

TURING

图灵程序  
设计丛书

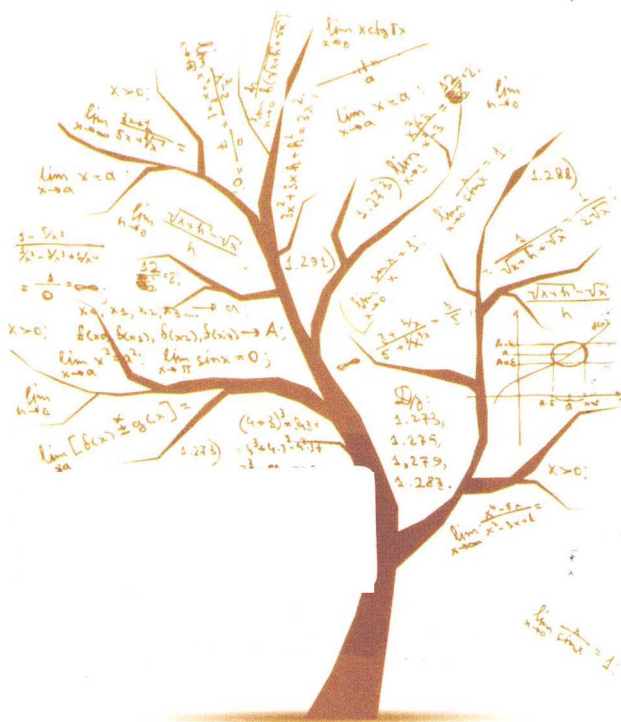
# 程序员的数学

【日】结城浩 著

管杰 译

没有晦涩的公式，只有好玩的数学题。  
帮你掌握编程所需的“数学思维”。

日文版已重印14次！



人民邮电出版社  
POSTS & TELECOM PRESS

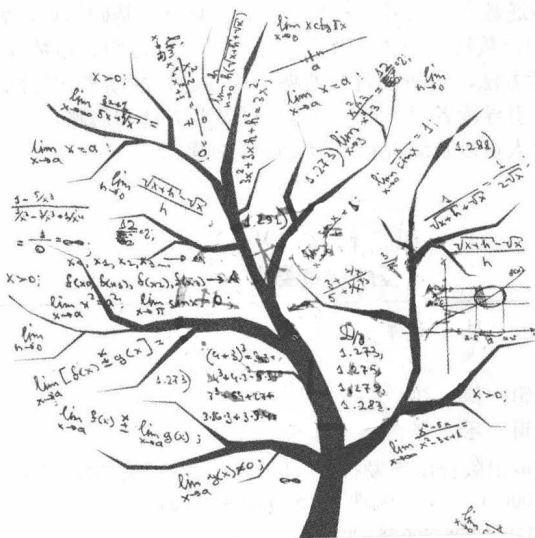
TURING

图灵程序  
设计丛书

# 程序员的数学

【日】结城浩 著

管杰 译



人民邮电出版社

北京

## 图书在版编目 (CIP) 数据

程序员的数学 / (日) 结城浩著; 管杰译. — 北京:  
人民邮电出版社, 2012.11 (2012.12 重印)  
(图灵程序设计丛书)  
ISBN 978-7-115-29368-8

I. ①程… II. ①结… ②管… III. ①电子计算机—  
数学基础 IV. ① TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 220660 号

## 内 容 提 要

本书面向程序员介绍了编程中常用的数学知识, 借以培养初级程序员的数学思维。读者无需精通编程, 也无需精通数学, 只需具备四则运算和乘方等基础知识, 就可以阅读本书。

书中讲解了二进制计数法、逻辑、余数、排列组合、递归、指数爆炸、不可解问题等许多与编程密切相关的数学方法, 分析了哥尼斯堡七桥问题、高斯求和方法、汉诺塔、斐波那契数列等经典问题和算法。引导读者深入理解编程中的数学方法和思路。

本书适合程序设计人员以及编程和数学爱好者阅读。

## 图灵程序设计丛书 程序员的数学

- 
- ◆ 著 [日] 结城浩  
译 管 杰  
责任编辑 傅志红  
执行编辑 乐 馨 张 靖
  - ◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街 14 号  
邮编 100061 电子邮件 315@ptpress.com.cn  
网址 <http://www.ptpress.com.cn>  
三河市海波印务有限公司印刷
  - ◆ 开本: 800×1000 1/16  
印张: 15.5  
字数: 264 千字 2012 年 11 月第 1 版  
印数: 6 001-10 000 册 2012 年 12 月河北第 3 次印刷  
著作权合同登记号 图字: 01-2012-3526 号  
ISBN 978-7-115-29368-8
- 

定价: 49.00 元

读者服务热线: (010)51095186 转 604 印装质量热线: (010)67129223

反盗版热线: (010)67171154

# 目 录

## 第 1 章

### 0 的故事

——无即是有

本章学习内容 .....	2
小学一年级的回忆 .....	2
10 进制计数法 .....	3
什么是 10 进制计数法 .....	3
分解 2503 .....	3
2 进制计数法 .....	4
什么是 2 进制计数法 .....	4
分解 1100 .....	5
基数转换 .....	6
计算机中为什么采用 2 进制计数法 .....	8
按位计数法 .....	10
什么是按位计数法 .....	10
不使用按位计数法的罗马数字 .....	11
指数法则 .....	12
10 的 0 次方是什么 .....	12
$10^{-1}$ 是什么 .....	13
规则的扩展 .....	14
对 $2^0$ 进行思考 .....	14
$2^{-1}$ 是什么 .....	15
0 所起的作用 .....	16
0 的作用: 占位 .....	16

0 的作用: 统一标准, 简化规则 .....	16
日常生活中的 0 .....	17
人类的极限和构造的发现 .....	18
重温历史进程 .....	18
为了超越人类的极限 .....	19
本章小结 .....	20

## 第 2 章

### 逻辑

#### ——真与假的二元世界

本章学习内容 .....	22
为何逻辑如此重要 .....	22
逻辑是消除歧义的工具 .....	22
致对逻辑持否定意见的读者 .....	23
乘车费用问题——兼顾完整性和排他性 .....	23
车费规则 .....	23
命题及其真假 .....	24
有没有“遗漏” .....	24
有没有“重复” .....	25
画一根数轴辅助思考 .....	26
注意边界值 .....	28
兼顾完整性和排他性 .....	28
使用 if 语句分解问题 .....	28
逻辑的基本是两个分支 .....	29
建立复杂命题 .....	30
逻辑非——不是 A .....	30
逻辑与——A 并且 B .....	32
逻辑或——A 或者 B .....	34
异或——A 或者 B (但不都满足) .....	37

相等——A 和 B 相等	39
蕴涵——若 A 则 B	40
囊括所有了吗	45
德·摩根定律	46
德·摩根定律是什么	46
对偶性	47
卡诺图	48
二灯游戏	48
首先借助逻辑表达式进行思考	49
学习使用卡诺图	50
三灯游戏	52
包含未定义的逻辑	54
带条件的逻辑与 (&&)	55
带条件的逻辑或 (  )	57
三值逻辑中的否定 (!)	58
三值逻辑的德·摩根定律	58
囊括所有了吗	59
本章小结	60

## 第 3 章

### 余数

#### ——周期性和分组

本章学习内容	64
星期数的思考题 (1)	64
思考题 (100 天以后是星期几)	64
思考题答案	64
运用余数思考	65
余数的力量——将较大的数字除一次就能分组	65
星期数的思考题 (2)	66

思考题 ( $10^{100}$ 天以后是星期几).....	66
提示: 可以直接计算吗.....	67
思考题答案.....	67
发现规律.....	68
直观地把握规律.....	68
<b>乘方的思考题</b> .....	70
思考题 ( $1234567^{987654321}$ ).....	70
提示: 通过试算找出规律.....	70
思考题答案.....	70
回顾: 规律和余数的关系.....	71
<b>通过黑白棋通信</b> .....	71
思考题.....	71
提示.....	73
思考题答案.....	73
奇偶校验.....	73
奇偶校验位将数字分为两个集合.....	74
<b>寻找恋人的思考题</b> .....	74
思考题 (寻找恋人).....	74
提示: 先试算较小的数.....	74
思考题答案.....	75
回顾.....	75
<b>铺设草席的思考题</b> .....	77
思考题 (在房间里铺设草席).....	77
提示: 先计算一下草席数.....	77
思考题答案.....	78
回顾.....	78
<b>一笔画的思考题</b> .....	79
思考题 (哥尼斯堡七桥问题).....	79
提示: 试算一下.....	80

提示: 考虑简化一下 .....	81
提示: 考虑人口和出口 .....	82
思考题答案 .....	82
奇偶校验 .....	85
<b>本章小结</b> .....	<b>86</b>

## 第 4 章

### 数学归纳法

#### ——如何征服无穷数列

本章学习内容 .....	88
高斯求和 .....	88
思考题 (存钱罐里的钱) .....	88
思考一下 .....	89
小高斯的解答 .....	89
讨论一下小高斯的解答 .....	89
归纳 .....	91
<b>数学归纳法 —— 如何征服无穷数列</b> .....	<b>91</b>
0 以上的整数的断言 .....	92
高斯的断言 .....	93
什么是数学归纳法 .....	93
试着征服无穷数列 .....	94
用数学归纳法证明高斯的断言 .....	95
<b>求出奇数的和 —— 数学归纳法实例</b> .....	<b>96</b>
奇数的和 .....	96
通过数学归纳法证明 .....	97
图形化说明 .....	98
<b>黑白棋思考题 —— 错误的数学归纳法</b> .....	<b>99</b>
思考题 (黑白棋子的颜色) .....	99
提示: 不要为图所惑 .....	100



思考题答案 .....	100
编程和数学归纳法 .....	101
通过循环表示数学归纳法 .....	101
循环不变式 .....	103
本章小结 .....	107

## 第 5 章

### 排列组合

#### ——解决计数问题的方法

本章学习内容 .....	110
计数——与整数的对应关系 .....	110
何谓计数 .....	110
注意“遗漏”和“重复” .....	111
植树问题——不要忘记 0 .....	111
植树问题思考题 .....	111
加法法则 .....	115
加法法则 .....	115
乘法法则 .....	117
乘法法则 .....	117
置换 .....	121
置换 .....	121
归纳一下 .....	122
思考题（扑克牌的摆法） .....	123
排列 .....	125
排列 .....	125
归纳一下 .....	126
树形图——能够认清本质吗 .....	128
组合 .....	130
组合 .....	130

归纳一下 .....	131
置换、排列、组合的关系 .....	132
思考题练习 .....	134
重复组合 .....	134
也要善于运用逻辑 .....	136
本章小结 .....	139

## 第 6 章

### 递归

#### ——自己定义自己

本章学习内容 .....	142
汉诺塔 .....	142
思考题 (汉诺塔) .....	142
提示: 先从小汉诺塔着手 .....	143
思考题答案 .....	146
求出解析式 .....	148
解出汉诺塔的程序 .....	149
找出递归结构 .....	150
再谈阶乘 .....	151
阶乘的递归定义 .....	152
思考题 (和的定义) .....	153
递归和归纳 .....	153
斐波那契数列 .....	154
思考题 (不断繁殖的动物) .....	154
斐波那契数列 .....	157
帕斯卡三角形 .....	159
什么是帕斯卡三角形 .....	159
递归定义组合数 .....	162
组合的数学理论解释 .....	163

递归图形 .....	165
以递归形式画树 .....	165
实际作图 .....	166
谢尔平斯基三角形 .....	167
本章小结 .....	168

## 第 7 章

### 指数爆炸

#### ——如何解决复杂问题

本章学习内容 .....	172
什么是指数爆炸 .....	172
思考题（折纸问题） .....	172
指数爆炸 .....	175
倍数游戏——指数爆炸引发的难题 .....	176
程序的设置选项 .....	176
不能认为是“有限的”就不假思索 .....	178
二分法查找——利用指数爆炸进行查找 .....	178
寻找犯人的思考题 .....	178
提示：先思考人数较少的情况 .....	179
思考题答案 .....	180
找出递归结构以及递推公式 .....	181
二分法查找和指数爆炸 .....	183
对数——掌握指数爆炸的工具 .....	184
什么是对数 .....	184
对数和乘方的关系 .....	184
以 2 为底的对数 .....	186
以 2 为底的对数练习 .....	186
对数图表 .....	187
指数法则和对数 .....	188

对数和计算尺 .....	190
密码——利用指数爆炸加密 .....	193
暴力破解法 .....	193
字长和安全性的关系 .....	193
如何处理指数爆炸 .....	195
理解问题空间的大小 .....	195
四种处理方法 .....	195
本章小结 .....	196

## 第 8 章

### 不可解问题

#### ——不可解的数、无法编写的程序

本章学习内容 .....	200
反证法 .....	200
什么是反证法 .....	200
质数思考题 .....	202
反证法的注意事项 .....	203
可数 .....	203
什么是可数 .....	203
可数集合的例子 .....	204
有没有不可数的集合 .....	206
对角论证法 .....	207
所有整数数列的集合是不可数的 .....	207
所有实数的集合是不可数的 .....	211
所有函数的集合也是不可数的 .....	212
不可解问题 .....	213
什么是不可解问题 .....	213
存在不可解问题 .....	214
思考题 .....	215

停机问题 .....	215
停机 .....	216
处理程序的程序 .....	217
什么是停机问题 .....	217
停机问题的证明 .....	219
写给尚未理解的读者 .....	222
不可解问题有很多 .....	223
本章小结 .....	224

## 第 9 章

### 什么是程序员的数学

#### ——总结篇

本章学习内容 .....	226
何为解决问题 .....	229
认清模式，进行抽象化 .....	229
由不擅长催生出的智慧 .....	229
幻想法则 .....	230
程序员的数学 .....	231

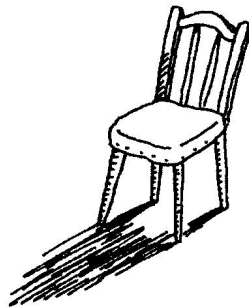
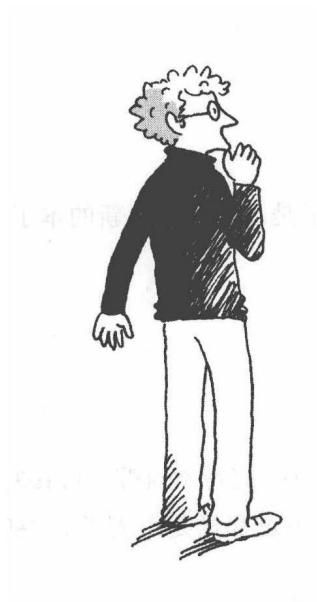
第 **1** 章

---

**0** 的故事

——无即是有

ZERO MATTERS.



### ◎ 课前对话

老师：1, 2, 3 的罗马计数法是 I, II, III。

学生：加法很简单嘛。I + II，只要将 3 个 I 并排写就行了。

老师：不过 II + III 可不是 IIII，而是 V 喔！

学生：啊，是这样啊！

老师：没错，如果数目变大，那数起来可就费劲啦！

## 本章学习内容

本章将学习有关“0”的内容。

首先，介绍一下我们人类使用的 10 进制和计算机使用的 2 进制，再讲解按位计数法，一起来思考 0 所起的作用。乍一看，0 仅仅是表示“什么都没有”的意思，而实际上它具有创建模式、简化并总结规则的重要作用。

## 小学一年级的回忆

以下是小学一年级时发生的事，我依然记忆犹新。

“下面请打开本子，写一下‘十二’。”老师说道。于是，我翻开崭新的本子，紧握住削尖了的铅笔，写下了这样大大的数字。

102

老师走到我跟前，看到我的本子，面带微笑亲切地说：“写得不对喔。应该写成 12 喔。”

当时我是听到老师说“十二”，才写下了 10 和 2。不过那样是不对的。众所周知，现在我们把“十二”写作 12。

而在罗马数字中，“十二”写作 XII。X 表示 10，I 表示 1。II 则表示两个并排的 1，即 2。也就是说，XII 是由 X 和 II 组成的。

如同“十二”可以写作 12 和 XII，数字有着各种各样的计数法。12 是阿拉伯数字的计数法，而 XII 是罗马数字的计数法。无论采用哪种计数法，所表达的“数字本身”并无二

致。下面我们就来介绍几种计数法。

## 10 进制计数法

下面介绍 10 进制计数法。

### 什么是 10 进制计数法

我们平时使用的是 10 进制计数法。

- 使用的数字有 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 共 10 种<sup>①</sup>。
- 数位有一定的意义，从右往左分别表示个位、十位、百位、千位……

以上规则在小学数学中都学到过，日常生活中也一直在用，是众所周知的常识。在此权当复习，后面我们将通过实例来了解一下 10 进制计数法。

### 分解 2503

首先，我们以 2503 这个数为例。2503 表示的是由 2、5、0、3 这 4 个数字组成的一个称作 2503 的数。



这样并排的数字，因数位不同而意义相异。

- 2 表示“1000 的个数”。
- 5 表示“100 的个数”。
- 0 表示“10 的个数”。
- 3 表示“1 的个数”。

<sup>①</sup> 这里的“种”指的是数字的种类，用来说明 10 进制和 2 进制中数字复杂程度的差异。如 2561 中包含四种数字，而 1010 中只包含两种数字。——译者注



综上所述，2503 这个数是 2 个 1000、5 个 100、0 个 10 和 3 个 1 累加的结果。用数字和语言来冗长地说明有些无趣，下面就用图示来表现。

$$2 \times 1000 + 5 \times 100 + 0 \times 10 + 3 \times 1$$

如图，将数字的字体大小加以区别，各个数位上的数字 2、5、0、3 的意义便显而易见了。

1000 是  $10 \times 10 \times 10$ ，即  $10^3$  (10 的 3 次方)，100 是  $10 \times 10$ ，即  $10^2$  (10 的 2 次方)。因此，也可以写成如下形式（请注意箭头所示部分）。

$$2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 0 \times 10 + 3 \times 1$$

再则，10 是  $10^1$  (10 的 1 次方)，1 是  $10^0$  (10 的 0 次方)，所以还可以写成如下形式。

$$2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

千位、百位、十位、个位，分别可称作  $10^3$  的位、 $10^2$  的位、 $10^1$  的位、 $10^0$  的位。10 进制计数法的数位全都是  $10^n$  的形式。这个 10 称作 10 进制计数法的**基数或底**。

基数 10 右上角的数字——**指数**，是 3、2、1、0 这样有规律地顺次排列的，这点请记住。

$$2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

## 2 进制计数法

下面讲解 2 进制计数法。

### 什么是 2 进制计数法

计算机在处理数据时使用的是 2 进制计数法。从 10 进制计数法类推，便可很快掌握它的规则。