統一书号 T13119·544
定　价 0.90 元

数理化自学丛书

代　　数

第 三 册

数理化自学丛书编委会
数学编写小组编

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是数理化自学丛书中代数第三册，內容包括不等式，函数和它的图象，一次函数，二次函数，有理数指数的幂函数，指数函数和对数函数，常用对数，指数方程和对数方程，数列等九章．只要具备初中代数的基本知識就可閱讀．书中有詳細的說明和分析，并附有大量例題和习題，供练习巩固之用．学完本书之后，可达到高中一、二年級的代数水平．

本书供学完本丛书代数一、二册或已具备初中毕业水平的青年自学之用．

数理化自学丛书

代　　数（第三册）

数理化自学丛书編委会
数 学 編 写 小 組 編

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路 450 号）
上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

商务印书館上海厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本 850×1156 1/32　印張 10 28/32　排版字数 271,000
1963 年12月第 1 版　1965 年 3 月第 2 次印刷
印数 23,001—63,000

統一书号 T 13119·544　定价（科二）0.90 元

目　录

第一章 不 等 式

在日常生活、生产实际和科学研究中，我們不但要考察量与量之間的相等关系，也要考察量与量之間的不等关系．反映在数学里，我們不但要研究等式，并且也要研究不等式．

在代数第二册里，我們曾学习过关于不等式的一些初步知識．这一章里，我們将在复习这些知識的基础上，系統地学习关于不等式的知識．

§1·1 不等式的概念

1．实数大小的比較 我們知道，两个实数 a 与 b 之間，总存在，而且只存在，下面三种关系中的一种：

(1) a 大于 b，記做 $a>b$；

(2) a 小于 b，記做 $a<b$；

(3) a 等于 b，記做 $a=b$．

我們还知道，要比較两个实数 a 和 b 的大小，只要考察它們的差就可以了，就是：

如果 $a-b$ 是正的，那末 $a>b$，如果 $a-b$ 是負的，那末 $a<b$，如果 $a-b$ 是零，那末 $a=b$；

反过来，如果 $a>b$，那末 $a-b$ 是正的，如果 $a<b$，那末 $a-b$ 是負的，如果 $a=b$，那末 $a-b$ 是零．

用式子来表示，就是：

設 a，b 为两实数，

$$\text{如果}\qquad a-b\begin{cases}>0,\\<0,\\=0,\end{cases}\quad\text{那末}\qquad a\begin{cases}>b,\\<b,\\=b;\end{cases}$$

$$\text{反过来,如果}\quad a\begin{cases}>b,\\<b,\\=b,\end{cases}\quad\text{那末}\quad a-b\begin{cases}>0,\\<0,\\=0.\end{cases}$$

在上面所讲的式子里，$a>b$ 和 $a<b$ 这两个式子是用不等号“$>$”和“$<$”把两个实数 a 和 b 联結起来构成的，它們都叫做**不等式**；$a=b$是用等号“$=$”把两个实数 a 和 b 联結起来构成的，它叫做**等式**.

2. 代数式的值的大小比較　有时候，我們也要比較两个代数式的值的大小．这时，可以根据一个代数式的值大于、小于、或者等于另一个代数式的值，而分别用符号“$>$”，“$<$”，或者“$=$”把它們联結起来．在前两种情况下，就組成了不等式；在后一种情况下，就組成了等式．例如

$$3+2>4,\quad a+1<a+2$$

等等都是不等式；

$$3+2=5,\quad (a+1)^2=a^2+2a+1$$

等等都是等式.

因为单独用一个字母或数字所表示的数，也可以看做是代数式，所以我們說：

用不等号“$>$”或者“$<$”把两个代数式联結起来所成的式子叫做**不等式**；用等号“$=$”把两个代数式联結起来所成的式子，叫做**等式**.

象比較两个实数的大小一样，比較两个代数式的值的大小，也只要考察它們的差就可以了.

例1. 比較$(x+3)(x-5)$和$(x+2)(x-4)$的大小.

【解】　　$(x+3)(x-5)-(x+2)(x-4)$

$$=(x^2-2x-15)-(x^2-2x-8)$$
$$=-7<0,$$
$$\therefore\quad (x+3)(x-5)<(x+2)(x-4).$$

例 2. 比較$(x^2+1)^2$ 和 x^4+x^2+1 的大小.

【解】 $$(x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)$$
$$=(x^4+2x^2+1)-(x^4+x^2+1)$$
$$=x^2.$$

(1) 如果 $x=0$, 那末 $x^2=0$, 这时有
$$(x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)=0,$$
$$\therefore\quad (x^2+1)^2=x^4+x^2+1.$$

(2) 如果 $x\neq 0$, 因为不等于零的任何实数的平方都是正数,所以 $x^2>0$. 这时有
$$(x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)>0,$$
$$\therefore\quad (x^2+1)^2>x^4+x^2+1.$$

注 上面这两种情况,合在一起可以写做
$$(x^2+1)^2\geqslant x^4+x^2+1.$$
这个式子表示$(x^2+1)^2$ 的值不小于 x^4+x^2+1 的值.

象这种用符号"$\geqslant$"(讀做大于或等于)或者"$\leqslant$"(讀做小于或等于)把两个代数式联結起来的式子,也叫做不等式. 为了区别,我們把用符号"$>$"或者"$<$"联結而成的不等式叫做**严格不等式**,而用符号"$\geqslant$"或者"$\leqslant$"联結而成的不等式叫做**非严格不等式**.

例 3. 比較 $(a-1)^2$ 和 a^2+1 的大小.

【解】 $$(a-1)^2-(a^2+1)=(a^2-2a+1)-(a^2+1)$$
$$=-2a.$$

因为字母 a 可能表示正数或負数,也可能表示零,所以要分做三种情况来考察:

(1) 如果 a 是正数,那末 $-2a$ 就是負数,这时有
$$(a-1)^2<a^2+1.$$

(2) 如果 a 是負数,那末 $-2a$ 就是正数,这时有

$$(a-1)^2>a^2+1.$$

(3) 如果 a 是零,那末 $-2a$ 也是零,这时有

$$(a-1)^2=a^2+1.$$

上面討論的三种情况,合在一起可以写做

$$(a-1)^2\begin{cases}<a^2+1 & \text{如果 } a>0,\\ >a^2+1 & \text{如果 } a<0,\\ =a^2+1 & \text{如果 } a=0.\end{cases}$$

习 题 1·1

比較下列各題中两个代数式的值的大小:

1. $(a-5)(a-7)$ 和 $(a-6)^2$.
2. $(a+1)(a^2-a+1)$ 和 $(a-1)(a^2+a+1)$.
3. $(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ 和 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$, $(x\neq0)$.
4. a^2+b^2 和 $2ab$.

[提示:按照 $a=b$ 或者 $a\neq b$ 分别考察.]

5. $(\sqrt{x}-1)^2$ 和 $(\sqrt{x}+1)^2$.

§1·2 絕对不等式和条件不等式

在上节的例 1 中,我們看到不論字母 x 表示什么实数,不等式

$$(x+3)(x-5)<(x+2)(x-4)$$

总能成立. 在例 2 中,我們看到当 $x\neq0$ 的时候,不等式

$$(x^2+1)^2>x^4+x^2+1$$

才能成立,而当 $x=0$ 的时候,这个不等式就不成立.

如果不論用什么数值代替不等式中的字母,它都能够成立,这样的不等式叫做**絕对不等式**. 如果只有用某些范圍內的数值代替不等式中的字母,它才能够成立,这样的不等式叫做**条件不等式**.

例如,不等式

$$(x+3)(x-5)<(x+2)(x-4)$$

和
$$a+1>a-2$$

都是絕对不等式；而不等式

$$(x^2+1)^2>x^4+x^2+1$$

和
$$(a-1)^2<a^2+1$$

都是条件不等式.

两边都不含有字母而能够成立的不等式，也叫做絕对不等式.例如

$$5>3,\quad -5<-3$$

等等，都是絕对不等式.

例 1. 判断下列这些不等式中，哪些是絕对不等式，哪些是条件不等式？哪些不能成立？

(1) $\sqrt{2}>1.4$;　　(2) $x^2+1>0$;

(3) $x^2+1<0$;　　(4) $x+1<0$.

【解】 (1) 因为不等式 $\sqrt{2}>1.4$ 的两边都不含有字母，并且 $\sqrt{2}=1.414\cdots$ 的值确实大于 1.4，所以这个不等式是絕对不等式.

(2) 因为不論 x 是什么实数，x^2 都不是負数，因此 x^2+1 的值总大于零. 这就是說，不論 x 是什么实数，不等式 $x^2+1>0$ 总能成立，所以这个不等式是絕对不等式.

(3) 因为不論 x 是什么实数，x^2+1 的值总大于零，所以不論用什么数值代替 x，不等式 $x^2+1<0$ 都不能成立.

(4) 因为只有用比 -1 小的值代替 x，不等式 $x+1<0$ 才能成立，所以这个不等式是条件不等式.

在含有字母的不等式中，求出字母应当取什么范圍內的数值才能使不等式成立，这个手續叫做**解不等式**. 这里的字母叫做不等式的未知数，所求出的使不等式能够成立的未知数的那些数值范圍，叫做**不等式的解**.

从上面所举的例子中，可以看到不等式的解可能有三种不同情況：

(1) 任何实数都是不等式的解：例如任何实数都是不等式 $x^2+1>0$ 的解. 这种不等式就是絕对不等式.

(2) 只有某些范圍內的实数是不等式的解：例如只有比 -1 小的实数是不等式 $x+1<0$ 的解. 这种不等式就是条件不等式.

(3) 任何实数都不是不等式的解：例如任何实数都不是不等式 $x^2+1<0$ 的解. 通常我們說这个不等式沒有解.

例 2. 通过观察,确定下列各不等式的解：

(1) $x^2<0$; (2) $(x-1)^2>0$; (3) $(x-1)^2+1>0$.

【解】 (1) 不論 x 是什么实数,x^2 的值不能小于零,这个不等式沒有解.

(2) 只要 $x\neq 1$, $(x-1)^2$ 的值总大于零,所以这个不等式的解是除去 $x=1$ 以外的全体实数,也就是

$$x<1 \text{ 或者 } x>1.$$

(3) 不論 x 是什么实数, $(x-1)^2$ 的值都不能是負数, 因此 $(x-1)^2+1$ 的值总大于零. 所以这个不等式的解是全体实数.

习 题 1·2

1. 应用比較不等式左右两边两个代数式值的大小的方法, 証明下列各不等式是絕对不等式：

(1) $(x+1)(x-5)<(x-2)^2$;

(2) $(a+1)\left(a^2+\frac{1}{2}a+1\right)>\left(a+\frac{1}{2}\right)(a^2+a+1)$.

2. 通过观察,确定下列各不等式的解：

(1) $x^2>0$; (2) $(x+1)^2<0$;

(3) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$; (4) $(x+1)^2>0$.

3. 把下列不等式中左边的式子先配方化成 $(x+m)^2+k$ 的形式, 再确定它的解：

(1) $x^2-2x+3>0$; (2) $x^2-x+1<0$;

(3) $x^2+3x+\frac{9}{4}>0$; (4) $x^2+x+\frac{1}{4}<0$.

§1·3 不等式的基本性质

对于等式来說,我們已經知道它具有下面这些基本性质:

(1) 如果 $a=b$,那末 $b=a$;反过来,如果 $b=a$,那末 $a=b$。(相等的对称性)

(2) 如果 $a=b$, $b=c$, 那末 $a=c$. (相等的傳遞性)

(3) 如果 $a=b$, 那末 $a+c=b+c$.

(4) 如果 $a=b$, 那末 $ac=bc$.

类似地,不等式也有下面这些基本性质:

性质 1. 如果 $a>b$, 那末 $b<a$; 反过来, 如果 $b<a$, 那末 $a>b$.

这个性质叫做**不等的对逆性**.利用这个性质,以后当我們研究不等式的时候,只需研究用一种不等号 (例如用大于号"$>$") 联結起来的不等式的性质, 就可以推出用另一种不等号(例如用小于号"$<$")联接起来的不等式所具有的类似性质.

性质 2. 如果 $a>b$, $b>c$, 那末 $a>c$.

这个性质叫做**不等的傳遞性**. 利用这个性质, 我們可以从一个不等式过渡到另一个不等式.

例如, 从不等式 $\pi>3$ 和 $3>2\sqrt{2}$, 可以得出不等式

$$\pi>2\sqrt{2}.$$

性质 3. 如果 $a>b$, 那末 $a+c>b+c$.

这个性质指出: 不等式的不等号两边加上一个相同的数, 仍旧得到一个不等式, 并且这个不等式与原来的不等式有相同的不等号.

例 1. 已知 $a+b>c$, 求証 $a>c-b$.

【証明】 在不等式 $a+b>c$ 的不等号两边同加上 $-b$, 得

$$a+b+(-b)>c+(-b),$$

$$\therefore\quad a>c-b.$$

这个例子指出：不等式中任何一項可以把它的符号变成相反的符号后，从一边移到另一边.

过去我們在解一元一次不等式的时候，就經常应用到这一法則(移項法則).

例 2. 解不等式 $3x-1>2x$.

【解】 把不等式中含有 x 的項移到不等号的左边，常数項移到不等号的右边得

$$3x-2x>1.$$

$$\therefore\quad x>1.$$

上面关于不等式的三个基本性质，都是很明显的．現在我們进一步来研究在一个不等式的不等号两边同乘以一个数(正数、負数、或者零)的时候，将会产生怎样的結果．我們先来看下面的例子.

例 3. 已知 $a>b$，比較 ac 和 bc 的大小.

分析 要比較 ac 和 bc 的大小，只要考察它們的差 $ac-bc$，就是 $(a-b)c$ 是什么样性质的数就可以了．根据已知条件 $a>b$，可以知道差的一个因式 $a-b$ 一定是正数，因此，差 $(a-b)c$ 是正数、負数、或者是零，要根据 c 是正数、負数、或零来确定.

【解】 $$ac-bc=(a-b)c.$$

$$\because\quad a>b,\quad \therefore\quad a-b \text{ 是正数.}$$

(1) 如果 c 是正数，那末因为两个正数的积仍是正数，所以 $(a-b)c>0$，这时 $ac>bc$.

(2) 如果 c 是負数．那末因为一个正数与一个負数的积是負数，所以 $(a-b)c<0$，这时 $ac<bc$.

(3) 如果 c 等于零．那末 $(a-b)c$ 等于零，所以

$$ac=bc.$$

上面的例子，指出了不等式的第四个基本性质：

性质 4. 如果 $a>b$，那末

$$ac\begin{cases}>bc & (当\ c>0\ 的时候),\\ =bc & (当\ c=0\ 的时候),\\ <bc & (当\ c<0\ 的时候).\end{cases}$$

过去，我們在解一元一次不等式的时候，也經常应用到这个性质.

例 4. 解不等式：

$$2(x+1)+\frac{x-2}{3}>\frac{7x}{2}-1.$$

【解】 在不等式的两边同乘以 6. 得

$$12(x+1)+2(x-2)>21x-6,$$

就是 $$14x+8>21x-6.$$

移項，得

$$14x-21x>-6-8,$$

就是 $$-7x>-14.$$

在上式的两边同除以 $-7\left(就是乘以-\frac{1}{7}\right)$，得

$$x<2.$$

答：原不等式的解是 $x<2$.

为了讲法上的方便，当同时研究两个或几个不等式的时候，如果这些不等式里，每一个的左边都大于右边，或者每一个的左边都小于右边，那末就把这些不等式叫做**同向**不等式. 例如不等式

$$3x-1>2x,\ 3x-2x>1\ 和\ x>1$$

是同向不等式. 如果两个不等式里，一个不等式的左边大于右边，而另一个不等式的左边小于右边，那末就把这两个不等式叫做**异向**不等式. 例如不等式

$$-7x>-14\ 和\ x<2$$

是异向不等式.

这样，我們也可把不等式的基本性质 4 說成：

不等式的两边同乘以一个正数，那末得到和原不等式同向的不等式；如果同乘以一个負数，那末得到和原不等式异向的不等式；如果同乘以零，那末得到一个等式.

注意 等式的两边同乘以一个相同的数，不論是正数、負数或者零，結果总是一个等式，但不等式的两边同乘以一个相同的数，就須要根据乘数的性质来确定它的結果.

所以在应用不等式的这一性质的时候，首先必須要考察用来乘不等式两边的数(或者代数式的值)究竟是正数，是負数，还是零，否則就容易发生錯誤.

*例 5. 解关于 x 的不等式

$$mx-2>x-3m. \tag{1}$$

【解】 移項得

$$(m-1)x>2-3m. \tag{2}$$

因为 $m-1$ 可能是正数或負数，也可能是零，所以需要研究三种情况：

(1) $m-1>0$，这时 $m>1$. 在不等式(2)的两边同乘以正数 $\frac{1}{m-1}$，得

$$x>\frac{2-3m}{m-1}.$$

(2) $m-1<0$，这时 $m<1$. 在不等式(2)的两边同乘以負数 $\frac{1}{m-1}$，得

$$x<\frac{2-3m}{m-1}.$$

(3) $m-1=0$，即 $m=1$. 这时不等式(2)成为

$$0x>-1$$

的形式. 很明显，不論 x 是什么实数，这个不等式都能成立.

綜合上面三种情况，我們得到不等式(1)的解是：

$$x\begin{cases} >\dfrac{2-3m}{m-1}, & \text{如果 } m>1, \\ <\dfrac{2-3m}{m-1}, & \text{如果 } m<1, \\ \text{是全体实数}, & \text{如果 } m=1. \end{cases}$$

习 题 1·3

1. 求証:

(1) 如果 $a>b$, $b>c$, 那末 $a>c$;

(2) 如果 $a>b$, $b=c$, 那末 $a>c$;

(3) 如果 $a=b$, $b<c$, 那末 $a<c$.

[解法举例: (1) $\because a>b,\ b>c,$

$$\therefore\quad a-b>0,\ b-c>0.$$

今

$$a-c=(a-b)+(b-c).$$

因为两个正数的和仍旧是正数,所以 $a-c>0$, 由此可知 $a>c$.]

2. (1) 如果 $a>b$, $c=d$, 是否一定能得出 $ac>bd$, 为什么?

(2) 如果 $ac>bc$, 是否一定能得出 $a>b$, 为什么?

(3) 如果 $a<b$, 是否一定能得出 $ac^2<bc^2$, 为什么?

(4) 如果 $ac^2<bc^2$, 是否一定能得出 $a<b$, 为什么?

(5) 如果 $\dfrac{a}{c^2}<\dfrac{b}{c^2}$, 是否一定能得出 $a<b$, 为什么?

[解法举例: (1) 不一定. 因为 c 和 d 可能同时是正数, 也可能同时是負数, 也可能同时是零. 根据不等式基本性质 4, 只有在第一种情况下, 才能得到 $ac>bd$ 这一結論.]

3. 比較下列各組中两个代数式的值的大小:

(1) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ 与 $6+2\sqrt{6}$;

(2) $(\sqrt{6}+1)^2$ 与 $6+2\sqrt{6}$;

(3) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ 与 $(\sqrt{6}+1)^2$.

4. 解下列各不等式, 并且在数軸上表示出它們的解:

(1) $3[x-2(x-1)]<4x$;

(2) $5-\dfrac{x}{3}<\dfrac{7}{2}-\dfrac{4x+1}{8}$;

(3) $x-\frac{x-1}{2}>\frac{2x-1}{3}-\frac{x+1}{6}$;

(4) $(x-\sqrt{2})^2>(x+\sqrt{2})^2$;

(5) $5(x-1)-x(7-x)<x^2$;

(6) $(x+1)^2<(x-1)^2$;

(7) $(x^2+1)(2x-3)>(x^2+1)(3x-4)$;

*(8) $3x^2-2x<x^3-6$。

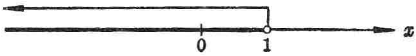
[解法举例：(7) $\because\ x^2+1>0$。

原不等式两边同除以 x^2+1，得

$$2x-3>3x-4,$$

移項得 $-x>-1$， $\therefore\ x<1$。

将这个解表示在数軸上，如下图．它是从 1 这一点开始向左的那一部分数軸，但不包括 1 这一点.]



*5．解下列关于 x 的不等式：

(1) $ax+b^2>bx+a^2\quad(a<b)$;

(2) $mx-n^3<nx-m^3\quad(m<n)$;

(3) $k(x-1)>x-2$;

(4) $(p-q)x<p^2-q^2\quad(p\neq q)$;

(5) $mx-3>2x+m$。

§1·4 一元一次不等式組

在解一些具体問題时，有时根据問題中的条件，未知数的数值范圍，需要同时滿足几个不等式．例如：某天的气候預报，当天最低温度是摄氏 16 度，最高温度是摄氏 22 度，如果用 x 表示当天温度度数，那末 x 可以取值的范圍，需要同时滿足下面这两个不等式：

$$\begin{cases}x\geqslant 16, & (1)\\ x\leqslant 22. & (2)\end{cases}$$

我們說，不等式(1)和(2)組成一个**不等式組**.