普通高等教育规划教材

Mechanics of Materials

材料力学

学习指导与题解

第2版

◎ 王永廉 汪云祥 方建士 编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育规划教材

材料力学学习指导与题解

第2版

王永廉　汪云祥　方建士　编

机 械 工 业 出 版 社

本书是与王永廉主编的《材料力学》(第2版)配套的教学与学习指导书。

本书按主教材的章节顺序编写，每章分为知识要点、解题方法、难题解析与习题解答四个部分。其中，“知识要点”部分提纲挈领地对该章的基本概念、基本理论和基本公式进行归纳总结，以方便读者复习、记忆和查询；“解题方法”部分深入细致地介绍解题思路、解题方法和解题技巧，以提高读者分析问题和解决问题的能力；“难题解析”部分精选若干在主教材的例题与习题中没有涉及的典型难题进行深入分析，以拓展读者视野、满足读者深入学习的需要；“习题解答”部分对主教材中该章的全部习题均给出求解思路和答案，但不提供详细解题过程，以期在帮助读者自主学习和练习的同时为他们留出适量的思考空间。

本书继承了主教材的风格特点：结构严谨、层次分明、语言精练、通俗易懂。

本书虽与主教材配套，但其结构体系完整，亦可单独使用。

本书可作为应用型本科院校与民办二级学院工科各专业学生的学习和应试指导书，同样适合高职高专、自学考试和成人教育的学生使用，对考研者、教师和工程技术人员也是一本很好的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

材料力学学习指导与题解/王永廉等编. —2版. —北京：机械工业出版社，2012.12

普通高等教育规划教材

ISBN 978-7-111-40005-9

Ⅰ. ①材… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①材料力学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①TB301

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第239356号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：张金奎　责任编辑：张金奎
版式设计：霍永明　责任校对：陈延翔
封面设计：张　静　责任印制：张　楠
北京振兴源印务有限公司印刷
2013年1月第2版第1次印刷
169mm×239mm · 18.75印张 · 360千字
标准书号：ISBN 978-7-111-40005-9
定价：29.80元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：(010) 88361066	教材网：http://www.cmpedu.com
销售一部：(010) 68326294	机工官网：http://www.cmpbook.com
销售二部：(010) 88379649	机工官博：http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线：(010) 88379203	**封面无防伪标均为盗版**

目　　录

第十三章 超静定结构与力法

第十四章 电测法简介

第一章
绪　　论

知识要点

一、材料力学的任务

强度：构件抵抗破坏的能力。

刚度：构件抵抗变形的能力。

稳定性：构件保持原有平衡形态的能力。

材料力学的任务：研究材料在外力作用下的变形和破坏规律，为合理设计构件提供强度、刚度和稳定性方面的基本理论和计算方法。

二、材料力学的基本假设

对变形固体的基本假设——

连续性假设：组成固体的物质毫无空隙地充满了固体所占有的整个几何空间。

均匀性假设：固体的力学性能在固体内处处相同。

各向同性假设：固体在各个方向上的力学性能完全相同。

对构件变形的基本假设——

小变形假设：构件受力产生的变形量远小于构件的原始尺寸。

三、材料力学的研究对象

材料力学的研究对象：杆件。

杆件：纵向尺寸远大于横向尺寸的构件。

杆件的几何要素：横截面与轴线。

横截面：杆件的横向截面。

轴线：杆件横截面形心的连线，为杆件的纵向几何中心线。

四、杆件的基本变形

杆件的基本变形：轴向拉伸（压缩）、剪切、扭转、弯曲。

第二章
轴向拉伸与压缩

知识要点

一、基本概念

1. 轴向拉伸（压缩）**特点**

受力特点：杆件所受外力或外力合力的作用线与杆的轴线重合。

变形特点：杆件沿着轴线方向伸长（缩短）。

2. 内力与截面法

内力：外力引起的构件内部相连部分之间的相互作用力。

截面法：分析确定构件内力的基本方法，其基本思路为

(1) 沿待求内力的截面，假想地将构件截开，选取其中一部分为研究对象；

(2) 对所选取的部分进行受力分析，根据平衡原理确定，在暴露出来的截面上有哪些内力；

(3) 建立平衡方程，求出未知内力。

3. 轴力

轴力：轴向拉伸（压缩）杆件横截面上的内力，其作用线与杆的轴线重合，记作 F_{N}。

轴力正负号规定：以拉力为正、压力为负。

轴力图：表示轴力随横截面位置变化规律的图线。

4. 应力

应力定义：截面上分布内力的集度。

应力单位：国际单位制中，应力的单位为 Pa，$1\ \mathrm{Pa}=1\ \mathrm{N/m^2}$；工程中，应力常用单位为 MPa，$1\ \mathrm{MPa}=10^6\ \mathrm{Pa}$。

正应力：法向应力分量，记作 σ。

正应力正负号规定：以拉应力为正、压应力为负。

切应力：切向应力分量，记作 τ。

切应力正负号规定：以围绕所取分离体顺时针转向的切应力为正、反之为负。

5. 拉（压）杆的变形

轴向变形：拉（压）杆的轴向伸长（缩短）量，定义为 $\Delta l=l_1-l$，其中 l 为拉（压）杆原长，l_1 为拉（压）杆变形后的长度。

线应变：简称应变，定义为 $\varepsilon=\dfrac{\Delta l}{l}=\dfrac{l_1-l}{l}$，其中 l 为某线段的原始长度，l_1 为该线段伸长（缩短）后的长度。线应变的量纲为一。

6. 材料的拉伸与压缩试验

弹性变形：卸载后会消失的变形。

塑性变形：卸载后不会消失的变形，塑性变形又称为残余变形。

标距：拉伸试样试验段的原始长度。国家标准规定，对于试验段直径为 d 的圆截面试样，标距 $l=10d$ 或 $l=5d$；对于试验段横截面面积为 A 的矩形截面试样，标距 $l=11.3\sqrt{A}$或 $l=5.65\sqrt{A}$。

低碳钢拉伸 σ-ε 曲线的四个阶段：

（1）线弹性阶段

产生弹性变形；应力与应变呈线性关系。

（2）屈服阶段

产生塑性变形；发生屈服现象，即应力基本维持不变，而应变却在显著增加，材料暂时丧失了变形抗力。

（3）强化阶段

产生弹塑性变形；发生强化现象，即材料屈服后又恢复了变形抗力，要使其继续变形必须增加载荷。

（4）缩颈阶段

发生缩颈现象，即变形局部化；材料的变形抗力急剧下降，直至断裂。

冷作硬化现象：对材料预加塑性变形，卸载后再重新加载，所呈现出的比例极限提高、塑性降低的现象。

7. 材料的强度指标

比例极限：应力与应变成正比时的最大应力，记作 σ_p。

弹性极限：弹性阶段的最大应力，亦即只发生弹性变形的最大应力，记作 σ_e。材料的弹性极限 σ_e 与比例极限 σ_p 大致相同。

屈服极限：屈服阶段中排除初始瞬时效应后的最小应力（即下屈服点），记作 σ_s。塑性材料拉伸与压缩时的屈服极限大致相同。

名义屈服极限：无屈服阶段的塑性材料产生 0.2%的塑性应变所对应的应

力，记作 $\sigma_{0.2}$。塑性材料拉伸与压缩时的名义屈服极限大致相同。

强度极限：材料拉伸（压缩）断裂前所能承受的最大应力，记作 σ_b。脆性材料压缩时的强度极限 σ_{bc} 要明显大于其拉伸时的强度极限 σ_b。

8. 材料的塑性指标・塑性材料与脆性材料

伸长率：$\delta=\frac{l_1-l}{l}\times100\%$，其中 l 为试样标距，即试样试验段的原始长度；l_1 为拉断后试样试验段的长度。

断面收缩率：$\psi=\frac{A-A_1}{A}\times100\%$，其中 A 为试样试验段的原始横截面面积；A_1 为拉断后试样断口处的最小横截面面积。

塑性材料：伸长率 $\delta>5\%$ 的材料。

脆性材料：伸长率 $\delta<5\%$ 的材料。

9. 材料的弹性常数

弹性模量：σ-ε 曲线的初始直线段的斜率，记作 E，当 $\sigma\leqslant\sigma_p$ 时，有 $E=\frac{\sigma}{\varepsilon}$。国际单位制中，弹性模量的单位为 Pa。

横向变形因数：$\mu=\left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right|$，其中 ε、ε' 分别为材料轴向拉伸（压缩）时的轴向应变、横向应变。横向变形因数又称为泊松比。横向变形因数的量纲为一。

10. 强度概念

强度失效的两种形式：在静载荷作用下，对于塑性材料，强度失效的形式一般为塑性屈服；对于脆性材料，强度失效的形式一般为脆性断裂。

极限应力：材料强度失效时所对应的应力，记作 σ_u。对于塑性材料，极限应力一般取为屈服极限 σ_s 或名义屈服极限 $\sigma_{0.2}$；对于脆性材料，极限应力一般取为强度极限 σ_b。

许用应力与安全因数：材料安全工作所容许承受的最大应力，记作 $[\sigma]$。工程中规定 $[\sigma]=\frac{\sigma_u}{n}$，其中 n 为大于 1 的因数，称为安全因数。塑性材料的安全因数通常取为 1.5～2.2；脆性材料的安全因数通常取为 2.5～5.0。塑性材料拉伸与压缩时的许用应力大致相同；脆性材料压缩时的许用应力 $[\sigma_c]$ 要明显大于其拉伸时的许用应力 $[\sigma_t]$。

强度条件：保证构件安全可靠工作、不发生强度失效的条件。

11. 圣维南原理

作用于杆端的外力的分布方式，只会影响杆端局部区域的应力分布，影响区至杆端的距离大致等于杆的横向尺寸。

12. 应力集中概念

应力集中现象：由于构件截面形状或尺寸突然变化而引起的局部应力急剧

增大的现象。

理论应力集中因数：$K=\frac{\sigma_{max}}{\sigma}$，其中$\sigma_{max}$为应力集中处的最大应力，$\sigma$为同一截面上的名义平均应力。

13. 温度应力与装配应力

温度应力：对于超静定结构，因温度变化而产生的应力。

装配应力：对于超静定结构，因构件尺寸误差强行装配而产生的应力。

二、基本公式

1. 拉（压）杆横截面上正应力计算公式

$$\sigma=\frac{F_N}{A} \tag{2-1}$$

式中，F_N为轴力；A为杆件横截面面积。

2. 拉（压）杆斜截面上应力计算公式

$$\sigma_\alpha=\sigma\cos^2\alpha \tag{2-2}$$

$$\tau_\alpha=\frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha \tag{2-3}$$

式中，σ为横截面上正应力；α为斜截面的方位角，定义为斜截面的外法线n与杆轴线x之间的夹角，并规定以轴线x为始边、外法线n为终边，逆时针转向的α角为正，反之为负。

3. 拉（压）杆轴向变形计算公式·胡克定律

$$\Delta l=\frac{F_N l}{EA} \tag{2-4}$$

或者

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E} \tag{2-5}$$

式中，F_N为轴力；l为杆件原始长度；A为杆件横截面面积；E为材料弹性模量。

胡克定律的适用范围：单向拉伸（压缩）；线弹性，即$\sigma\leqslant\sigma_p$。

4. 轴向拉（压）杆的强度条件

$$\sigma=\frac{F_N}{A}\leqslant[\sigma] \tag{2-6}$$

式中，$[\sigma]$为材料的许用应力。

解题方法

本章习题的主要类型有下列三种：

一、拉（压）杆的强度计算

根据式（2-6）进行轴向拉（压）杆的强度计算。

强度计算有以下三类问题：

1. 校核强度

已知杆件所受外力、横截面面积和材料许用应力，检验强度条件是否满足。

2. 截面设计

已知杆件所受外力和材料许用应力，根据强度条件确定杆件横截面尺寸。

3. 确定许可载荷

已知杆件横截面面积和材料许用应力，根据强度条件确定杆件容许承受的载荷。

在根据式（2-6）进行拉（压）杆强度计算时，应特别注意以下两点：

1. 式中的 F_{N} 为拉（压）杆横截面上的轴力，应根据截面法由平衡方程确定。

2. 应综合根据拉（压）杆的轴力图和其截面的削弱情况来判断危险截面，并对可能的危险截面逐一进行强度计算。

二、拉（压）杆的轴向变形计算

根据式（2-4）计算拉（压）杆的轴向变形。

在计算拉（压）杆的轴向变形时，应注意以下几点：

1. 若拉（压）杆的轴力、横截面面积或弹性模量沿杆的轴线为分段常数，则应分段运用式（2-4），然后代数相加，即有

$$\Delta l=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{F_{\mathrm{N}}l}{EA}\right)_i \tag{2-7}$$

2. 若拉（压）杆的轴力、横截面面积沿杆的轴线为连续函数，则应根据积分元素法，化变为常，先在微段 $\mathrm{d}x$ 上运用式（2-4），然后积分，即有

$$\Delta l=\int_l \frac{F_{\mathrm{N}}(x)}{EA(x)}\mathrm{d}x \tag{2-8}$$

3. 计算中要考虑轴力 F_{N} 的正负号。若最终结果 Δl 为正，则表明杆件伸长；若 Δl 为负，则表明杆件缩短。

三、求解简单拉伸（压缩）超静定问题

运用变形比较法求解简单拉伸（压缩）超静定问题的基本步骤为：

1. 画受力图，列平衡方程；

2. 画变形图，建立变形协调方程；

3. 通过物理关系，将变形协调方程改写为关于未知力的补充方程；

4. 联立补充方程和平衡方程，求解未知力。

求解拉伸（压缩）超静定问题的关键在于变形协调方程的建立。在建立变形协调方程时，一定要作出结构的变形图，并注意利用小变形假设，“以切线代弧线”、“以直代曲”，使问题得到简化。

难题解析

【例题 2-1】 组合结构如图 2-1 所示，竖向载荷 F 可沿水平横梁 AC 和 CB 移动。已知 $a=0.8\,\text{m}$，$l=2\,\text{m}$；杆 1、3、5 均为直径 $d=32\,\text{mm}$ 的圆钢，其许用应力 $[\sigma]=160\,\text{MPa}$。若横梁 AC、CB 与压杆 2、4 足够坚固，试根据拉杆 1、3、5 的强度确定许可载荷 $[F]$。

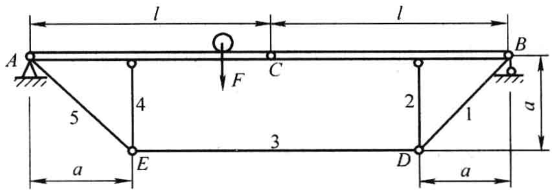

图　2-1

解：（1）判断载荷 F 的危险位置

分别截取不受载荷 F 作用的右半部分与节点 D 为研究对象（见图 2-2），不难判断，支座反力 F_B 越大，杆 1、2、3 的轴力就越大。故知，当竖向载荷 F 作用于中央铰链 C 上时，拉杆 1、3、5 最危险。

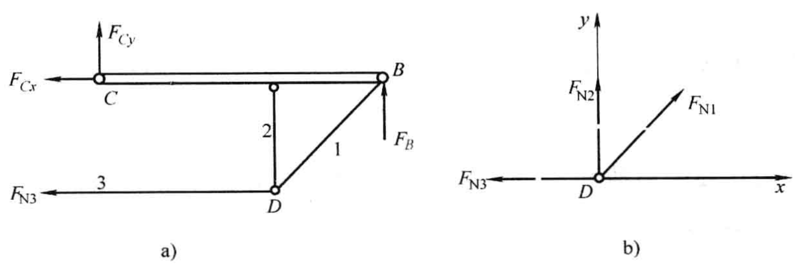

图　2-2

（2）计算轴力

当 F 作用于铰链 C 上时，

$$F_B=\frac{F}{2}$$

根据图 2-2a，由平衡方程 $\sum M_C=0$，得

$$F_{N3}=1.25F \text{ （拉）}$$

根据图 2-2b，由平衡方程 $\sum F_x=0$，得

$$F_{N1}=\sqrt{2}F_{N3}=1.768F \text{ （拉）}$$

再截取节点 E 为研究对象，易知

$$F_{N5}=F_{N1}=1.768F \text{ （拉）}$$

（3）确定许可载荷

显然，应根据杆 1（5）的强度确定许可载荷，由

$$\sigma_1=\frac{F_{N1}}{\frac{\pi d^2}{4}}=\frac{4\times1.768F}{\pi\times32^2\times10^{-6}\ \mathrm{m}^2}\leqslant160\times10^6\ \mathrm{Pa}$$

解得

$$F\leqslant72.8\times10^3\ \mathrm{N}=72.8\ \mathrm{kN}$$

所以，许可载荷

$$[F]=72.8\ \mathrm{kN}$$

【例题 2-2】　图 2-3a 所示为埋入土中深度为 l 的一根等截面木桩，在顶部承受轴向载荷 F 的作用。假设载荷 F 完全是由沿着木桩分布的摩擦力 F_f 所平衡，F_f 按图 2-3b 所示二次抛物线规律变化。已知木桩的抗拉（压）刚度为 EA，试确定该木桩埋入部分的总缩短量（要求用 F、l、EA 表示）。

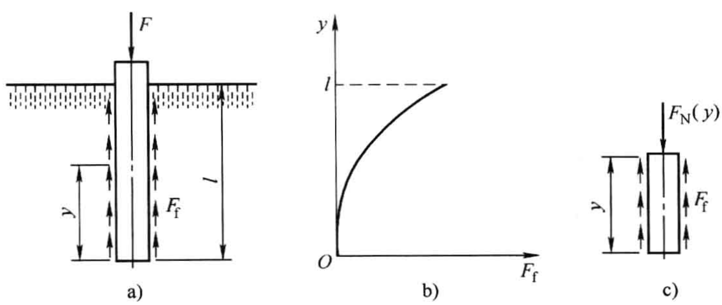

图　2-3

解：（1）计算摩擦力

摩擦力分布规律

$$F_f=ky^2$$

由平衡方程

$$F=\int_0^l F_f\mathrm{d}y=\int_0^l ky^2\mathrm{d}y$$

得

$$k=3\frac{F}{l^3}$$

（2）计算轴力

由截面法，得木桩任一截面轴力（见图 2-3c）

$$F_N(y)=\int_0^y F_f\mathrm{d}y=\int_0^y ky^2\mathrm{d}y=\frac{1}{3}ky^3=\frac{y^3}{l^3}F$$

（3）计算轴向变形

由式（2-8），得木桩埋入部分的总缩短量

$$\Delta l=\int_0^l\frac{F_N(y)}{EA}\mathrm{d}y=\int_0^l\frac{F}{EAl^3}y^3\mathrm{d}y=\frac{Fl}{4EA}$$

【例题 2-3】　三杆构架如图 2-4a 所示，已知载荷 $F=40$ kN；三杆的横截面面积分别为 $A_1=200\ \mathrm{mm}^2$，$A_2=300\ \mathrm{mm}^2$，$A_3=400\ \mathrm{mm}^2$；各杆材料相同，弹性模量 $E=200$ GPa。试求各杆轴力。

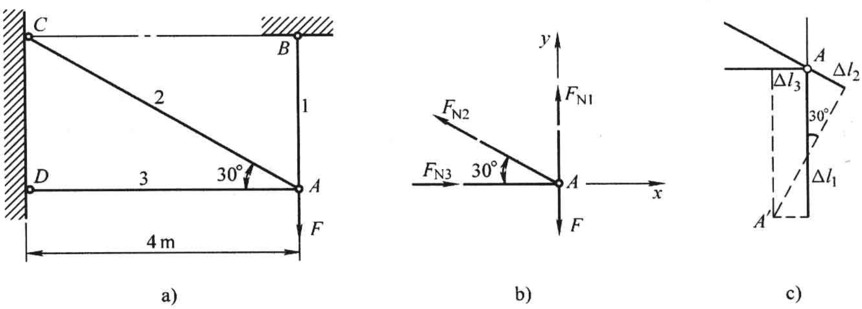

图　2-4

解：（1）列平衡方程

截取节点 A 为研究对象（见图 2-4b），设杆 1、2 受拉，杆 3 受压，列平衡方程

$$\sum F_x=0,\quad F_{N3}-F_{N2}\cos 30°=0 \tag{a}$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{N1}+F_{N2}\sin 30°-F=0 \tag{b}$$

这是一次超静定问题。

（2）建立变形协调方程

根据小变形假设，采用“以直代曲”的方法来建立变形协调方程。先设想解除节点 A 处约束，各杆将沿轴线自由伸缩，然后在各杆变形后的终点作其轴

线的垂线，由于约束的限制，这些垂线必然相交于一点，其交点 A' 即为节点 A 的新位置。由图 2-4c 所示变形图可得变形协调方程

$$\Delta l_1=\frac{\Delta l_2}{\sin 30^\circ}+\frac{|\Delta l_3|}{\tan 30^\circ}$$

（3）建立补充方程

借助胡克定律，由变形协调方程即得关于未知轴力的补充方程

$$\frac{F_{N1}l_1}{A_1}=\frac{F_{N2}l_2}{A_2\sin 30^\circ}+\frac{F_{N3}l_3}{A_3\tan 30^\circ} \tag{c}$$

（4）求解各杆轴力

联立方程（a）、（b）、（c），代入有关数据，解得各杆轴力依次为

$F_{N1}=35.5\ \text{kN}$（拉），　$F_{N2}=8.96\ \text{kN}$（拉），　$F_{N3}=7.76\ \text{kN}$（压）

【例题 2-4】　图 2-5a 所示结构，已知杆件材料的弹性模量 $E=200\ \text{GPa}$，线胀系数 $\alpha=12.5\times10^{-6}\ ℃^{-1}$；两杆的横截面面积同为 $A=10\ \text{cm}^2$。若杆 1 的温度降低 20 ℃，杆 2 的温度没有变化，试求两杆横截面上的温度应力。

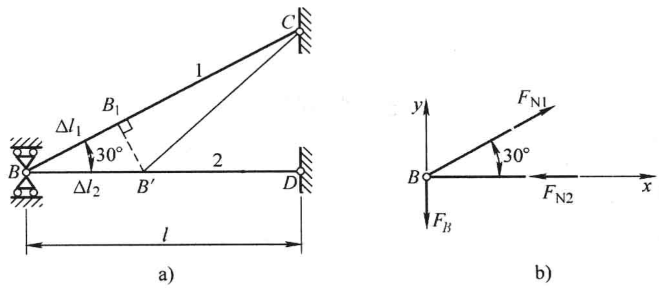

图　2-5

解：（1）列平衡方程

截取节点 B 为研究对象（见图 2-5b），杆 1 受拉，杆 2 受压，其有效平衡方程为

$$\sum F_x=0,\quad F_{N1}\cos 30^\circ-F_{N2}=0 \tag{a}$$

这是一次超静定问题。

（2）建立变形协调方程

设想解除节点 B 处约束，杆 1 沿轴线缩短 Δl_1 至 B_1，由 B_1 作杆 1 轴线的垂线，交杆 2 轴线于 B'，点 B' 即为节点 B 的新位置。由图 2-5a 所示变形图可得变形协调方程

$$|\Delta l_1|=|\Delta l_2|\cos 30^\circ$$

（3）建立补充方程

由物理关系知，杆 1、杆 2 的变形量分别为

$$|\Delta l_1|=\alpha l|\Delta T|-\frac{F_{N1}l_1}{EA}$$

$$|\Delta l_2|=\frac{F_{N2}l_2}{EA}$$

代入变形协调方程，即得关于未知轴力的补充方程

$$\alpha l|\Delta T|-\frac{F_{N1}l_1}{EA}=\frac{F_{N2}l_2}{EA}\cos 30° \tag{b}$$

（4）求解各杆轴力

联立方程（a）、（b），代入有关数据，解得杆1、杆2轴力分别为

$$F_{N1}=30.3\ \text{kN}\ （拉），\quad F_{N2}=26.2\ \text{kN}\ （压）$$

（5）计算温度应力

杆1、杆2横截面上的温度应力分别为

$$\sigma_1=\frac{F_{N1}}{A}=\frac{30.3\times10^3\ \text{N}}{10\times10^{-4}\ \text{m}^2}=30.3\ \text{MPa}\ （拉）$$

$$\sigma_2=\frac{F_{N2}}{A}=\frac{26.2\times10^3\ \text{N}}{10\times10^{-4}\ \text{m}^2}=26.2\ \text{MPa}\ （压）$$

习题解答

习题 2-1 （略）

习题 2-2 试计算如图2-6所示结构中 BC 杆的轴力。

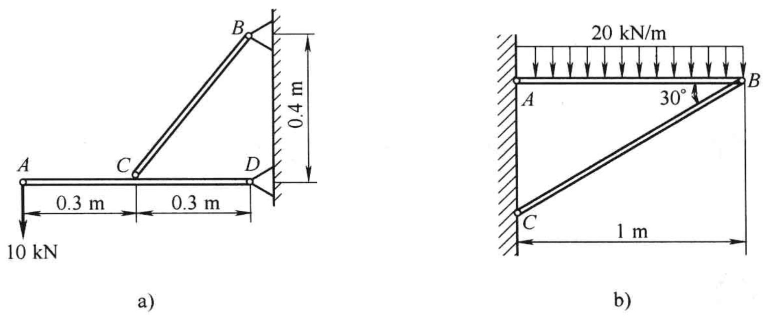

图 2-6

解：（a）截取图示研究对象并作受力图（见图2-7a），由平衡方程得 BC 杆的轴力

$$F_N=25\ \text{kN}\ （拉）$$

（b）截取图示研究对象并作受力图（见图2-7b），由平衡方程得 BC 杆的轴力