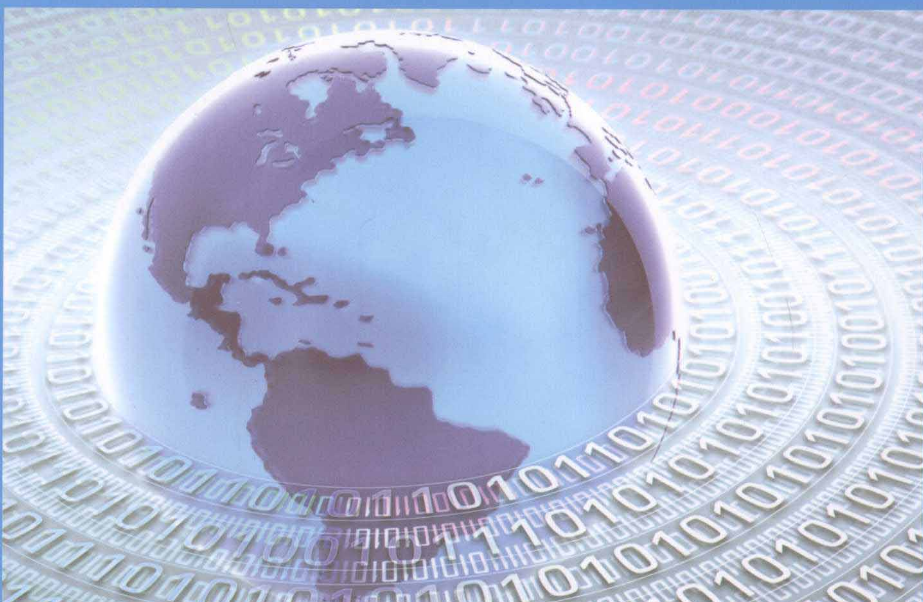
经济数学习题
精选精解

主审　刘建亚　吴　臻
主编　张天德　姜庆华

JINGJISHUXUE XITI JINGXUAN JINGJIE



山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

经济数学习题
精选精解

主　审　刘建亚　吴　臻
主　编　张天德　姜庆华

JINGJISHUXUE XITI JINGXUAN JINGJIE

山东科学技术出版社

图书在版编目（C I P）数据

经济数学习题精选精解 / 张天德，姜庆华主编. —济南 ：山东科学技术出版社，2012
ISBN 978-7-5331-6310-5

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①张… ②姜… Ⅲ. ①经济数学—高等学校—习题集 Ⅳ. ①F224.0-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第195849号

经济数学习题精选精解

主编 张天德 姜庆华

出版者:山东科学技术出版社

地址:济南市玉函路 16 号

邮编:250002 电话:(0531)82098088

网址:www.lkj.com.cn

电子邮件:sdkj@sdpress.com.cn

发行者:山东科学技术出版社

地址:济南市玉函路 16 号

邮编:250002 电话:(0531)82098071

印刷者:东港股份有限公司

地址:济南市山大北路 23 号

邮编:250100 电话:(0531)82672686

开本: 720 mm × 1020 mm 1/16

印张: 10.75

版次: 2012 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-5331-6310-5

定价: 27.00元

前言

QIANYAN

Б. П. 吉米多维奇是前苏联有影响的教育家和数学家。他主编的《吉米多维奇数学分析习题集》(含 4462 道习题),内容丰富,覆盖面广泛,针对性强,在我国有较大的影响,书中的许多习题,都广泛地被我国多所高等院校《高等数学》教材所用,有些题目甚至出现在全国考研等试题中。

但是,由于该书题量较大,部分习题难度过大,全部用来练习耗时较多,为了让读者在一定时间内达到较好的学习效果,提高学习效率,2007 年,我们对该书进行了精选,出版了《吉米多维奇——高等数学习题精选精解》,2010 年,为了财经院校学生的需求,我们又出版了《吉米多维奇——微积分习题精选精解》。这两部精选精解受到广大高校学生和教师的高度关注,多次再版仍然供不应求。近几年来,各经济类院校异军突起,而相应的经济数学辅导用书较匮乏,应广大同学的要求,我们对《吉米多维奇——微积分习题精选精解》进行再精选,针对经济类院校的特点与专升本的考点,选出了难度适中,有代表性的属于经济数学范畴的习题,除此之外,作者还精选了少量近年国内研究生入学考试的典型试题。有部分题目作者给出了一题多解,还有些题目做了点评,指出解决此类问题的常用思路和方法,以培养读者的分析能力和发散思维的能力。

本书共分六章,每章又分若干节。在章节设置上与一般《经济数学》教材基本一致,涉及的内容主要有一元微积分及其应用、二元微积分、线性代数初步、概率论初步。在本书中,每章除最后一节外,每节包括两大部分内容:

知识要点:简要对每节涉及的基本概念、基本定理和公式进行了系统的梳理。

基本题型:对每节常见的基本题型进行了归纳总结,便于读者理解和掌握基本知识,有利于提高读者的解题能力和数学思维水平。

每章最后一节是综合提高题型，这一节的题目相对综合性较强，有一定的难度，通过本节的学习，可以提高读者的应变能力、综合思维能力和分析问题、解决问题的能力。

本书由山东大学张天德教授、山东财经大学姜庆华教授主编，山东大学刘建亚教授、吴臻教授对全书作了仔细的校审，并对部分习题提出了更为精妙的解题思路。该书可以作为在读大学生同步学习的优秀辅导书，也可以作为广大教师的教学参考书，还可以为考研复习、专升本和众多成人学员自学提供富有成效的帮助。读者使用本书时，宜先独立求解，然后再和本书作比较，这样一定会获益匪浅。

书中不当之处，恳请指正。

编　者

2011 年 9 月

目 录

MULU

第一章 极限与连续 …… (1)

§1. 函数 …… (1)

§2. 数列的极限 …… (4)

§3. 函数的极限 …… (6)

§4. 无穷小与无穷大 …… (8)

§5. 极限的运算法则 …… (10)

§6. 两个重要极限 …… (13)

§7. 无穷小的比较 …… (16)

§8. 函数的连续性 …… (18)

§9. 常用的经济函数 …… (23)

§10. 综合提高题型 …… (25)

第二章 导数及其应用 …… (34)

§1. 导数的概念 …… (34)

§2. 导数的基本公式与求导法则 …… (41)

§3. 高阶导数 …… (46)

§4. 微分 …… (50)

§5. 微分中值定理 …… (54)

§6. 洛必达法则 …… (62)

§7. 函数的单调性与极值、最值 …… (66)

§8. 曲线的凹凸性与拐点 …… (74)

§9. 导数在经济中的应用 …… (78)

§10. 综合提高题型 …… (81)

第三章 不定积分与定积分 …… (94)

§1. 不定积分的概念 …… (94)

§2. 不定积分的积分方法 …… (98)

§3. 微分方程简介 …… (107)

§4. 定积分的定义与性质 …… (112)

§5. 微积分学基本定理 …… (115)

目 录

MULU

§6. 定积分的计算 …… (118)

§7. 定积分的应用 …… (125)

§8. 广义积分 …… (129)

§9. 综合提高题型 …… (116)

第四章 多元函数微积分 …… (152)

§1. 多元函数的概念 …… (152)

§2. 多元函数的偏导数与全微分 …… (154)

§3. 二元函数的极值 …… (163)

§4. 二重积分的定义与性质 …… (168)

§5. 二重积分的计算 …… (172)

§6. 综合提高题型 …… (182)

第五章 线性代数初步 …… (198)

§1. 矩阵的概念 …… (198)

§2. 矩阵的运算 …… (201)

§3. 方阵的行列式 …… (209)

§4. 逆矩阵 …… (216)

§5. 矩阵的初等变换 …… (227)

§6. 矩阵的秩 …… (235)

§7. 线性方程组 …… (240)

§8. 综合提高题型 …… (250)

第六章 概率论初步 …… (265)

§1. 随机事件及其概率 …… (265)

§2. 条件概率与乘法法则 全概率公式 …… (269)

§3. 事件的独立性与贝努里试验 …… (273)

§4. 一维随机变量及其分布 …… (277)

§5. 随机变量的数字特征 …… (285)

§6. 概率论中常见的分布 …… (290)

§7. 综合提高题型 …… (296)

第一章　极限与连续

§1. 函　　数

1. 函数的定义　设有两个变量 x 和 y，如果变量 x 在其变化范围 D 内每取一个值，变量 y 按照某种对应规则 f，总有唯一确定的数值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，称 x 为自变量，y 为因变量，D 为函数的定义域，y 的取值范围称为函数的值域.

构成函数的两要素是：函数的定义域 D 和对应规则 f.

2. 函数的几种特性

(1)有界性　设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义，若存在一个正数 M，对于所有的 $x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有界的，否则，称 $f(x)$ 在 D 上是无界的.

(2)奇偶性　设函数 $y=f(x)$ 在关于原点对称的区间 D 上有定义，若对于任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若对于任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

(3)单调性　设函数 $f(x)$ 在某区间 D 上有定义，若对于 D 上任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加（或单调减少）. 单调增加和单调减少函数统称为单调函数.

(4)周期性　设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在正常数 T，使得对于任意 $x\in D$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是周期函数，满足这个等式的最小正数为周期函数的周期.

3. 基本初等函数

(1)常量函数　$y=c$（c 为常数）

(2)幂函数　$y=x^\alpha$（α 为实数）

(3)指数函数　$y=a^x$（$a>0,a\neq1$）

(4)对数函数　$y=\log_a x$（$a>0,a\neq1$）. 当 $a=\mathrm{e}$ 时，$\log_\mathrm{e} x$ 叫做自然对数函数，简记为 $y=\ln x$.

(5)三角函数　正弦函数 $y=\sin x$；余弦函数 $y=\cos x$；正切函数 $y=\tan x$；余切函数 $y=\cot x$；正割函数 $y=\sec x$；余割函数 $y=\csc x$.

(6)反三角函数　常用的反三角函数有 4 个：反正弦函数 $y=\arcsin x$；反余弦函数 $y=\arccos x$；反正切函数 $y=\arctan x$；反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$.

4. 复合函数与初等函数

(1)复合函数　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，其定义域为 D_f，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，其值域为 R_φ，若 $D_f\cap R_\varphi\neq\Phi$，则称 y 是 x 的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$. 其中 x 是自变量，y 是因变量，u 是中间变量.

(2)初等函数　由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次的复合而成，并由一个式子表示的函数称为初等函数.

基本题型

求一元函数的定义域

【1】函数 $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\ln(5-x)$ 的定义域为________.

解 要使函数有定义，需

$$\begin{cases} x-2\geqslant 0 \\ x-3\neq 0 \\ 5-x>0 \end{cases}，\quad 解得 \quad \begin{cases} 2\leqslant x<5 \\ x\neq 3 \end{cases}.$$

故应填 $2\leqslant x<5$，且 $x\neq 3$. 或 $[2,3)\cup(3,5)$.

【2】函数 $y=2^{\frac{1}{x}}+\arcsin(\ln\sqrt{1-x})$ 的定义域为________.

解 要使函数有定义，需

$$\begin{cases} x\neq 0 \\ -1\leqslant \ln\sqrt{1-x}\leqslant 1 \end{cases}，\quad 解得 \quad \begin{cases} x\neq 0 \\ 1-e^2\leqslant x\leqslant 1-e^{-2} \end{cases}.$$

故应填 $1-e^2\leqslant x\leqslant 1-e^{-2}$，且 $x\neq 0$. 或 $[1-e^2,0)\cup(0,1-e^{-2}]$.

【3】已知 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)$ 的定义域为________.

解 由 $f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)$，及 $f[\varphi(x)]=1-x^2$ 得，

$$\sin\varphi(x)=1-x^2，从而\ \varphi(x)=\arcsin(1-x^2)，则 -1\leqslant 1-x^2\leqslant 1.$$

故 $\varphi(x)$ 的定义域为 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

故应填 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

讨论函数的特性

【4】讨论函数 $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ 的奇偶性.

解 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$，关于原点对称，且

$$f(-x)=\ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\ln\frac{1+x}{1-x}=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x),$$

故 $f(x)$ 是奇函数.

【5】讨论函数 $f(x)=\begin{cases} 1-x, & x<0 \\ 1+x, & x\geqslant 0 \end{cases}$ 的奇偶性.

解 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，关于原点对称，且

$$f(-x)=\begin{cases} 1-(-x), & -x<0 \\ 1+(-x), & -x\geqslant 0 \end{cases}=\begin{cases} 1+x, & x>0 \\ 1-x, & x\leqslant 0 \end{cases}=\begin{cases} 1-x, & x<0 \\ 1+x, & x\geqslant 0 \end{cases}=f(x),$$

故 $f(x)$ 是偶函数.

【6】函数 $f(x)=\sin(2x+3)$ 的周期是________.

解 因为 $y=\sin x$ 的周期为 2π，所以 $f(x)=\sin(2x+3)$ 的周期为 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

故应填 π.

【7】已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，x,y 为任意实数，则 $f(x)$ 是________.

(A)奇函数　　(B)偶函数　　(C)非奇非偶函数　　(D)周期函数

解　由题设条件知，$f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0)$，得 $f(0)=0$.

令 $y=-x$，$f(x+(-x))=f(x)+f(-x)$，所以 $f(x)+f(-x)=f(0)=0$，

从而 $f(-x)=-f(x)$，故 $f(x)$ 是奇函数.

故应填(A).

【8】设对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，存在常数 $c\neq 0$，使 $f(x+c)=-f(x)$. 证明 $f(x)$ 是周期函数.

证　对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x+c)=-f(x)$，

所以 $f(x+2c)=f[(x+c)+c]=-f(x+c)=f(x)$，

故 $f(x)$ 是周期函数，且周期 $T=2c$.

【9】设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且对任意 $x,y\in(-\infty,+\infty)$，有 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$，证明 $F(x)=f(x)+x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

证　对于任意 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，不妨设 $x_1<x_2$，有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|=x_2-x_1,$$

而

$$f(x_1)-f(x_2)\leqslant|f(x_2)-f(x_1)|<x_2-x_1,$$

从而　$f(x_1)+x_1<f(x_2)+x_2$，

即　$F(x_1)<F(x_2)$，

所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

求函数的表达式

【10】设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

解　因为 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$，

所以 $f(x)=x^2-2$.

【11】设 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$，求 $f[f(x)]$.

解　$f[f(x)]=\dfrac{f(x)}{1-f(x)}=\dfrac{\dfrac{x}{1-x}}{1-\dfrac{x}{1-x}}=\dfrac{x}{1-2x}$.

【12】设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\geqslant 0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0\\ 2+x, & x>0\end{cases}$，求 $g[f(x)]$.

解　$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0\\ 2+f(x), & f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}2-(-x), & x\geqslant 0\\ 2+x^2, & x<0\end{cases}=\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$.

【13】设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1\\ 2-x, & x>1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0\\ x-1, & x>0\end{cases}$，求 $f(x)+g(x)$ 的表达式.

解　当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)+g(x)=x^2+x+1$，

当 $0<x\leqslant 1$ 时，$f(x)+g(x)=x^2+x-1$，

当 $x>1$ 时，$f(x)+g(x)=2-x+x-1=1$，

故

$$f(x)+g(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & x\leqslant 0 \\ x^2+x-1, & 0<x\leqslant 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}.$$

求反函数

【14】 设 $y=\dfrac{x+2}{x-2}$，求其反函数.

解 由 $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ 得：$xy-x=2y+2$，$x=\dfrac{2y+2}{y-1}$，

得反函数为 $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$.

§2. 数列的极限

1. 数列 对于每个 $n\in N^+$（正整数集），按照某一法则，都对应着一个确定的实数 x_n，这些实数按照下标 n 由小到大排列得到的一个序列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，叫做数列，记作 $\{x_n\}$. x_n 称为数列的一般项或通项.

事实上，数列是函数的一种，即整标函数：$x_n=f(n)$，$n\in N^+$.

2. 数列极限的定义

直观描述定义 对于数列 $\{x_n\}$，如果当 n 无限增大时，x_n 无限接近（或趋近）于一个常数 a，则称当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，或 $n\to\infty$，$x_n\to a$. 否则，称数列 $\{x_n\}$ 发散或不收敛，或 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

分析定义 设数列 $\{x_n\}$，若存在一个常数 a，对于任意给定的正数 ε（无论多么小），总存在一个正整数 N，使得当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则称 $\{x_n\}$ 以 a 为极限，或 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，或 $x_n\to a(n\to\infty)$.

3. 数列极限的性质

唯一性：如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么它的极限唯一.

有界性：如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么 $\{x_n\}$ 一定有界.

保号性：设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(1)若 $a>0$（或 $a<0$），则存在正整数 N，当 $n>N$ 时，都有 $x_n>0$（或 $x_n<0$）.

(2)若数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n\geqslant 0$（或 $x_n\leqslant 0$），则 $a\geqslant 0$（或 $a\leqslant 0$）.

(2)中若 $x_n>0$（或 $x_n<0$），则仍有 $a\geqslant 0$（或 $a\leqslant 0$）.

基本题型

有关数列极限的判定

【15】下列数列中，当 $n\to\infty$ 时，极限为零的是________.

(A) $\sqrt{0.001},\sqrt[3]{0.001},\sqrt[4]{0.001},\cdots$ (B) $x_n=(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$

(C) $x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$ (D) $x_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & n\text{ 为奇数}\\ 1 & n\text{ 为偶数}\end{cases}$

解 通过观察 x_n 的变化趋势，得 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}=0$.

故应选(C).

【16】设 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 的极限分别为 1 和 2，则数列 $x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3,\cdots,x_n,y_n,\cdots$ 的极限是________.

(A)1 (B)2 (C)3 (D)不存在

解 对于数列 $x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots,x_n,y_n,\cdots$，当 $n\to\infty$ 时，奇数项 $x_n\to1$，而偶数项 $y_n\to2$，而 $1\neq2$，故数列的极限不存在.

故应选(D).

【17】观察下列数列的变化趋势，判别哪个数列有极限，如有极限，写出其极限.

(1) $x_n=(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ (2) $x_n=\sin\dfrac{n\pi}{2}$ (3) $x_n=\dfrac{n-1}{n+1}$ (4) $x_n=2(-1)^n$

解 (1) 当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}\to0$，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}=0$.

故数列 $x_n=(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 收敛，其极限为 0.

(2) $x_n=\sin\dfrac{n\pi}{2}$，即 $1,0-1,0,1,0,-1,0,\cdots$ 显然，当 $n\to\infty$ 时，x_n 不能无限接近于一个常数，故数列 $x_n=\sin\dfrac{n\pi}{2}$ 发散.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}=1$，故数列 $x_n=\dfrac{n-1}{n+1}$ 收敛，其极限为 1.

(4) $x_n=2(-1)^n$，即 $-2,2,-2,2,\cdots$，当 n 取偶数无限增加时，$x_n\to2$，而当 n 取奇数无限增加时，$x_n\to-2$，又 $2\neq-2$，所以数列 $x_n=2(-1)^n$ 不存在极限，即发散.

【18】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}$.

解 设 $x_n=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}$，则 $x_{2n}=\dfrac{2n+1}{2n}$，$x_{2n+1}=\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)^{-1}$，而

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n}=1,\quad \lim_{n\to\infty}x_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{-1}=1,$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=1.$

证明数列没有极限

【19】设 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{n\pi}{2}$，证明数列$\{x_n\}$没有极限.

证　设 k 为正整数.

当 $n=4k$ 时，$x_{4k}=\left(1+\frac{1}{4k}\right)\sin 2k\pi=0$；

当 $n=4k+1$ 时，$x_{4k+1}=\left(1+\frac{1}{4k+1}\right)\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2})=1+\frac{1}{4k+1}\to 1\ (k\to\infty)$.

数列$\{x_n\}$的两个子数列趋向于两个不同的值，所以，$\{x_n\}$没有极限.

点评　在证明(或判断)数列发散时，可采用下列两种方法：

①找两个极限不同的子数列；

②找一个发散的子数列.

§3. 函数的极限

1. 函数极限的定义

(1)$x\to\infty$时函数极限的定义

直观描述定义　设函数 $f(x)$，当$|x|$无限增大时(记 $x\to\infty$)，对应的函数值 $f(x)$无限地接近于某一个常数 a，则称 a 是函数 $f(x)$在 $x\to\infty$时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，或 $f(x)\to a$ $(x\to\infty)$.

若 $x>0$，其取值无限增加时，记 $x\to+\infty$；$x<0$，其取值的绝对值无限增加时，记 $x\to-\infty$，可具体讨论极限.

分析定义($\varepsilon-M$ 定义)　设函数 $y=f(x)$，如果存在常数 a，对于任意给定的小正数 ε，总存在正数 M，使当$|x|>M$时，恒有$|f(x)-a|<\varepsilon$ 成立，则称常数 a 为函数 $f(x)$在 $x\to\infty$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$ 或 $f(x)\to a$ $(x\to\infty)$.

当 $x\to+\infty$时，定义中"$|x|>M$"改为"$x>M$"即可.

当 $x\to-\infty$时，定义中的"$|x|>M$"改为"$x<-M$"即可.

(2)$x\to x_0$ 时函数极限的定义

直观描述定义　设函数 $y=f(x)$，当 x 无限接近于某一确定的常数 x_0(记作 $x\to x_0$)时，相应的函数值 $f(x)$无限地接近于一个常数 a，则称 a 是函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，或 $f(x)\to a$ $(x\to x_0)$.

分析定义($\varepsilon-\delta$ 定义)　设函数 $f(x)$在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，如果存在一个常数 a，对于任意给定的正数 ε，总存在 $\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有$|f(x)-a|<\varepsilon$ 成立，则称 a 是函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ 或 $f(x)\to a$ $(x\to x_0)$.

当 x 从 x_0 的左侧趋于 x_0(记作 $x\to x_0^-$)时，定义中 $0<|x-x_0|<\delta$""改为"$0<x_0-x<\delta$"即

可，得到 x_0 点的左极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=a$.

当 x 从 x_0 的右侧趋于 x_0（记作 $x\to x_0^+$）时，定义中 $0<|x-x_0|<\delta$""改为"$0<x-x_0<\delta$"即可，得到 x_0 点的右极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=a$.

结论 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=a$.

2. 函数极限的性质

(1)唯一性　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，则 a 必唯一.

(2)局部有界性　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，则在点 x_0 的某去心邻域内，$f(x)$有界.

(3)局部保号性　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，且 $a>0$（或 $a<0$），则在点 x_0 的某去心邻域内，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

推论　若在 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，则 $a\geqslant 0$（或 $a\leqslant 0$）.

基本题型

讨论函数极限的存在性

【20】 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & x<1\\ x^2+1, & x\geqslant 1\end{cases}$，讨论当 $x\to 1$ 时，$f(x)$的极限是否存在，若存在，求出其极限.

分析　讨论的是分段函数在分段点 $x=1$ 处的极限，需从左、右极限入手.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x)=2$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+1)=2$，

又 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=2$，

所以，当 $x\to 1$ 时，$f(x)$的极限存在，且 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$.

【21】 证明：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.

证　因 $\dfrac{|x|}{x}=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$，

又 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.

【22】 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin x$ 不存在.

证　设 $f(x)=x\sin x$，取 $x_n=n\pi$ 及 $y_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，显然，当 $n\to\infty$ 时，有 $x_n\to+\infty$，$y_n\to+\infty$，

但是

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}n\pi\cdot\sin n\pi=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}f(y_n)=\lim_{n\to\infty}\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=+\infty.$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin x$ 不存在.

【23】 下列极限正确的是________.

(A) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}=\infty$　　(B) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$　　(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x=0$

解　当 $x\to 0^-$ 时，$\frac{1}{x}\to-\infty$，$e^{\frac{1}{x}}\to 0$；当 $x\to 0^+$ 时，$\frac{1}{x}\to+\infty$，$e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$.

所以，选项(A)不正确，(B)正确.

当 $x\to+\infty$时，$\arctan x\to\frac{\pi}{2}$，而 $x\to-\infty$时，$\arctan x\to-\frac{\pi}{2}$，所以选项(C)不正确.

当 $x=2k\pi$ 时(k 取整数)，$\lim\limits_{k\to\infty}\sin(2k\pi)=0$，当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$时 (k 取整数)，$\lim\limits_{k\to\infty}\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2})=1$，所以选项(D)不正确.

故应选(B).

有关极限的性质

【24】若 $f(x)>g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$，则________.

(A) $a>b$　　(B) $a\geqslant b$　　(C) $|a|>|b|$　　(D) $|a|\geqslant|b|$

解　由极限的保号性的推论知：$a\geqslant b$.

故应选(B).

【25】若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则________.

(A) $f(x)$在 x_0 的某邻域内有界　　(B) $f(x)$在 x_0 的任一邻域内有界

(C) $f(x)$在 x_0 的某邻域内无界　　(D) $f(x)$在 x_0 的任一邻域内无界

解　由极限存在的局部保号性知：$f(x)$在 x_0 的某邻域内有界.

故应选(A).

§4. 无穷小与无穷大

1. 无穷小的定义

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=0$，则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$为无穷小.

“$x\to x_0$”可换为“$x\to\infty$”. 换言之，在某个变化过程中，以零为极限的变量是无穷小.

2. 无穷大的定义

设函数 $f(x)$，若对任意给定的 $M>0$(M 是个大正数)，都存在 $\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有$|f(x)|>M$成立，则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$为无穷大，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

类似地，当 $x\to\infty$时，$f(x)$为无穷大，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

简言之，在某个变化过程中，绝对值无限增大的变量叫做无穷大.

3. 无穷小与无穷大的关系

在自变量同一变化过程中，

若 $\lim f(x)=0$　$(f(x)\neq 0)$，　则 $\lim\frac{1}{f(x)}=\infty$；(即无穷小的倒数是无穷大)

若$\lim f(x)=\infty$， 则$\lim\frac{1}{f(x)}=0$.（即无穷大的倒数是无穷小）

基本题型

无穷小与无穷大的判定

【26】指出下列各题中，哪些是无穷小，哪些是无穷大.

(1) $f(x)=2^{-x}-1\ (x\to 0)$　　(2) $f(x)=\frac{1+2x}{x^2}\ (x\to 0)$

(3) $f(x)=\ln x\ (x\to 0^+)$　　(4) $f(x)=x\sin x\ (x\to 0)$

解 (1)因为$\lim\limits_{x\to 0}2^{-x}=1$，所以$\lim\limits_{x\to 0}(2^{-x}-1)=0$，即$x\to 0$时，$f(x)=2^{-x}-1$是无穷小.

(2)因为$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)=1$，$\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，所以$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+2x}{x^2}=\infty$，即$x\to 0$时，$f(x)=\frac{1+2x}{x^2}$是无穷大.

(3)因为$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$，所以当$x\to 0^+$时，$f(x)=\ln x$是无穷大.

(4)因为$\lim\limits_{x\to 0}x\sin x=0$，所以当$x\to 0$时，$f(x)=x\sin x$是无穷小.

【27】当$x\to 0$时，下列函数是无穷小的是________.

(A) $e^{\frac{1}{x}}$　　(B) $\cos\frac{1}{x}$　　(C) $\tan x^2$　　(D) x^2+1

解 当$x\to 0$时，$\frac{1}{x}\to\infty$. $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，从而(A)不正确.

因为$\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$不存在，所以(B)不正确.

因为$\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)=1$，所以(D)不正确.

因为$\lim\limits_{x\to 0}\tan x^2=0$，所以$\tan x^2$为无穷小.

故应选(C).

【28】当$x\to 0$时，下列函数是无穷大的是________.

(A) $\sin\frac{1}{x}$　　(B) $\arctan\frac{1}{|x|}$　　(C) e^{-x}　　(D) $\ln|x|$

解 因为$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在，$\lim\limits_{x\to 0}\arctan\frac{1}{|x|}=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0}e^{-x}=1$，所以(A)、(B)、(C)都不正确.

而$\lim\limits_{x\to 0}\ln|x|=-\infty$，所以当$x\to 0$时，$\ln|x|$是无穷大.

故应选(D).

【29】函数$f(x)=x\sin x$，下列选项正确的是________.

(A)当$x\to\infty$时为无穷大　　(B)在$(-\infty,+\infty)$内有界

(C)在$(-\infty,+\infty)$内无界　　(D)当$x\to\infty$时有极限

解 需正确理解当$x\to\infty$时，$f(x)$为无穷大与$f(x)$无界这两个概念之间的区别.

验证法 可直接验算(C)为正确选项. 因为无论给定正数M多么大，总存在$x_0\in(-\infty,+\infty)$，使得$f(x_0)>M$. 如取$x_0=(2k+\frac{1}{2})\pi$，则

$$f(x_0)=(2k+\frac{1}{2})\pi\sin\left[(2k+\frac{1}{2})\pi\right]=(2k+\frac{1}{2})\pi>M.$$

所以，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内无界.

排除法 若取 $x_k=2k\pi$，则 $f(x_k)=2k\pi\sin 2k\pi=0$，即 $x\to\infty$时，$f(x)=x\sin x$ 不是无穷大量，排除(A).

分别取 $x_k^{(1)}=2k\pi, x_k^{(2)}=(2k+\frac{1}{2})\pi$，$k$ 为整数，则当 $k\to\infty$时 $f(x_k^{(1)})=0, f(x_k^{(2)})\to\infty$，所以当 $x\to\infty$时，$f(x)$不存在极限，且在$(-\infty,+\infty)$内不是有界的，即(B)、(D)不正确.

故应选(C).

§5. 极限的运算法则

1. 四则运算法则 设 $\lim f(x)$与 $\lim g(x)$都存在，则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$$

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}\quad(\lim g(x)\neq 0)$$

$$\lim cf(x)=c\lim f(x)$$

$$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n\ (n\text{ 为正整数})$$

2. 复合运算法则 设 $y=f[\varphi(x)]$是 $y=f(u), u=\varphi(x)$的复合函数，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=a$，且当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$\varphi(x)\neq u_0$(δ 是某正数)，则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=a.$$

3. 无穷小的性质

(1)有限多个无穷小之代数和仍是无穷小；

(2)有限多个无穷小之积仍是无穷小；

(3)有界变量与无穷小之积仍是无穷小.

4. 无穷小与函数极限之间的关系 在某变化过程中，$\lim f(x)=a\Leftrightarrow f(x)=a+\alpha$，其中 α 为这个变化过程中的无穷小(即 $\lim\alpha=0$).

基 本 题 型

利用四则运算求极限

在使用四则运算求极限时，多数题目不满足四则运算法则的条件，这时往往借助约分、分子或分母有理化、分子分母同乘以(或除以)一个式子等技巧.

【30】 极限$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}=$________.

解 因为$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-4x+3)=0$，$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x-2)=0$，不能直接利用除法法则，需先约分，