普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

化生地类

上册

赵奎奇 主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

（化生地类）上册

主　编　赵奎奇

副主编　方艳溪　张绍康

程　洁　熊绍武

参　编　李绍林　李素云

陈　静　廖玉怀

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是云南省部分高校本科教育质量工程建设成果，分上、下两册，共计 12 章. 本书为上册，主要内容包括函数、极限与函数的连续性、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程.

本书可作为普通高等学校的化学与化工学、生物学与生命科学、地理学与旅游学、医学与环境科学等专业的“高等数学”课程教材，也可以作为高等院校相关专业读者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：化生地类．上册/赵奎奇主编. —北京：科学出版社，2012
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-035272-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①赵… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 184420 号

责任编辑：胡云志 任俊红 唐保军 / 责任校对：宋玲玲
责任印制：闫 磊 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 8 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2012 年 8 月第一次印刷 印张：12
字数：232 000

定价：24.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序　　言

当今中国高等教育已从传统的精英教育发展到现代大众教育阶段．高等学校一方面要尽可能满足民众接受高等教育的需求，另一方面要努力培养适应社会和经济发展的合格人才，这就导致大学的人才培养规模与专业类型发生了革命性的变化，教学内容改革势在必行．高等数学课程是大学的重要基础课，是大学生科学修养和专业学习的必修课．编写出具有时代特征的高等数学教材是数学教育工作者的一项光荣使命．

科学出版社“十二五”教材出版规划的指导原则与云南省大部分高校的高等数学课程改革思路不谋而合，因此我们组织了云南省具有代表性的十所高校的数学系骨干教师组成项目专家组，共同策划编写了新的系列教材，并列入科学出版社普通高等教育“十二五”规划教材出版项目．本系列教材以大众化教育为前提，以各专业的发展对数学内容的需要为准则，分别按理工类、经管类和化生地类编写，第一批出版的有高等数学（理工类）、高等数学（经管类）、高等数学（化生地类）、概率论与数理统计（理工类）、线性代数（理工类），以及可供各类专业选用的数学实验教材．教材的特点是，在不失数学课程逻辑严谨的前提下，加强了针对性和实用性．

参加教材编写的教师都是在教学一线有长期教学经验积累的骨干教师．教材的第一稿已通过一届学生的试用，在征求使用本教材师生意见和建议的基础上作了进一步的修改，并通过项目专家组的审查，最后由科学出版社统一出版．在此对试用本教材的师生、项目专家组以及科学出版社表示衷心感谢．

高等教育改革无止境，教学内容改革无禁区，教材编写无终点．让我们共同努力，继续编出符合科学发展、顺应时代潮流的高质量教材，为高等数学教育做出应有的贡献．

郭　震

2012 年 8 月 1 日于昆明

前　　言

“高等数学”是当今大学大多数专业的公共必修课. 这就决定了“高等数学”课程的理论和方法具有广泛的应用价值. 国内高等院校从 1999 年开始扩大招生规模至今,高等教育已明显凸现从精英教育向大众化教育的转变的特点. 但与之相应的教材建设还不尽如人意,很多尚停留在传统模式上,过分追求逻辑的严密性和理论体系的完整性. 不仅数学的工具性不够突出,而且导数部分与中学有明显的重复内容. 在教育部对全国普通高等学校完成本科教学工作水平评估之后,各高校推出本科教育质量工程建设之际,我们集合云南省部分高校长期从事化、生、地类专业高等数学的教师,根据化生地类高等数学的教学大纲和教学基本要求,在中学已有内容基础上,结合编者多年的教学实践经验编写本教材. 编写力求体现如下特点:

第一,在教学思想和方法上,以实际应用为背景,概念阐述尽量简明,注重专业理论素养和实际能力的协调发展,贯彻素质教育理念.

第二,突出数学的实用性和工具性.

第三,适应少学时要求,教材内容上册按每周 4 学时,17 周共 68 学时编写,下册按每周 3 学时,18 周共 54 学时编写. 教师可以根据实际情况决定教学内容的取舍.

教材的使用对象是普通高等学校的化学与化工学、生物学与生命科学、地理学与旅游学、医学与环境科学等专业的师生. 也可以作为高等院校相关专业读者的参考书.

本书(上册第 1 章～第 7 章,下册第 8 章～第 12 章)由 9 位教师共同编写,第 1 章、第 7 章由云南师范大学数学学院赵奎奇老师编写;第 2 章由云南师范大学数学学院程洁老师编写;第 3 章、第 10 章由红河学院李绍林老师编写;第 4 章由昭通学院熊绍武老师编写;第 5 章、附录内容由文山学院方艳溪老师编写;第 6 章由昭通学院张绍康老师编写;第 8 章由文山学院廖玉怀老师编写;第 9 章由玉溪师范学院李素云老师编写;第 11 章、第 12 章由楚雄师范学院陈静老师编写;全书的统稿工作由云南师范大学数学学院赵奎奇老师完成.

本书的编写得到了云南省数学学会、云南师范大学和云南省多所师(学)院的大力支持,科学出版社龚剑波、任俊红二位编辑为本书的出版做了大量繁杂而细致的工作. 在此一并表示感谢!

本书的编写过程中我们参考了一些同类书籍资料，并借鉴了同行们的经验，在此深表谢意.

由于我们水平所限，书中存在的问题在所难免，敬请读者和同行批评指正.

编　者

2012 年 7 月

目　　录

第1章　函　　数

有这样的说法：高等数学是研究变量的数学，初等数学是研究常量的数学．这说明函数是高等数学中的主要研究对象．本章主要介绍实自变量函数的概念和函数的一些基本特性．

1.1　实数　区间　邻域

约定几个常用的逻辑符号，"∀"表示"对于任意"，"∃"表示"存在"，"⇒"表示"蕴涵"或"可推导出"，"⇔"表示"等价"．

1.1.1　集合

集合是指具有某种共同性质的事物的全体，组成该集合的事物称为集合的元素．

集合的表示方法有列举法，如

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$$

和描述法，如

$$A=\{x\mid x\text{ 所具有的性质}\}.$$

空集∅，是补充规定的一个特殊集合，它不含任何元素．

自然数集

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}.$$

整数集

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}.$$

有理数集

$$\mathbf{Q}=\{x\mid x\text{ 是无限循环小数}\}=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{p}{q},p,q\in\mathbf{Z},q\neq 0\right\}.$$

无理数集

$$\mathbf{P}=\{x\mid x\text{ 是无限不循环小数}\}.$$

实数集

$$\mathbf{R}=\mathbf{Q}\cup\mathbf{P}.$$

任一实数都可与实数轴上的一个点形成一一对应，因此，常常不加区别地称一个实数为(实数轴上的)一个点．

1.1.2 区间

设 $a<b$,则**开区间**

$$(a,b)=\{x|a<x<b\},$$

闭区间

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\},$$

半开半闭区间

$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\},\quad (a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}.$$

以上几个区间也统称为**有限区间**,下列区间统称为**无限区间**:

$$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\},\quad (-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\},$$
$$(a,+\infty)=\{x|x>a\},\quad (-\infty,b)=\{x|x<b\},$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}=\{x||x|<+\infty\}=\mathbf{R}(\text{实数集}).$$

在上面的区间中,a,b 分别叫做对应区间的左、右端点,$b-a$ 叫做对应有限区间的长度,无限区间的长度为无穷大.

1.1.3 邻域

包含点 a 的任何开区间称为点 a 的**邻域**,记作 $U(a)$.

点 a 的 **$\boldsymbol{\delta}$ 邻域**(图 1-1)

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\},$$

点 a 的去心 δ 邻域

$$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$
$$=\{x|a-\delta<x<a+\delta,x\neq a\},$$

其中 $\delta>0$ 称为邻域的半径,a 称为邻域的中心.

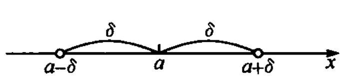

图 1-1

1.1.4 两个区间的直积

两个区间的直积

$$I_1\times I_2=\{(x,y)|x\in I_1,y\in I_2\},$$

其中 I_1,I_2 为两个给定区间.如果 I_1,I_2 分别对应 xOy 平面中 x 轴和 y 轴上的区间,则 $I_1\times I_2$ 是 xOy 平面上的一个矩形区域.

1.2　函数的概念

设 x 与 y 是变量，D 是一个非空数集，f 是一个确定的映射．如果 $\forall x\in D$，通过 f 都有 $\mathbf{R}$ 内唯一确定的数值与之对应，则称 y 为 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$．这里，D 称为函数的**定义域**，x 为**自变量**，y 为**因变量**，$f(D)=\mathbf{R}_f=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**．给定 x_0，与之对应的 $y_0=f(x_0)$ 称为该函数在 x_0 的**函数值**．

关于定义域的求法，实际问题由实际意义确定．例如，自由落体运动 $x=x_0-\frac{1}{2}gt^2$，其定义域为 $t\geqslant 0$. 由数学式子表示的函数，没特别标明时，约定由保证算式有意义的一切实数值的自变量所确定．例如，$y=\sqrt{1-x^2}$，其定义域为 $D=[-1,1]$.

(1) **函数的图形**．集合

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的图形（图 1-2).

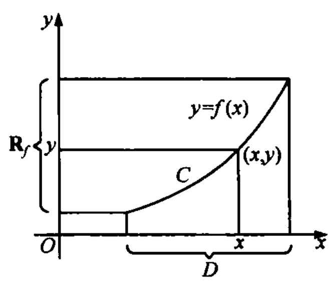

图 1-2

(2) **函数的四则运算**．

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad (f-g)(x)=f(x)-g(x),$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x),\quad \frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)},g(x)\neq 0.$$

下面给出几个特殊函数．

(1) **绝对值函数**．

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

(2) **符号函数**(图 1-3).

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

$$|x|=x\operatorname{sgn}x.$$

(3) **取整函数**(图 1-4).

$y=[x]=n,\quad x\in[n,n+1),n\in\mathbf{Z}$,表示不超过 x 的最大整数,如

$$[-1.3]=-2,\quad [-0.25]=-1,\quad [0.36]=0,\quad [2.6]=2,$$

而且有

$$x=[x]+\lambda(x),\quad 0\leqslant\lambda(x)<1.$$

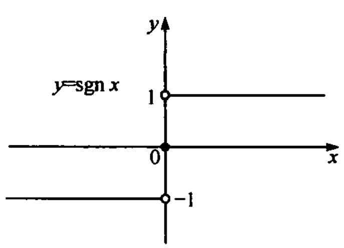

图 1-3

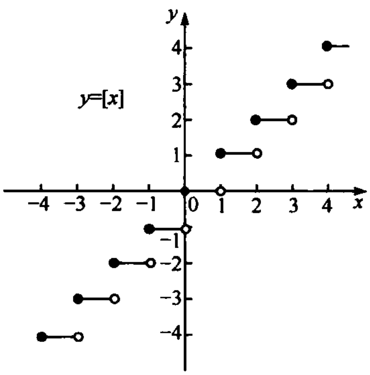

图 1-4

(4) **分段函数**. 一个自变量在不同范围中,用不同式子表示的函数称为分段函数. 例如,绝对值函数、取整函数、符号函数等都是分段函数,每个式子其自变量的取值区间的端点称为分段函数的分段点.

对于分段函数

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & x\leqslant c,\\ f_2(x), & x>c,\end{cases}$$

若 $f_1(c)=f_2(c)$,则

$$f(x)=f_1\left[\frac{x+c-\sqrt{(x-c)^2}}{2}\right]+f_2\left[\frac{x+c+\sqrt{(x-c)^2}}{2}\right]-f_1(c).$$

例 1.1 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x, & x>1\end{cases}$

$$=\left[2\sqrt{\frac{x+1-|x-1|}{2}}\right]+\left(1+\frac{x+1+|x-1|}{2}\right)-2$$

$$=\sqrt{2(x+1-|x-1|)}+\frac{x-1+|x-1|}{2},$$

如图 1-5 所示.

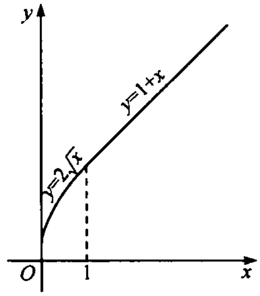

图 1-5

1.3 函数的基本特性

1. 有界性

设 $f(x)$的定义域为 D,数集 $X\subset D$. 如果 $\exists M\in\mathbf{R}$, $\forall x\in X$,都有

$$f(x)\geqslant M \quad (\text{或 } f(x)\leqslant M),$$

则称 $f(x)$在 X 上有下界(或上界);否则,称 $f(x)$在 X 上无下界(或上界),M 也称为 $f(x)$的一个下界(或上界). 当 $f(x)$在 X 上既有上界又有下界时,称 $f(x)$在 X 上有界.

$$f(x)\text{在 } X \text{ 上有界} \Leftrightarrow \exists M>0, \forall x\in X \text{ 有 } |f(x)|\leqslant M.$$

2. 单调性

设 $f(x)$的定义域为 D,区间 $I\subset D$. 如果 $\forall x_1<x_2\in I$,都有

$$f(x_1)<f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $f(x)$在 I 上单调增加(或减少),I 称为函数的单调区间. 当函数 $f(x)$在 D 上单调增加或单调减少时,也称之为单调函数.

3. 奇偶性

设 $f(x)$的定义域 D 关于原点 O 对称(即 $x\in D\Rightarrow -x\in D$),如果 $\forall x\in D$,都有

$$f(-x)=f(x) \quad (\text{或 } f(-x)=-f(x)),$$

则称 $f(x)$为偶(或奇)函数. 偶(或奇)函数的图形关于 y 轴(或原点)对称(图 1-6 和图 1-7).

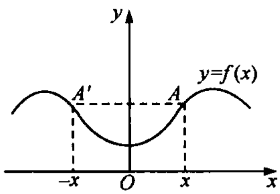

图 1-6

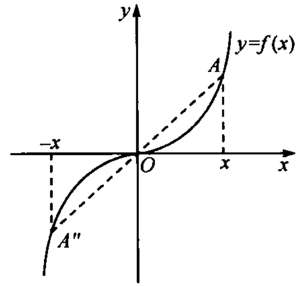

图 1-7

4. 周期性

设 $f(x)$ 的定义域为 D,如果 $\exists\, l\neq 0$,使得 $f(x+l)=f(x)(x,x+l\in D)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,l 称为函数的周期.通常,函数的周期被约定为最小正周期 T.例如,$l=2k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 都是 $y=\sin x$ 的周期,但常说它的周期是 $T=2\pi$.

不是任一周期函数都有最小正周期.例如,**狄利克雷函数**

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为无理数},\\0, & x\text{ 为有理数}.\end{cases}$$

任意有理数都是它的周期,但它是无最小正周期的周期函数.

1.4 反函数 复合函数 初等函数

1.4.1 反函数 复合函数

1. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,若对 $\forall\, y\in f(D)$,$\exists$ 唯一 $x\in D$,使得 $y=f(x)$,这样就确定了一个以 y 为自变量的函数 x,称之为 $y=f(x)$ 的反函数,记作 $x=\varphi(y)$,也记作 $y=f^{-1}(x)$.相对于反函数 $y=f^{-1}(x)$,函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.$y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称(图 1-8).

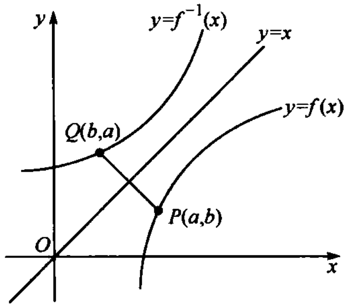

图 1-8

单调函数 $y=f(x)$ 一定存在反函数 $y=f^{-1}(x)$.

2. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$ 在 D_2 上有定义，并且

$$\varphi(D_2)=\{u\mid u=\varphi(x),x\in D_2\},$$

$$\varphi(D_2)\subset D_1,$$

则对于 $\forall x\in D_2$，由 $u=\varphi(x)$ 有确定的 u 与之对应，并且对于这个 u，通过 $y=f(u)$ 有确定的 y 与之对应，从而得到由 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作 $y=f\circ\varphi(x)=f(\varphi(x))$，$u$ 称为中间变量．

注 1.1　不是任意两个或两个以上的函数都复合成一个复合函数，如 $y=\ln u$ 与 $u=\sin x-2$ 就不能复合成一个复合函数．任一复合函数都可以分解成一些简单函数的复合，如函数 $y=\ln\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)$ 可分解成 $y=\ln u,u=\tan v,v=\dfrac{x}{2}$.

1.4.2　初等函数

下列函数叫做初等函数：

(1) 基本初等函数．

$y=c,c\in\mathbf{R}$，　$y=x^\mu,\mu\in\mathbf{R}$，　$y=a^x,a>0,a\neq1$，　$y=\log_a x,a>0,a\neq1$，
$y=\sin x$，　$y=\cos x$，　$y=\tan x$，　$y=\cot x$，　$y=\sec x$，　$y=\csc x$，$y=\arcsin x$，
$y=\arccos x$，　$y=\arctan x$，　$y=\operatorname{arccot} x$，　$y=\operatorname{arcsec} x$，　$y=\operatorname{arc\,csc} x$，
它们在其有定义的全部区域上．

(2) 形如 $f+g,f-g,f\cdot g,\dfrac{f}{g},f\circ g$ 的函数，其中 f,g 都为初等函数．

例 1.2　$y=\sin x-x^2$，$y=2^x\tan 2x$，$y=|\sec x-\ln x|=\sqrt{(\sec x-\ln x)^2}$，例 1.1 中所给的函数，$y=\ln\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)$，$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 等都是初等函数．

1.4.3　基本初等函数图像汇集

(1) $y=x^\mu(\mu>0)$（图 1-9）.

(2) $y=a^x(a>0,a\neq1)$（图 1-10）.

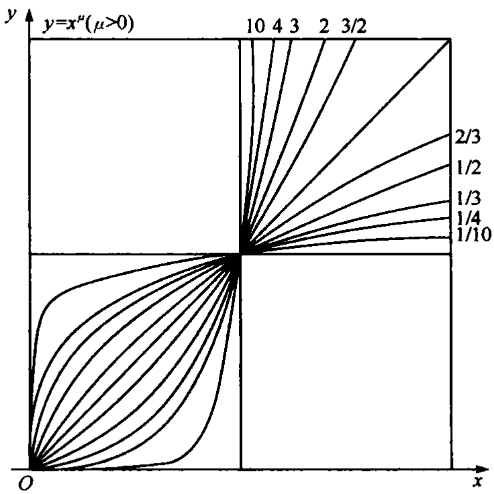

图 1-9

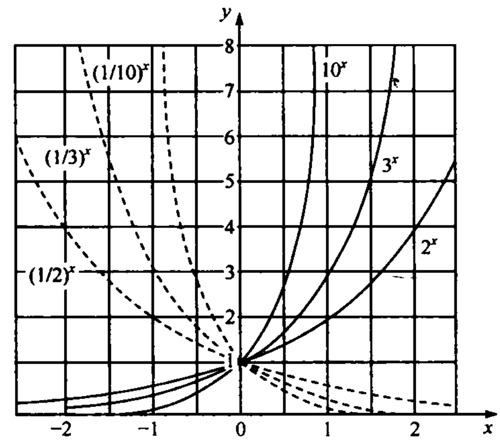

图 1-10

(3) $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq 1)$(图 1-11).

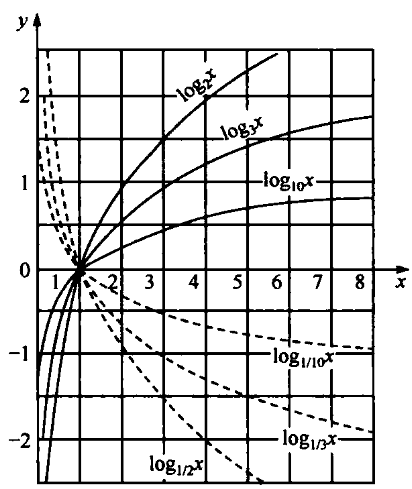

图 1-11

(4) $y=\sin x$($x\in\mathbf{R}$,x 表示弧度数)(图 1-12).

(5) $y=\arcsin x$($x\in[-1,13)$)(图 1-13).

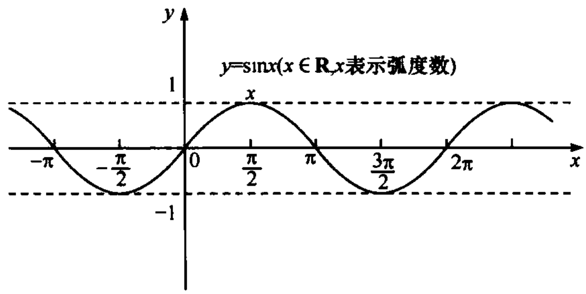

图 1-12

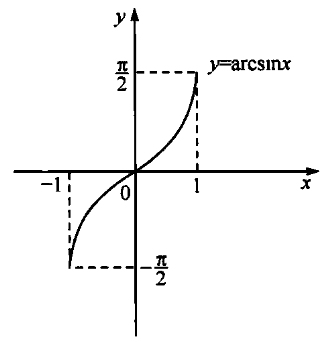

图 1-13

(6) $y=\cos x(x\in\mathbf{R})$(图 1-14).

(7) $y=\arccos x(x\in[-1,1])$(图 1-15).

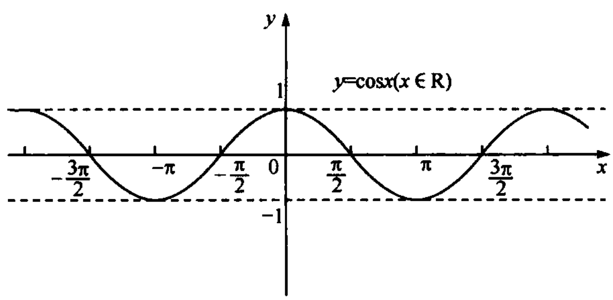

图 1-14

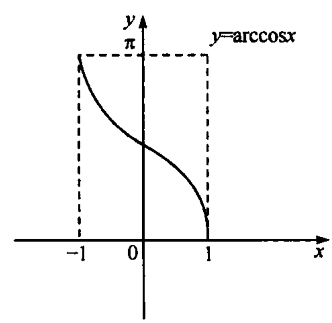

图 1-15

(8) $y=\tan x(x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2},n\in\mathbf{Z})$(图 1-16).

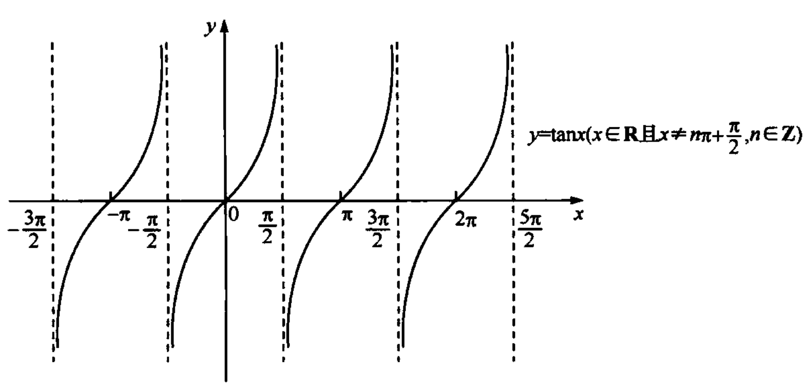

图 1-16