高校经典教材同步辅导

九章丛书

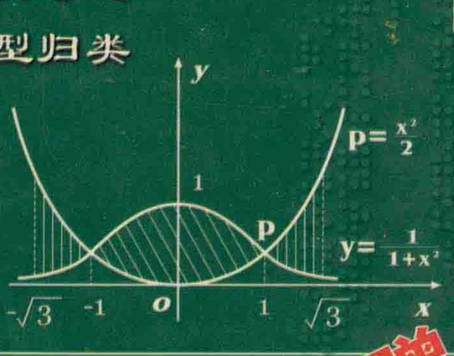
经济应用数学基础（一）

微积分辅导

人大修订本

主编／孙怀东　杨富云
编写／九章系列课题组

★知识点窍 ★逻辑推理
★习题全解 ★全真考题
★名师执笔 ★题型归类



赠 习题全解

人民日报出版社

高校经典教材同步辅导

经济应用数学基础(一)

微积分辅导

(人大修订本)

主编　孙怀东　杨富云

主审　张志敏

编写　九章系列课题组

赵志新　陆　续

战　扬　康　伟

人民日报出版社

图书在版编目(CIP)数据

高校经典教材同步辅导·微积分(人大修订本)/孙怀东,杨富云主编.—北京:人民日报出版社,2004.4

ISBN 7-80153-865-X

Ⅰ.高… Ⅱ.①孙…②杨… Ⅲ.高校—教学参考资料

Ⅳ.G624

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 030526 号

高校经典教材同步辅导·微积分(人大修订本)

主　　编:孙怀东　杨富云

责任编辑:安　申

封面设计:伍克润

出版发行:人民日报出版社(北京金台西路 2 号/邮编:100733)

经　　销:新华书店

印　　刷:北京顺天意印刷有限公司

字　　数:463 千字

开　　本:850×1168　1/32

印　　张:18

印　　数:3000

印　　次:2005 年 8 月第 1 次印刷

书　　号:ISBN 7-80153-865-X/G·479

定　　价:21.80 元(全五册·128.00 元)

前　言

《微积分》是经济数学中一门很重要的基础课，也是经济类各专业研究生入学考试必考的内容。为了帮助广大学生扎实地掌握《微积分》的精髓和解题技巧，提高解答各种题型的能力，我们根据赵树嫄编写的经济应用数学基础(一)——《微积分》编写了这本辅导教材。

本书采用目前最为独特新颖的体例设计和版式设计，并吸收了"以题型为纲"的编写思想，归纳了这门课程中几乎所有题型，精心选编和分析了大量的经典例题，并独立设计了许多新颖例题。

本书包括函数、根限与连续、导数与微分、中值定理、导数的应用、不定积分、定积分、无穷级数、多元函数、微分方程与差分方程。

本辅导教材由以下几个部分组成：

1. **基本要求**：结合每年考研大纲的要求，分别对各章知识点做了简练的概括，使读者在各章的学习过程中目标明确，有的放矢。

2. **主要概念、定理及公式**：列出了各章的基本概念、重要定理和重要公式，突出必须掌握或考试中出现频率较高的核心内容。

3. **典型题型解析**：对于一门课程来说，题目是无穷的，但题型是有限的。本书尽可能全面地归纳了这门课程所涉及的题型，并逐一进行分析并给出了解题方法和规律。通过对微积分各种典型题型的分析，介绍各种解题思路、方法和运算技巧，帮助读者把微积分中各个概念予以融会贯通，拓宽解题思路，提高分析解决问题的能力，掌握解题的技巧。

4. **全真考题解析**：对于掌握一门课程并通过相关考试来说，做一定量的习题是必不可少的，而考研真题由于命题严谨性及科学

性，具有更高的学习价值。为此，笔者精选了历年考研真题，供读者学习和练习之用。

5. **自测题**：要掌握一门课程，做一定量的习题是十分必要的。本书精心选编了部分习题，供读者模拟练习之用。

6. **赠书**：本书赠送的小册子中包含了人民大学出版社出版的《微积分》中全部习题的详细解答。

本书在编写过程中，参考了高等教育出版社出版的《微积分学习辅导与解题方法》，世界图书出版公司的《微积分解题思路和方法》、《高等数学辅导》，机械工业出版社出版的《微积分》（经济数学基础教材辅导），中国人民大学出版社出版的《微积分学习与解题指导》、《微积分学习与考试指导》，西北工业大学出版社出版的《高等数学常见题型解析及模拟题》等书，在此深表感谢！

由于编者水平有限及编写时间仓促，不妥之处在所难免，希望广大读者不吝批评指正。

编者

2005 年 6 月

目　录

第一章　函　　数

1.1　基本要求

1. 理解实数绝对值的概念，掌握解简单绝对值的方法.

2. 理解函数的定义，会求函数的定义域与值域.

3. 掌握函数的单调性、奇偶性、周期性、有界性等性质.

4. 深刻理解复合函数的概念，知道构成复合函数的条件，熟练掌握将复合函数分解成较简单函数的基本方法.

5. 掌握基本初等函数的定义、定义域、基本性质和图象特征.

6. 理解初等函数的概念，会判别非初等函数.

7. 会建立应用问题的函数关系式，掌握经济学中常用的成本函数、收益函数、利润函数等.

1.2　主要概念、定理及公式

1.2.1　集　合

1. 集合的概念

集合是具有某种属性的事物的全体，或是一些确定对象的汇总，构成集合的事物或对象，称为集合的元素.

2. 集合的表示方法

(1)列举法：按任意顺序列出集合的所有元素，并用花括号括起来.

(2)描述法：设 $P(a)$ 为某个与 a 有关的条件或法则，A 为满足 $P(a)$ 的一切 a 构成的集合

则记为

$$A=\{a\mid P(a)\}.$$

3. 全集与空集

(1)全集是由研究的所有事物构成的集合，记为 U 全集是相对的，一个集合在一定条件下是全集，在另一条件下就可能不是全集.

(2)空集是不包含任何元素的集合，记为 Φ.

4. 集合的运算

设 A,B 是两个集合，规定

$$A\cup B=\{x|x\in A\quad 或\quad x\in B\}$$
$$A\cap B=\{x|x\in A\quad 且\quad x\in B\}$$
$$A-B=\{x|x\in A\quad 且\quad x\overline{\in} B\}$$

5. 集合的运算律

(1)交律律：$A\cup B=B\cup A\qquad A\cap B=B\cap A$

(2)结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

(3)分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

(4)摩根律：$(A\cup B)'=A'\cap B'\qquad (A\cap B)=A'\cup B'$

6. 集合的笛卡尔乘积

设有集合 A 和 B，$x\in A$，$y\in B$，所有二元有序数组(x,y)构成的集合，称为集合 A 与 B 的笛卡称乘积，记为 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$$

1.2.2 实数集

1. 绝对值

一个数 x 的绝对值，记为$|x|$，定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

绝对值及其运算有下列性质：

(1)$|x|=\sqrt{x^2}$

(2)$|x|\geqslant 0$

(3)$|-x|=|x|$

(4)$-|x|\leqslant x\leqslant|x|$

(5)$\{x||x|<a\}=\{x|-a<x<a\}$，其中 $a<0$.

(6)$\{x||x|>b\}=\{x|x<-b\}\cup\{x|x>b\}$，其中 $b>0$

(7)$|x+y|\leqslant|x|+|y|$

(8)$|x-y|\geqslant|x|-|y|$

(9)$|xy|=|x|\cdot|y|$

(10) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}, y\neq 0$.

2. 区间与邻域

(1)区间

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$$
$$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$$
$$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$$
$$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}$$
$$[a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a\}$$
$$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$$
$$(-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b\}$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$$

(2)邻域

称实数集合$\{x \mid |x-x_0|<\delta,\delta>0\}$为点 x_0 的 δ 邻域. x_0 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径,称实数集合$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$为以 x_0 为中心,以 δ 为半径的空心领域.

1.2.3 函数关系

1. 函数关系的定义

若 D 是一个非空实数集合,设有一个对应规则 f,使每一个 $x\in D$,都有一个确定的实数 y 与之对应,则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系,或称变量 y 是变量 x 的函数. 记作 $y=f(x), x\in D$. x 称为自变量 y 称为因变量.

2. 多值函数

对于非空集合 D 中的 x 值有多个 y 值与之对应的关系称为多值函数.

1.2.4 函数表示法

1. 三种表示法

(1)公式法:把一个函数关系用一个解析式表示的方法;

(2)表格法;

(3)图形法.

2. 分段函数

在自变量的不同变化范围中,自变量与因变量的对应规则用不同的式子来表示的函数称为分段函数. 一般来说,分段函数不是初等函数.

3. 隐函数

设 $F(x,y)$是一个已知二元函数，I 是一个区间，如果对于每个 $x\in I$，都存在惟一的 y 满足方程 $F(x,y)=0$，则称这个函数 $y=f(x)$为由 $F(x,y)=0$ 在区间 I 上确定的隐函数. 因此如果把隐函数 $y=f(x)$代入方程 $F(x,y)=0$，便得到在区间 I 上成立的恒等式：

$$F(x,f(x))\equiv 0, x\in I.$$

在大多数情况下，不能从方程 $F(x,y)=0$ 中解出隐函数 $y=f(x)$的显式表达式. 但是，却可利用上述恒等式来研究隐函数的许多性质.

1.2.5　函数的几种简单的性质

1. 函数的奇偶性

给定函数 $y=f(x)$，$x\in(-l,l)$，若 $\forall x\in(-l,l)$，有 $f(-x)=f(x)$（$f(-x)=-f(x)$），则称 $f(x)$为偶函数（奇函数）.

2. 函数的周期性

给定函数 $y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，若 $\exists a>0$，使 $f(x+a)=f(x)$，则称 a 为 $f(x)$的周期.

3. 函数的单调性

给定函数 $y=f(x)$，$x\in(a,b)$，$\forall x_1,x_2\in(a,b)$，$x_1<x_2$，若有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$在区间(a,b)内是单调增加的；若有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$在区间(a,b)内是单调减少的.

4. 函数的有界性

给定函数 $y=f(x)$，$x\in(a,b)$，若 $\forall x\in(a,b)$，$\exists M>0$，使$|f(x)|\leqslant M$ 成立，对称 $f(x)$在(a,b)内是有界的. 如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$在(a,b)内是无界的.

1.2.6　反函数与复合函数

1. 反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域是 D，值域是 Z. 如果对于每个 $y\in Z$，存在惟一的 $x\in D$ 满足 $f(x)=y$，把 y 看作自变量，把 x 看作因变量，则 x 是一个定义在 $y\in Z$ 上的函数，记此函数为 $x=f^{-1}(y)(y\in Z)$，并称之为 $y=f(x)(x\in D)$的反函数.

习惯上常以 x 表示自变量，y 表示因变量，故常将函数 $y=f(x)(x\in D)$的反函数表示成 $y=f^{-1}(x)(x\in Z)$.

它与 $x=f^{-1}(y)(y\in Z)$表示同一个函数，因为二者具有相同的定义域和

相同的对应规则. 因而，在同一个直角坐标系中，函数 $y=f(x)(x\in D)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)(x\in Z)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

注　函数 $y=f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不具有反函数. 如果考虑函数 $y=f_1(x)=x^2, x\in D_1=[0,+\infty]$ 或函数 $y=f_2(x)=x^2, x\in D_2=(-\infty,0]$，这时常使用术语：称函数 $f_1(x)$（或 $f_2(x)$）为“函数 f 在 D_1（或 D_2）上的限制”或“函数 f 限制在 D_1（或 D_2）上”，且记作 $f|_{D_1}$（或 $f|_{D_2}$），其本质是一个新的函数. 于是，就本例 $y=f(x)=x^2$ 在 $D_2=(-\infty,0)$ 上的限制 $f|_{D_2}$ 就具有反函数 $y=f^{-1}|_{D_2}(x)=-\sqrt{x}, x\in[0,+\infty)$. 同样，反正切函数 $y=\arctan x$ 是正切函数 $y=\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上的限制的反函数，所以 $\tan(\arctan x)=x, x\in(-\infty,+\infty)$.

2. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D(f)$，若函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 $z(\varphi)$，$z(\varphi)\cap D(f)$ 非空，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为复合函数. x 为自变量，y 为因变量，u 称为中间变量.

注　不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数；

1.2.7　初等函数

1. 基本初等函数

下列函数统称为基本初等函数：

(1) 常函数：　$y=c$

(2) 幂函数：　$y=x^a$（a 为任意实数）

(3) 指数函数：　$y=a^x\ (a>0, a\neq 1)$

(4) 对数函数：　$y=\log_a x\ (a>0, a\neq 1)$

(5) 三角函数：　$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x,$
$y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$

(6) 反三角函数：　$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x$
$y=\operatorname{arccot} x, y=\operatorname{arcsec} x, y=\operatorname{arccsc} x$

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，统称为初等函数.

1.2.8　函数图形的简单组合与变换

1. 迭加；

2. 翻转；

3. 放缩；

4. 平移.

1.3 典型题型解析

题型 1 求函数的定义域

【思路点拨】 当函数 $y=f(x)$ 用解析表达式给出，而又没有给出自变量的取值范围时，要求函数的定义域，就是求使该解析式有意义的自变量的取值范围.

对于表示应用问题的函数关系，其自变量的取值范围就使实际问题有意义.

记住下列简单函数的定义域：

$$y=\frac{1}{x},D:x\neq 0$$

$$y=\sqrt[2n]{x},D:x\geqslant 0$$

$$y=\log_a x,D:x>0$$

$$y=\tan x,D:x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$$

$$y=\cot x,D:x\neq k\pi,k\in Z$$

$$y=\arcsin x,D:|x|\leqslant 1$$

$$y=\arccos x,D:|x|\leqslant 1$$

求复杂函数的定义域，就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组之解集.

【例 1.1】 (1) $y=e^{\frac{1}{x}}+\arcsin\ln\sqrt{1-x}$ 的定义域是________；

(2)设 $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$，则 $y=f(x^2)+f(e^x)$ 的定义域是________；

(3)设函数 $y=\sqrt{g(x)}+\sqrt{16-x^2}$ 的定义域是 $[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$，则 $g(x)$ 的表达式为 $g(x)$________.

解 (1)由 $e^{\frac{1}{x}}$ 知，$x\neq 0$；由 $\arcsin\ln\sqrt{1-x}$ 知，

$-1\leqslant\ln\sqrt{1-x}\leqslant 1,e^{-1}\leqslant\sqrt{1-x}\leqslant e,1-e^2\leqslant x\leqslant 1-e^{-2}$，

故所求的定义域是 $[1-e^2,0)\cup(0,1-e^{-2}]$.

(2)易求得函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-1,1)$，由此有