的**完备性**.确定的集合要保证集合的元素不杂不漏.

2. 元素的互异性

若两个元素 a, b , 有 $a, b \in M$, 则 $a \neq b$.

一个元素在同一个集合内只可以出现一次.

例如, $\{x | x^2 - 2x + 1 = 0\} = M$, 则 $M = \{1\}$.

3. 元素的无序性

例如, $\{1, 2, 3, 4\} = \{3, 1, 4, 2\}$.

两个集合, 它们有完全相同的元素, 仅元素书写顺序不同, 则这两个集合是相等的集合.

三、集合的一般表示方法

通常, 集合用大写字母 M, N, A, B, \dots 表示.

Venn 图可以形象直观地理解集合之间的包含关系和交集、并集、补集的运算(图 1-1-1).

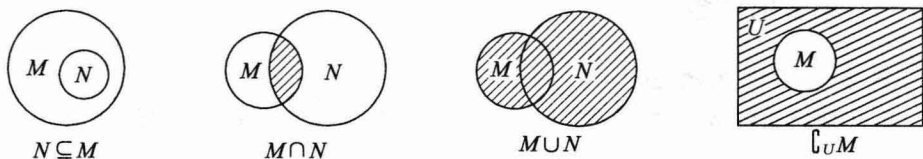


图 1-1-1

要能确切地反映集合当中有什么元素, 有两种表示法.

(1) 列举法. 如 $\{a\}, \{a, b, c, d\}, \{(0, 1), (1, 0)\}$;

(2) 描述法. 如 $\{x | x \geq 0\}, \{\text{正方形}\}$.

特别是, $\{x | x \geq 0\}$ 这种描述书写格式呈 $\{\text{元素} | \text{条件}\}$ 状. 这种书写形式有广泛的用途, 我们不妨称它为“元素条件描述法”.

方程 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 的解集可以用描述法表示: $\{x | x^2 - 3x - 4 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 也可以用列举法表示: $\{-1, 4\}$.

但说方程 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 的解集是 $x = -1$ 或 4 , 这就不可以了.

不等式 $-1 \leq x \leq 4$ 所限定的实数集合只能用描述法, 写作 $\{x | -1 \leq x \leq 4\}$, 而无法使用列举法.



特殊的,没有元素的集合称为空集,空集可以用符号 \emptyset 表示.

只有一个元素的集合称为单元素集合.例如 $\{a\}$,单元素集合是一个集合,它作为一个整体出现,不同于一个元素: $a \neq \{a\}$, a 和 $\{a\}$ 的关系是 $a \in \{a\}$.

四、必须掌握的三种常见集合的表示方法

1. 实数集几种常见子集的符号表示

实数集: \mathbf{R} .

正实数集: \mathbf{R}^+ ,非负实数集 $\overline{\mathbf{R}^-}$.

有理数集: \mathbf{Q} .

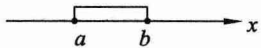
整数集: \mathbf{Z} .

自然数集:(包括零在内) \mathbf{N} .

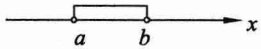
正整数集: \mathbf{N}_+ (或写作 \mathbf{N}^*).

2. 实数不等式集合的区间表示

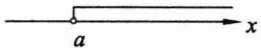
(1) 闭区间 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b, x \in \mathbf{R}\}, (a < b)$:



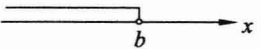
(2) 开区间 $(a, b) = \{x | a < x < b, x \in \mathbf{R}\}, (a < b)$:



$(a, +\infty) = \{x | x > a, x \in \mathbf{R}\}$:

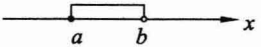


$(-\infty, b) = \{x | x < b, x \in \mathbf{R}\}$:

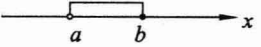


$(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$.

(3) 左闭右开区间 $[a, b) = \{x | a \leq x < b, x \in \mathbf{R}\}, (a < b)$:



(4) 左开右闭区间 $(a, b] = \{x | a < x \leq b, x \in \mathbf{R}\}, (a < b)$:



一元不等式(组)的解集除可以用描述法表示外,也可以用实数区间表示.

注：一些高中教材会在“函数”一章介绍区间表示。

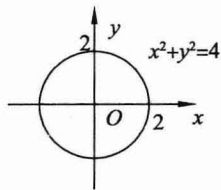
3. 二元(多元)方程(组)、二元(多元)不等式(组)解集表示

二元(多元)方程(组),二元(多元)不等式(组)的解集,点的坐标集合,它们的元素是有序实数组,而不是实数本身,它们的表示与数集不同。

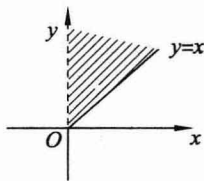
例如, $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 4\}$ 表示直角坐标系中到原点距离等于 2 的点的集合(轨迹),即以原点为圆心,以 2 为半径的圆(图 1-1-2①)。

注:到原点(0,0)的距离等于 2 的点(x,y)满足条件 $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$ 。

再如, $\{(x, y) | y \geq x, x > 0\}$ 表示直角坐标系中第一象限在直线 $y = x$ 上方的点以及直线 $y = x$ 上点的集合(是一个平面区域)(图 1-1-2②)。



①



②

图 1-1-2

例如, $\{(x, y, z) | \begin{cases} x + y + z = 11 \\ x - y = 2 \\ y + 3z = 22 \end{cases}\} = \{(3, 1, 7)\}$,

这里 $\{(3, 1, 7)\}$ 是单元素集合。

集合 $\{(0, 0)\}$, $\{0\}$ 和空集 \emptyset , 三者互不相同, $0 \notin \{(0, 0)\}$, 而 $(0, 0) \in \{(0, 0)\}$ 。

● 五、集合关系

集合与元素的关系是整体和个体的关系,集合与集合的关系是整体与整体的关系,两者有本质的不同,它们的书写与读法也不同。

集合与?	书写	读法	书写	读法
集合与元素	$a \in M$	a 属于 M	$a \notin M$ (或 $a \bar{\in} M$)	a 不属于 M
集合与集合	$N \subseteq M$ (或 $M \supseteq N$)	N 包含于 M (或读 M 包含 N)	$N \subsetneq M$ (或 $M \supsetneq N$)	N 真包含于 M (或读 M 真包含 N)