李美生 魏光美 冯伟杰 王进良 编著

下

高等数学习题课教材

清华大学出版社

http://www.tup.com.cn

高等数学习题课教材

下

李美生
魏光美
冯伟杰
王进良
编著

清华大学出版社
北京

内容简介

《高等数学习题课教材》分上、下两册，可以作为高等数学课程的辅助教材在本科教学中应用.本书习题经过精心筛选，配题全面，类型丰富，层次分明，由浅入深，既能学习巩固又能拓展扩充基础知识，有利于各种水平学生进行选择性练习，尤其适合优秀学生进行全方位练习.

本书所有习题配备了答案，对典型的题目给出了详细解答，以方便学生自学.书末还附有期中和期末考试模拟试题及解答.希望读者能通过反复多次的训练，达到熟能生巧的目的，为高等数学课程学习和数学竞赛打下坚实的基础.

本书可供高等学校理工科非数学专业的本科生使用，也可作为大学生数学竞赛的辅导教材使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题课教材.下/李美生等编著.--北京：清华大学出版社，2013.3
ISBN 978-7-302-31282-6

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①李…　Ⅲ.①高等数学－高等学校－教学参考资料　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 008243 号

责任编辑：佟丽霞　赵从棉
封面设计：常雪影
责任校对：赵丽敏
责任印制：沈　露

出版发行：清华大学出版社
网　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　编**：100084
社总机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质　量　反　馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京富博印刷有限公司
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经　销：全国新华书店
开　本：170mm×230mm　**印　张**：11.75　**字　数**：210 千字
版　次：2013 年 3 月第 1 版　**印　次**：2013 年 3 月第1 次印刷
印　数：1～4000
定　价：21.00 元

产品编号：047505-01

前　言

2003年北京航空航天大学高等数学课程获得北京市精品课程建设立项，由此，我们的课程建设工作进入了一个新的阶段. 作为总结、继承、改革和发展的一个重要标志，我们组织编写了高等数学教材和这套《高等数学习题课教材》，以适应新形势、新目标下对教学的要求，更好地为后续课程提供必要的理论基础和知识准备.

2008年北京航空航天大学高等数学课程再获批进行国家精品课建设，我们对教学过程进一步优化，部分成果就固化在本套习题课教材中. 经过这几年在本校本科教学中的应用，已经证明了这套教材所配的习题对相当层次的学校和学生都是适用的. 本书的目的在于使课堂教学和课后训练有机配合，让学生接受严格而充分的练习，从而达到学好数学的两个基本要求——理解与熟练. 近年来，北航的学生连续在北京市乃至全国数学竞赛中取得了优异成绩，这也从一个侧面反映了这套教材在大班课的辅助教学中的成功.

本书是作者在多年教学和辅导过程中经过总结、精选、反复斟酌后才编写完成的. 书中习题覆盖面广，类型丰富，重点突出，层次分明，难易兼顾. 从易到难被分为三类：第一类题是有关内容的基本概念、重要定理和常用方法，它们被置于每章相应小节中，难度适中；第二类题有一定的技巧性和综合性，是对课程内容的巩固、补充和拓展；第三类题带有较高的难度，具有一定的挑战性. 其中第二、三类题被安排在每章的自测题中，第三类题被标以“*”号. 因此每章的自测题是本书重要的部分. 另外，每章最后一节都会提出若干启发读者思考的问题，能突出并深化本章关键的内容、核心的概念等. 本书所有习题都配备了答案，对典型的题目给出了详细解答，以方

便读者自学检查.最后,书末还附有期中和期末考试模拟试题、数学竞赛真题及解答.希望读者能进行选择性或全方位练习,通过反复多次的训练,达到深刻理解概念、定理和方法的目的,为高等数学课程学习和数学竞赛打下坚实的基础.

本书在编写过程中,得到北航高等数学课程组全体老师们的支持和帮助,他们在本科教学中多次使用并提出了许多宝贵的修改意见,特此表示感谢!在此基础上,作者进行多次调整和改写,并加以分类整合,依照教学上由浅入深的原则进行组织与汇编.上册内容由冯伟杰老师修改并统稿,下册内容由李美生老师修改并统稿.本书是针对高等数学课程知识和非数学专业的数学竞赛而编写的,可供高等学校理工科非数学专业的本科生使用,也可作为大学生数学竞赛的辅导教材使用.

书中的习题有一些是作者原创的,有些是摘自其他一些参考资料.虽然本书的作者长期主讲本课程,并具备丰富的大学生数学竞赛辅导经验,但是不妥和错误之处在所难免,真诚地希望有关专家、读者给予批评指正,以便总结经验,不断改进和提高.

作 者

2012.6

目　录

空间解析几何与向量代数

第 8 章

8.1 向量代数

一、填空题

1. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是两两垂直的单位向量，且 $\boldsymbol{p}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}$，其中 α,β,γ 是常数，则 $|\boldsymbol{p}|=$________.

2. 向量 $\boldsymbol{a}=\{4,-3,4\}$ 在向量 $\boldsymbol{b}=\{2,2,1\}$ 上的投影为________.

3. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 两两垂直，且 $|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=2,|\boldsymbol{c}|=3$，则 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角是________.

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角 $\varphi=120°,|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=5$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$________.

5. 设 $\boldsymbol{a}=\{1,2,\lambda\},\boldsymbol{b}=\{2\lambda,1,1\}$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\lambda=$________.

6. $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 的几何意义是________.

7. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，其中 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，又 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{6}$，$|\boldsymbol{a}|=6,|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=3$，则 $|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|=$________.

8. 三棱锥的四个顶点是 $A(1,1,1),B(5,4,-1),C(2,3,5),D(6,0,-3)$，则它的体积为________.

9. 空间四个点 $A(1,0,1),B(4,4,6),C(2,2,3),D(10,14,17)$ 是否在同一个平面上？________.

10. 设 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$，则 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=$________.

二、选择题

1. 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 相互平行，但方向相反，则当 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|>0$ 时必有________.

(A) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$；　(B) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$；

(C) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$；　(D) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角是 $\frac{\pi}{4}$，且 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$________.

(A) 1；　(B) $1+\sqrt{2}$；　(C) 2；　(D) $\sqrt{5}$.

3. 已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则必有________.

(A) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；　(B) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；

(C) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；　(D) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

4. 设三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足关系式 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$________.

(A) $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$；　(B) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$；　(C) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$；　(D) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

5. 已知平行四边形的四个顶点 A,B,C,D，点 D 是与点 B 相对的点，O 是坐标原点，记 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA},\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB},\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，则 $\overrightarrow{OD}$ 为________.

(A) $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$；　(B) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$；　(C) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$；　(D) $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模分别为 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=$________.

(A) 2；　(B) $2\sqrt{2}$；　(C) 1；　(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. 设向量 $\boldsymbol{d}$ 与三个坐标面 xOy，yOz，zOx 的夹角分别为 α，β，$\gamma\left(0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=$________.

(A) 0；　(B) 1；　(C) 2；　(D) 3.

8. 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，则垂直于 $\boldsymbol{a}$ 又垂直于 y 轴的单位向量为________.

(A) $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$；　(B) $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$；

(C) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k})$；　(D) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})$.

9. 已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})$，$(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之间的夹角为________.

(A) $\frac{\pi}{6}$；　(B) $\frac{\pi}{3}$；　(C) $\frac{\pi}{2}$；　(D) $\frac{2\pi}{3}$.

10. 已知梯形 $OABC$，$\overrightarrow{CB}\parallel\overrightarrow{OA}$，$|\overrightarrow{CB}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|$，若 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AB}=$________.

(A) $\dfrac{\boldsymbol{a}}{2}-\boldsymbol{b}$;　　(B) $\boldsymbol{a}-\dfrac{\boldsymbol{b}}{2}$;　　(C) $\dfrac{\boldsymbol{a}}{2}+\boldsymbol{b}$;　　(D) $\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{a}}{2}$.

三、解答题

1. 从点 $A(2,-1,7)$沿向量 $\boldsymbol{a}=\{8,9,-12\}$的方向取线段$|AB|=34$,求点 B 的坐标.

2. 一直线过点 $B(1,2,3)$,平行于向量 $\boldsymbol{a}=\{6,6,7\}$,求点 $A(3,4,2)$到此直线的距离 d.

3. 一直线通过点 $B(-2,1,3)$和点 $C(0,-1,2)$,求点 $A(10,5,10)$到此直线的距离 d.

4. 已知三角形的一个顶点 $A(2,-5,3)$及两边的向量$\overrightarrow{AB}=\{4,1,2\}$和$\overrightarrow{BC}=\{3,-2,5\}$,求其余的顶点以及向量$\overrightarrow{CA}$和$\angle A$.

5. 已知$|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=5$,$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{2\pi}{3}$,问系数 λ 为何值时,向量 $\lambda\boldsymbol{a}+17\boldsymbol{b}$ 与 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 垂直?

6. 已知单位向量$\overrightarrow{OA}$与三个坐标轴的夹角相等,点 B 是点$M(1,-3,2)$关于 $N(-1,2,1)$的对称点,求$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$.

7. 三角形的三个顶点是 $A(3,4,-1)$,$B(2,0,3)$,$C(-3,5,4)$,求该三角形的面积.

8. 判断下列四点是否共面:

(1) $M_1(2,3,0)$,$M_2(-2,-3,4)$,$M_3(0,6,0)$,$M_4(2,0,1)$;

(2) $M_1(1,1,-1)$,$M_2(-2,-2,2)$,$M_3(1,-1,2)$,$M_4(2,2,2)$.

9. 设四面体以点 $O(0,0,0)$,$A(5,2,0)$,$B(2,5,0)$,$C(1,2,4)$为其顶点,求它的体积,并计算$\triangle ABC$ 的面积和由点 O 引向该面的高.

10. 单位圆的圆周上有相异的两点 P 和 Q,向量$\overrightarrow{OP}$与$\overrightarrow{OQ}$的夹角为$\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$,设 a,b 为正常数,求极限$\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{1}{\theta^2}[|a\overrightarrow{OP}|+|b\overrightarrow{OQ}|-|a\overrightarrow{OP}+b\overrightarrow{OQ}|]$.

四、证明题

1. 设一直线通过点 $A(a,b,c)$且平行于向量 $\boldsymbol{s}$,证明点 $M(x_0,y_0,z_0)$到该直线的距离为 $d=\dfrac{|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$,其中 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{AM}$.

2. 设非零向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 中的任意两个向量不共线,而 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线,$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线,证明:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

3. 已知三点 A,B,C 的向径分别为 $\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{r}_2=3\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{r}_3=4\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}$,证明:$A$,$B$,$C$ 三点共线.

4. 试证向量 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{c}=-3\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$ 在同一

平面上，并沿 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 分解 $\boldsymbol{c}$.

5. 求证：$2\boldsymbol{p}+3\boldsymbol{q},3\boldsymbol{q}-5\boldsymbol{r},2\boldsymbol{p}+5\boldsymbol{r}$ 必共面.

6. 已知 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$ 是 xOy 平面上的三点，试用向量的方法证明：$\triangle ABC$ 的面积为 $S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$，其中出现的 $\pm$ 号是为了保证面积大于零.

8.2　空间解析几何

一、填空题

1. 已知直线 L 过点 $M(0,-3,-2)$ 且与两条直线 L_1：$\frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{1}$，$L_2$：$\begin{cases} x=-1+2t, \\ y=5-4t, \\ z=2+3t \end{cases}$ 都垂直，则直线 L 的方程是________.

2. 直线 $\frac{x}{1}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-3}{-1}$ 上与点(3,2,6)的距离最近的点是________.

3. 直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases}$ 和直线 $\begin{cases} x+2y-z-2=0, \\ x+2y+2z+4=0 \end{cases}$ 间的最短距离是________.

4. 曲线 $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \\ z=bt \end{cases}$ 在 xOy 坐标面上的投影曲线是________.

5. 过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases} x=-t+2, \\ y=3t-4, \\ z=t-1 \end{cases}$ 垂直的平面是________.

6. 已知直线 L_1：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1}$，$L_2$：$\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$，则过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程为________.

7. 已知直线 L：$\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases}$ 及平面 Π：$4x-y+z-2=0$，则直线 L 与平面 Π 的位置关系是________.

8. 在由平面 $2x+y-3z+2=0$ 和平面 $5x+5y-4z+3=0$ 所决定的平面

束内，有两个相互垂直的平面，其中一个平面经过点(4，−3，1)，这两个平面的方程分别是________.

9. 以曲线$\begin{cases}f(y,z)=0,\\x=0\end{cases}$为母线，以 z 轴为旋转轴的旋转曲面的方程为________.

10. 方程$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1,\\y=2\end{cases}$在空间 $Oxyz$ 中的图形是________.

二、选择题

1. 设空间两直线 L_1：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}$，$L_2$：$x+1=y-1=z$ 相交于一点，则 $\lambda=$________.

(A) 1；　(B) 0；　(C) $\dfrac{5}{4}$；　(D) $-\dfrac{5}{3}$.

2. 空间三直线

$$L_1:\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-5}=\frac{z}{3},\quad L_2:\begin{cases}x=3t,\\y=-1+3t,\\z=2+7t,\end{cases}\quad L_3:\begin{cases}x+2y-z+1=0,\\2x+y-z=0,\end{cases}$$

则必有________.

(A) $L_1 /\!/ L_3$；　(B) $L_1 /\!/ L_2$；

(C) $L_2 \perp L_3$；　(D) $L_1 \perp L_2$.

3. 空间直线 L_1：$\begin{cases}4x+y+3z=0,\\2x+3y+2z=9\end{cases}$与 L_2：$\begin{cases}3x-2y+z=-5,\\x-3y-2z=3\end{cases}$的位置关系为________.

(A) 平行不重合；　(B) 相交于一点；

(C) 重合；　(D) 异面.

4. 过点(0，2，4)且与平面 $x+2z=1$ 及 $y-3z=2$ 都平行的直线是________.

(A) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-4}{2}$；　(B) $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-4}{-3}$；

(C) $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{1}$；　(D) $-2x+3(y-2)+z-4=0$.

5. 曲线$\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{5}=1,\\x-2z+3=0\end{cases}$在 xOy 坐标面上的投影柱面是________.

(A) $x^2+20y^2-24x-116=0$；　　(B) $20y^2+4z^2-60z-35=0$；

(C) $\begin{cases}x^2+20y^2-24x-116=0,\\ z=0;\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}20y^2+4z^2-60z-35=0,\\ x=0.\end{cases}$

三、解答题

1. 已知三点 $A(-5,-11,3)$，$B(7,10,-6)$，$C(1,6,-2)$，求一平面平行于$\triangle ABC$所在的平面且与它的距离等于 2.

2. 求点$(3,-1,-1)$在平面 $x+2y+3z-26=0$ 上的投影点.

3. 求点 $P(0,1,1)$在平面 $x+y+z=0$ 上的对称点.

4. 试在平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所构成的四面体内求一点，使之与四面体各面的距离相等，并求内切于四面体的球面方程.

5. 求直线$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$在平面 $x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 l 的方程，并求 l 绕 y 轴旋转一周而得到的曲面方程.

6. 求过直线$\begin{cases}x-z+4=0,\\ x+5y+z=0\end{cases}$且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 的夹角为$\dfrac{\pi}{4}$的平面方程.

7. 求一平面，使其垂直于平面 $z=0$，且通过点 $P(1,-1,1)$到直线 l：$\begin{cases}x=0,\\ y-z=-1\end{cases}$的垂线.

8. (1) 求点 $P(0,-1,1)$到直线 l：$\begin{cases}y+2=0,\\ x+2z-7=0\end{cases}$的距离；

(2) 求过点 $P(0,-1,1)$且与直线 l 垂直相交的直线方程.

9. 设直线 l_1 在三点 $P_0(0,0,0)$，$P_1(2,2,0)$，$P_2(0,1,-2)$所确定的平面上，且与直线 l_2：$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=2z$ 垂直相交，求直线 l_1 的方程.

10. 求与直线 l_1：$\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z}{1}$及直线 l_2：$\dfrac{x-10}{5}=\dfrac{y+7}{4}=\dfrac{z}{1}$相交，且与直线 l_3：$\dfrac{x+2}{8}=\dfrac{y-1}{7}=\dfrac{z-3}{1}$平行的直线方程.

四、证明题

1. 证明直线 l_1：$\begin{cases}y=2x,\\ z=x+1\end{cases}$与直线 l_2：$\begin{cases}y=x+3,\\ z=x\end{cases}$异面，并求出公垂线 l 的方程.

2. 设$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0$，证明直线 l_1：$\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_1-b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_1-c_2}$与直线 l_2：

$\frac{x-a_1}{a_3-a_2}=\frac{y-b_1}{b_3-b_2}=\frac{z-c_1}{c_3-c_2}$相交于一点.

8.3 自测题

一、填空题

1. 已知$|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=26,|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=72$,则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________.

2. 过点$(-1,0,4)$,平行于平面$3x-4y+z-10=0$,且与直线$x+1=y-3=\frac{z}{2}$相交的直线方程为________.

3. 设一平面过原点和点$(6,-3,2)$,且与平面$4x-y+2z-8=0$垂直,则此平面方程为________.

4. 动点到两定点$P(c,0,0)$,$Q(-c,0,0)$的距离之和为$2a(a>c>0)$,则动点的轨迹方程为________.

5. 曲线L: $z=x^2+2y^2$, $z=2-x^2$关于xOy平面的投影柱面方程是________.

二、选择题

1. 已知单位向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$满足$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=$________.

(A) $-3/2$;　(B) -1;　(C) 1;　(D) $3/2$.

2. 已知向量$\boldsymbol{a}$的终点坐标是$(2,-1,0)$,模$|\boldsymbol{a}|=14$,其方向与向量$\{-2,3,6\}$同向,则向量$\boldsymbol{a}$的起点坐标是________.

(A) $(-6,7,12)$;　(B) $(6,-7,-12)$;

(C) $(6,7,-12)$;　(D) $(6,-7,12)$.

3. 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为三个任意向量,则下列等式正确的是________.

(A) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;　(B) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$;

(C) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$;　(D) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

4. 平面$x-y+z+5=0$和$5x-8y+4z+36=0$确定的直线的对称式方程为________.

(A) $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+1}{-3}$;　(B) $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-1}{3}$;

(C) $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+1}{-3}$;　(D) $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-1}{-3}$.

5. 两平行平面$19x-4y+8z+21=0$和$19x-4y+8z+42=0$之间的距

离为________.

(A) 1;　　(B) 1/2;　　(C) 2;　　(D) 21.

三、计算题

1. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两非零向量，且 $|\boldsymbol{b}|=1$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{x}$.

2. 已知向量 $\overrightarrow{AB}=\{-3,0,4\}$，$\overrightarrow{AC}=\{5,-2,-14\}$，试求 $\angle BAC$ 角平分线上的单位向量.

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\{1,1,4\}$ 及平面方程 $x-2y+2z-3=0$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 在平面法线向量 $\boldsymbol{n}$ 上的投影和投影向量.

4. 求过点 $M_0(1,1,1)$ 且与直线 $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-3}$ 垂直相交的直线的方程.

5. 求通过平面 π_1：$3x+y-z-5=0$ 与直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$ 的交点，且与平面 π_2：$3x-y+z-5=0$ 垂直的直线的方程.

6. 直线 L 过点 $P(-3,5,-9)$ 且与直线 L_1：$\begin{cases}y=4x-7,\\z=5x+10\end{cases}$ 及 L_2：$x=\frac{y-5}{3}=\frac{z+3}{2}$ 都相交，求直线 L 的方程.

7. 已知直线 L 为两个平面 $x+5y+7z-3=0$ 和 $x-2y+3z-6=0$ 的交线，求直线 L 在各坐标面上的投影线方程.

8. 两个平面的方程分别为 π_1：$2x-y+z-7=0$ 和 π_2：$x+y+2z-11=0$.

(1) 求两个平面的夹角；

(2) 求两个平面的角平分面的方程；

(3) 求通过点 $M_0(1,-1,1)$ 与两个平面 π_1 和 π_2 交线平行，且与平面 π_2 垂直的平面方程.

9. 求过直线 $\frac{x-3}{11}=\frac{y+2}{-7}=\frac{z-2}{5}$ 的两个垂直平面方程，其中一个平面通过点 $(4,-3,1)$.

10. 求点 $M_0(2,3,1)$ 在直线 $x=-1+t$，$y=-2+2t$，$z=-2+3t$ 上投影点的坐标.

11. 求 $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{6}$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面的方程.

*12. 求 $\sqrt{x^2+y^2-2x-4y+9}+\sqrt{x^2+y^2-6x+2y+11}$ 的最小值.

13. 已知点 $P(1,0,-1)$ 与 $Q(3,2,1)$，在平面 $x-2y+z=12$ 上求一点 M 使得 $|PM|+|MQ|$ 最小.

*14. 光线沿直线 $\begin{cases} x+y=3, \\ x+z=1 \end{cases}$ 投影到平面 $x+y+z+1=0$ 上，求反射线所在的直线方程.

*15. 一柱面的准线为曲线 L：$\begin{cases} x^2+y^2=R^2, \\ z=0, \end{cases}$ 母线平行于向量 $\boldsymbol{a}=\{1,1,1,\}$，求该柱面方程.

四、证明题

1. 直线 l_1 过点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，其方向向量为 $\boldsymbol{s}_1$，而直线 l_2 过点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，其方向向量为 $\boldsymbol{s}_2$，且 l_1 和 l_2 不平行. 试证明直线 l_1 和 l_2 之间的最短距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)|}{|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|}.$$

2. 两平行平面与任意第三个平面的交线互相平行.

*3. 三个平面：$x=cy+bz,y=az+cx,z=bx+ay$ 经过同一条直线的充要条件是

$$a^2+b^2+c^2+2abc=1.$$

8.4 思考题

1. 在空间直角坐标系中，空间的点是如何与数建立联系的？它有什么意义？

2. 空间的向量是如何用数来表示的？它有什么意义？

3. 在向量的数量积、向量积运算中，消去律是否成立？

4. 判定向量平行、垂直、共面的条件是什么？

5. 平面方程有哪几种形式？如何判断平面之间的关系？

6. 直线方程有哪几种形式？如何判断直线之间的关系以及平面和直线之间的关系？

本章答案与提示

8.1　向量代数

一、填空题

1. $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$；　2. 2；　3. $\arccos\frac{3}{\sqrt{14}}$；

4. $\sqrt{19}$；　5. $-\frac{2}{3}$；

6. 以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为相邻边的平行四边形的面积；　7. 27；

8. 13；　9. 是；　10. 4.

二、选择题

1. (A)；　2. (D)；　3. (C)；　4. (B)；　5. (B)；

6. (A)；　7. (B)；　8. (C)；　9. (B)；　10. (D).

三、解答题

1. $B(18,17,-17)$；　2. $d=\frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$；　3. $d=10\sqrt{2}$；

4. $B(6,-4,5),C(9,-6,10),\overrightarrow{CA}=\{-7,1,-7\},\angle A=\arccos\frac{41}{3\sqrt{231}}$；

5. $\lambda=40$；　6. $B(-3,7,0),\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\frac{1}{\sqrt{3}}\{-7,-3,10\}$；

7. $\frac{\sqrt{1562}}{2}$；　8. (1) 共面；　(2) 不共面；

9. $V_{OABC}=\frac{42}{3}$；　$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=6\sqrt{3}$，　$h=\frac{7}{6\sqrt{3}}$；

10. $\frac{ab}{2(a+b)}$，　提示：设 $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$Q(\cos(\alpha+\theta),\sin(\alpha+\theta))$，则

$$a\overrightarrow{OP}+b\overrightarrow{OQ}=\{a\cos\alpha+b\cos(\alpha+\theta),a\sin\alpha+b\sin(\alpha+\theta)\},$$

$$\begin{aligned}|a\overrightarrow{OP}+b\overrightarrow{OQ}|&=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}\\&=\lim_{\theta\to0}\frac{1}{\theta^2}[|a\overrightarrow{OP}|+b|\overrightarrow{OQ}|-|a\overrightarrow{OP}+b\overrightarrow{OQ}|]\\&=\lim_{\theta\to0}\frac{1}{\theta^2}[a+b-\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}]=\frac{ab}{2(a+b)}.\end{aligned}$$