

矢量分析、 圆柱函数和球函数

● 张善杰 著

矢量分析、 圆柱函数和球函数

张善杰 著



南京大学出版社

内容简介

本书系统地论述了矢量分析、圆柱函数和球函数,内容计有矢量分析、Bessel 函数、变型 Bessel 函数、球 Bessel 函数和 Legendre 函数 5 章,包含有正文、附录、典型数表和源程序,它具有矢量分析和圆柱函数以及球函数(公式、曲线、数表和程序)手册的特点。源程序在所附光盘中给出,其中具有互动式的计算圆柱函数和球函数范例程序,其执行文件可相当于“圆柱函数和球函数计算器”。

本书内容翔实简明,重点突出,叙述深入浅出;理论联系实际,注重基本理论、基本运算和数值计算技能;方便自学,易于掌握。

本书可作为数学基础补充,供理论物理、大气科学、微波理论与技术、电磁场工程等理工科大学相关专业教师和科技人员与研究生参考,以及作为本科生学习“数学物理方程”中有关特殊函数内容的辅助教材或课外补充读物。

图书在版编目(CIP)数据

矢量分析、圆柱函数和球函数 / 张善杰著. — 南京:
南京大学出版社, 2011.10
ISBN 978-7-305-08966-4

I. ①矢… II. ①张… III. ①函数 IV. ①0174

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 216368 号

出版发行 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093
网 址 <http://www.NjupCo.com>
出版人 左 健

书 名 矢量分析、圆柱函数和球函数
著 者 张善杰
责任编辑 沈 洁 编辑热线 025-83593962

照 排 南京南琳图文制作有限公司
印 刷 南京大众新科技印刷有限公司
开 本 720×1000 1/16 印张 18 字数 363 千
版 次 2011 年 10 月第 1 版 2011 年 10 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-08966-4
定 价 38.00 元(含光盘)

发行热线 025-83594756 83686452
电子邮箱 Press@NjupCo.com
Sales@NjupCo.com(市场部)

* 版权所有,侵权必究

* 凡购买南大版图书,如有印装质量问题,请与所购
图书销售部门联系调换

序

时代在前进,科技在发展,对于从事理论物理学、大气科学和海洋学、电磁场工程以及航空和航天工程等学科研究的学生和工程技术人员来说,所要求的专业和数学基础知识的广度和深度也与日俱增。在涉及的高等数学基础知识方面,具有良好的矢量分析、特殊函数知识常常是不可缺少的,同时对熟悉常用算法、应用计算机进行科学计算的能力也提出了较高要求。

本书介绍矢量分析以及在诸多特殊函数中最重要和应用最为广泛的圆柱和圆球两类特殊函数;在内容上包含有正文、附录、典型数表和计算程序,具有矢量分析、圆柱函数和球函数(公式、曲线、数表和程序)手册的特点。

正文部分计5章,分别是第1章矢量分析,第2章 Bessel 函数,第3章变型 Bessel 函数,第4章球 Bessel 函数、Riccati-Bessel 函数和变型球 Bessel 函数,第5章 Legendre 函数。正文部分介绍各章的主要内容,给出了它们的主要结论、重要公式、函数曲线以及函数的数值计算方法;为突出重点,一些公式的冗长推导或证明则安排在附录中。正文部分具有“纲要”的特点。

附录部分可作为课外复习的补充材料,内容为正文中一些公式的推导和证明,目的是便于读者掌握主要结论,同时又能对公式的来龙去脉、解决难点问题的过程有所了解,此部分相当于一本“习题集”。数表部分给有 Bessel 和 Legendre 函数类的典型数表以及某些 Bessel 和 Legendre 函数的零点表,方便读者了解函数的性态,为查阅与核验其有关数值计算结果提供便利。程序部分给出书中所述及全部实宗量圆柱函数和球函数的 Fortran 源程序,它们置于本书所附光盘中。每一程序均配有应用范例,源程序中含有变量说明,读者不难用 Fortran 语言直接使用它们或者根据需要进行改编,或者翻译成其他程序语言。为便于应用,光盘中给出的范例主程序采用了互动式输入,只要输入所求函

数的参、变量,运行经过编译后的执行文件就可获得所需函数值。因此,它可相当于一个“圆柱函数和球函数计算器”。

本书在内容取材上注意紧密联系实际的计算要求,方便读者自学;表述上力求严谨,以期使读者能够较好较快地掌握基本理论、基本知识和基本运算技能。书中配有笔者通过编程计算绘制的插图、曲线和数值列表。本书是根据笔者的“特殊函数及其计算”备课笔记整理而成,限于学识和水平,和现已逾古稀之年精力难以从心,书中不免有错误和欠妥之处,敬请读者不吝批评指正。

作者衷心感谢南京大学电子科学与工程学院吴培亨院士、施毅教授、许伟伟教授、陈健教授和冯一军教授给予的热情关心和支持,以及赵俊明博士的技术帮助。

本书的出版得到南京大学“211 工程”建设项目的资助。

张善杰

2011 年 3 月于南京大学

目 录

正文篇

第 1 章 矢量分析	1
1.1 矢量代数	1
1.2 并矢(二阶张量)代数	4
1.3 标量函数的梯度	6
1.4 矢量函数的散度	10
1.5 矢量函数的旋度	13
1.6 标量场和矢量场的 Laplace	16
1.7 矢量和并矢函数的微商	19
1.8 矢量场的积分定理	20
1.9 一般正交曲线坐标系中梯度、散度、旋度和 Laplace 的表达式	26
1.10 球面坐标系、圆柱面坐标系和椭圆柱坐标系	35
1.11 无旋场与无散场	41
第 2 章 Bessel 函数	44
2.1 引 言	44
2.2 Bessel 方程解与谐振动方程解的对比	46
2.3 Bessel 方程的级数解法	49
2.4 Bessel 函数的主要性质(I)	53
2.5 Bessel 函数的主要性质(II)	63
2.6 零阶和一阶实宗量 Bessel 函数 $J_0(x), J_1(x), Y_0(x)$ 和 $Y_1(x)$ 的计算	75
2.7 n 阶实宗量 Bessel 函数的计算	79
第 3 章 变型 Bessel 函数	84
3.1 引 言	84
3.2 变型 Bessel 函数的主要性质(I)	85
3.3 变型 Bessel 函数的主要性质(II)	93
3.4 零阶和一阶实宗量变型 Bessel 函数 $I_0(x), I_1(x), K_0(x)$ 和 $K_1(x)$ 的计算	100
3.5 n 阶实宗量 $I_n(x)$ 和 $K_n(x)$ 的计算	102

第 4 章 球 Bessel 函数、Riccati - Bessel 函数和变型球 Bessel 函数	106
4.1 球 Bessel 函数	106
4.2 球 Bessel 函数的主要性质	107
4.3 实宗量 $j_n(x)$, $y_n(x)$, $h_n^{(1)}(x)$ 和 $h_n^{(2)}(x)$ 的计算	114
4.4 Riccati - Bessel 函数及其数学性质	116
4.5 实宗量 Riccati - Bessel 函数的计算	121
4.6 变型球 Bessel 函数	123
4.7 变型球 Bessel 函数的主要性质	124
4.8 实宗量 $i_n(x)$ 和 $k_n(x)$ 的计算	129
第 5 章 Legendre 函数	131
5.1 引 言	131
5.2 Legendre 方程的级数解法	133
5.3 Legendre 函数 $P_n(x)$ 的主要性质	138
5.4 $P_n(x)$ 及其零点的数值计算	146
5.5 第二类 Legendre 函数 $Q_n(x)$ 及其数学性质	147
5.6 $Q_n(x)$ 数值计算	149
5.7 第一类缔合 Legendre 函数 $P_n^m(x)$ 及其数学性质	150
5.8 $P_n^m(x)$ 及其导数的数值计算	153
5.9 球谐函数及其数学性质	154
5.10 第二类缔合 Legendre 函数 $Q_n^m(x)$ 及其数学性质	159
5.11 $Q_n^m(x)$ 数值计算	161

附录篇

附录 I 矢量分析常用公式和场论公式的推导	163
A 常用重要公式	163
1. 矢量恒等式	163
2. 积分定理	163
3. 直角、圆柱、球面和椭圆柱坐标系中场的梯度、散度、旋度和 Laplace 的表示式	164
B 圆球坐标系矢量场 Laplace $\nabla^2 \mathbf{A}$ 表示式的推导	170
方法 1: 矢量场 $\mathbf{A}$ Laplace $\nabla^2 \mathbf{A}$ 的矢量恒等式法	171
方法 2: $\nabla^2 \mathbf{A}$ 的拉氏算子 ∇^2 直接作用于矢量场 $\mathbf{A}$ 法	173
方法 3: $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{A})$ 的 Laplace 算子法	176
C 一般柱面坐标系矢量场 Laplace $\nabla^2 \mathbf{A}$ 表示式的推导	181

方法 1: 矢量场 $\mathbf{A}$ Laplace $\nabla^2 \mathbf{A}$ 的矢量恒等式法	181
方法 2: $\nabla^2 \mathbf{A}$ 的拉氏算子 ∇^2 直接作用于矢量场 $\mathbf{A}$ 法	185
方法 3: $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{A})$ 的 Laplace 算子法	188
附录 II Bessel 函数相关函数和公式证明	202
A $\Gamma(z)$ 函数, $\psi(z)$ 和 $B(p, q)$ 函数	202
1. Gamma 函数的定义及其主要性质	202
2. $\psi(z)$ 函数的定义及其主要性质	204
3. Beta 函数 $B(p, q)$ 的定义及其主要性质	205
B 几个公式的推导证明	206
1. n 整数阶 Bessel 方程第二个特解 $Y_n(z)$ 的推导	206
2. Bessel 函数大宗量渐近展开式的推导	208
3. Bessel 函数 $J_n(z)$ 的正交归一关系式(2.5.28)的证明	212
附录 III 有关变型 Bessel 函数公式的推导	215
1. n 整数阶第二类变型 Bessel 函数 $K_n(z)$ 表示式(3.2.4)的推导	215
2. 关系式(3.2.22)和(3.2.25)的证明	217
3. 变型 Bessel 函数朗斯基关系式(3.3.1)和(3.3.2)的证明	218
4. 变型 Bessel 函数大宗量渐近展开式(3.3.15)和(3.3.16)的证明	219
附录 IV 有关球 Bessel 函数公式的推导	222
1. $j_n(z)$ 和 $y_n(z)$ 级数展开式(4.2.1)和(4.2.2)的推导	222
2. 球 Bessel 函数的初等函数表示式的推导	224
3. 负变量公式(4.7.39)和(4.7.40)的证明	227
4. 变型球 Bessel 与球 Bessel 函数的关系式(4.7.43)和(4.7.44)的证明	227
附录 V 有关 Legendre 函数公式的证明	230
1. Legendre 多项式 $P_n(x)$ 的递推公式(5.3.13)~(5.3.16)的证明	230
2. 证明 Legendre 多项式 $P_n(x)$ 正交归一关系式(5.3.17)	231
3. 证明 $P_n(x)$ 和 $Q_n(x)$ 的朗斯基关系式(5.5.17)	236
4. 证明缔合 Legendre 多项式(5.7.1)	237
5. 证明缔合 Legendre 多项式对称关系式(5.7.3)和(5.7.4)	238
6. 证明 $P_n^m(x)$ 的特殊值(5.7.5)~(5.7.8)式	239
7. 证明缔合 Legendre 多项式 $P_n^m(x)$ 递推公式(5.7.10)~(5.7.14)	242
8. 证明 $P_n^{-m}(x)$ 与 $P_n^m(x)$ 的关系式(5.7.16)	245
9. 证明缔合 Legendre 多项式正交关系式(5.7.17)~(5.7.20)	247
10. 证明 $Q_n^m(x)$ 特殊值(5.10.3)和(5.10.4)式	255

11. 证明 $P_n^m(x)$ 和 $Q_n^m(x)$ 的朗斯基关系式(5.10, 13)	258
附录 VI 圆柱函数和球函数典型数表	260
表 1 第一类 Bessel 函数 $J_n(x)$	260
表 2 第二类 Bessel 函数 $Y_n(x)$	260
表 3 Bessel 函数 $J_n(x)$ 和 $J_n'(x)$ 的零点表(按大小顺序排列)	261
表 4 $J_n(x)Y_n(cx) - J_n(cx)Y_n(x)$ 的前 5 个零点	262
表 5 变型第一类 Bessel 函数 $I_n(x)$	263
表 6 第二类变型 Bessel 函数 $K_n(x)$	263
表 7 第一类球 Bessel 函数 $j_n(x)$	264
表 8 第一类球 Bessel 函数 $y_n(x)$	264
表 9 球 Bessel 函数 $j_n(x)$ ($n=0, 1, 2, 3$) 的零点, x_m	265
表 10 球 Bessel 函数的导数 $j_n'(x)$ ($n=0, 1, 2, 3$) 的零点, x_m'	265
表 11 第一类 Riccati-Bessel 函数 $\hat{J}_n(x)$	266
表 12 第二类 Riccati-Bessel 函数 $\hat{Y}_n(x)$	266
表 13 Riccati-Bessel 函数 $\hat{J}_n(x)$ ($n=0, 1, 2, 3$) 的零点, x_m	267
表 14 Riccati-Bessel 函数的导数 $\hat{J}_n'(x)$ ($n=0, 1, 2, 3$) 的零点, x_m'	267
表 15 第一类变型球 Bessel 函数 $i_n(x)$	268
表 16 第二类变型球 Bessel 函数 $k_n(x)$	268
表 17 第一类 Legendre 函数 $P_n(x)$	269
表 18 第二类 Legendre 函数 $Q_n(x)$	270
表 19 第一类缔合 Legendre 函数 $P_n^m(x)$	271
表 20 第一类缔合 Legendre 函数 $P_n^m(x)$ (续)	272
表 21 第二类缔合 Legendre 函数 $Q_n^m(x)$	273
表 22 第二类缔合 Legendre 函数 $Q_n^m(x)$ (续)	274
表 23 Gauss-Legendre 型积分的节点 x_i 和权系数 w_i	275
表 23 Gauss-Legendre 型积分的节点 x_i 和权系数 w_i (续 1)	276
表 23 Gauss-Legendre 型积分的节点 x_i 和权系数 w_i (续 2)	277
附录 VII 光盘 Fortran 源程序清单(文件夹 VCS)	278
参考书目	279

正文篇

第 1 章 矢量分析

本章首先对矢量代数作简要复习,继而介绍并矢代数,叙述标量场的梯度,矢量场的散度、旋度,标量场和矢量场的 Laplace(拉普拉斯)定义,并给出它们在直角坐标系中的表示式;然后对一般正交曲线坐标系中的梯度、散度、旋度和 Laplace 的表示式进行分析和推导,并讨论 ∇ 算子法的应用以及给出它们在圆柱坐标系、圆球坐标系和椭圆柱坐标系中的表示式^[1-3];特别指出对于算子法,直角坐标系下的矢量场的 Laplace 算子 $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$,可直接推广用于正交曲线坐标系下的矢量场.此外,还给出了 Gauss(高斯)定理, Stokes(斯托克斯)定理等几个重要积分定理.

为便于查阅,常用的重要关系式,如矢量和并矢恒等式,以及梯度、散度、旋度、标量和矢量 Laplace 在直角、圆柱、圆球和椭圆柱坐标系中的表示式等,以及一些重要关系式的推导请见本书附录 I.

1.1 矢量代数

科学和工程中的数学物理问题广泛地采用了矢量分析方法,这种方法与坐标表示法相比,在描述物理现象和规律时,具有物理图像清晰、公式书写简明的优点,特别是用矢量法给出的公式不依赖于坐标系的选择.然而,若对于分析和解决具体问题而需要得到最后的数值结果时,仍要用到具体的坐标系,因而熟知矢量表示法和坐标表示法是同样重要的.

研究物理现象时会遇到各种物理量,其中最常见的有两类:一类是只有大小而没有方向的量,也就是只要标明它的大小即可完全确定的量,例如,质量、时间、长度、密度、温度、能量、势能等,它们称为**标量**(或数量);另一类不仅有大小,而且还需说明它的方向才能完全确定的量,例如,位移、力、速度、加速度、电场强度、磁场强度等,它们称为**矢量**(或向量).矢量在空间中用一个带箭头的线段表示,其长短表示矢量的大小,箭头表示矢量的指向,一般情况下,用单个黑斜体字母表示.为了便于采用矢量概念表示和分析物理现象和规律,定义了如下矢量运算规则.

1. 矢量相等

矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 相等是指它们的有向线段长度(大小)相等,方向相同,即 $|\mathbf{a}| =$

$|b|$, 且两有向线段在空间中相重合或平行, 故 $a=b$ 表示 $a=b(|a|=|b|)$ 且 $a//b$, 方向相同或重合; 如果 $a=-b$, 则表示矢量 a 和 b 大小相等, 两有向线段在空间中相重合或平行, 但指向相反.

2. 零矢量

当矢量的大小等于零时, 就称为零矢量. 显然, 零矢量没有一定的方向或指向. 物理上零矢量意谓该矢量不存在, 引入它是为了运算上的方便.

3. 单位矢量(或么矢量)

当矢量的大小为单位长度 1 时, 此矢量就称为单位矢量.

4. 矢量与数相乘

当矢量 a 乘以正数 λ 时, 则新矢量记为 λa 或 $a\lambda$, 其大小为 a 的 λ 倍, 而指向与 a 相同; 当矢量 a 乘以负数 $-\lambda$ 时, 则 $-\lambda a$ 其大小为 a 的 λ 倍, 而指向与 a 的方向相反.

5. 矢量的加減

矢量加法 给定两矢量 a 和 b , 如图 1.1.1 所示. 以 a, b 为相邻边作平行四边形 $OACB$, 则定义对角线矢量 $\overrightarrow{OC}$ 即为 $a+b$, 这一定义与物理上的矢量相加是一致的.

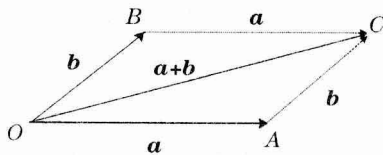


图 1.1.1 矢量加法的图示

注意: $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC} = b$, 而有 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} =$

$a+b=\overrightarrow{OC}$, 故为求得 $a+b$, 只需在矢量 a 的

终端作一矢量等于 b , 则由 a 的始端到 b 的终端的有向线段 $\overrightarrow{OC}$ 即为 $a+b$. 不难证明, 矢量加法满足交换律和分配律, 即

$$a+b=b+a \quad \text{和} \quad (a+b)+c=a+(b+c) \quad (1.1.1)$$

此外, 不难得知: 如果有 n 个矢量 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 相加, 无论相加的次序如何, 若第一个矢量的始端与最后一个矢量的终端相重合时, 则有

$$a_1+a_2+\dots+a_n=0 \quad (1.1.2)$$

矢量减法 矢量 $a-b$ 可定义为矢量 a 与 $-b$ 相加, 即

$$a-b=a+(-b) \quad (1.1.3)$$

因此, 矢量减法亦满足交换律和分配律.

6. 矢量的分解

令 $\hat{a}_x, \hat{a}_y$ 和 $\hat{a}_z$ 分别为沿“右手”直角坐标系 (x, y, z) 的三个坐标轴上的单位矢

量,则空间中任一矢量 $\mathbf{A}$ 可分解为如下三个分(矢)量之和:

$$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{a}}_x + A_y \hat{\mathbf{a}}_y + A_z \hat{\mathbf{a}}_z \quad (1.1.4)$$

式中, A_x, A_y 和 A_z 分别为矢量 $\mathbf{A}$ 在三个坐标轴上的投影.

显然,当且仅当 $A_x = A_y = A_z = 0$ 时, $\mathbf{A} = 0$, 故 $\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{a}}_x + A_y \hat{\mathbf{a}}_y + A_z \hat{\mathbf{a}}_z$, 矢量分解式是唯一的. 事实上,若 $\mathbf{A}$ 亦可分解表示为 $\mathbf{A} = A'_x \hat{\mathbf{a}}_x + A'_y \hat{\mathbf{a}}_y + A'_z \hat{\mathbf{a}}_z$, 则有

$$\mathbf{A} = A'_x \hat{\mathbf{a}}_x + A'_y \hat{\mathbf{a}}_y + A'_z \hat{\mathbf{a}}_z = A_x \hat{\mathbf{a}}_x + A_y \hat{\mathbf{a}}_y + A_z \hat{\mathbf{a}}_z$$

或

$$(A_x - A'_x) \hat{\mathbf{a}}_x + (A_y - A'_y) \hat{\mathbf{a}}_y + (A_z - A'_z) \hat{\mathbf{a}}_z = 0$$

此即有

$$A'_x = A_x, \quad A'_y = A_y, \quad A'_z = A_z$$

当 $\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{a}}_x + A_y \hat{\mathbf{a}}_y + A_z \hat{\mathbf{a}}_z$ 时, (A_x, A_y, A_z) 是矢量 $\mathbf{A}$ 的坐标. 当 $\mathbf{A}$ 为单位矢量时, A_x, A_y, A_z 即为其方向余弦.

7. 矢量乘法

两个矢量相乘有两种形式: 标量积和矢量积.

标量积 两矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的标量积(或称为点乘积), 记为 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, 是一个标量, 它定义为矢量 $\mathbf{a}$ 的长度乘以 $\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{a}$ 上的投影, 即

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \quad (1.1.5)$$

式中, θ 为矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 之间的夹角.

据此定义, 可知标量积满足

(1) 交换律: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.

(2) 分配律: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$.

(3) 相互成直角的两矢量点乘时, 其值为零. 特别是对于沿直角坐标系的坐标轴的单位矢量 $\hat{\mathbf{a}}_x, \hat{\mathbf{a}}_y$ 和 $\hat{\mathbf{a}}_z$, 而有

$$\hat{\mathbf{a}}_i \cdot \hat{\mathbf{a}}_j = 0 \quad (i \neq j), \quad \hat{\mathbf{a}}_i \cdot \hat{\mathbf{a}}_i = 1 \quad (i = j) \quad (1.1.6)$$

矢量积 两矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的矢量积(或称为叉乘积), 记为 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, 仍是一个矢量. 设 $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, 它的大小定义为

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta \quad (1.1.7)$$

这里, θ 为矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 之间的夹角. 而 $\mathbf{c}$ 的方向则定义为自 $\mathbf{a}$ 转一个小于 π 的角度抵达 $\mathbf{b}$ 时、按右手螺旋方向(与右手螺丝的螺纹前进相同的方向, 或将右手四指并拢自 $\mathbf{a}$ 沿小于 π 角转向 $\mathbf{b}$ 的方向), 则大拇指的方向就是矢量 $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的方向. 据此定义, 显然有

(1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

(2) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ 等于以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为相邻边所构成的平行四边形的面积.

(3) 相互平行的两矢量叉乘时,其值为零,即当 $a \parallel b$ 时, $a \times b = 0$.

由矢量分解法,以及矢量点乘积和叉乘积的定义,对于矢量 a, b 和 c ,不难证明有如下矢量恒等式:

$$\begin{aligned} a \cdot b \times c &= b \cdot c \times a = c \cdot a \times b \\ a \times b \times c &= b(a \cdot c) - c(a \cdot b) \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

1.2 并矢(二阶张量)代数

1.2.1 并矢定义

设在 $O-xyz$ 坐标系中,有矢量

$$A = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z, \quad B = B_x \hat{a}_x + B_y \hat{a}_y + B_z \hat{a}_z$$

式中, A_x, A_y, A_z 和 B_x, B_y, B_z 分别是 $O-xyz$ 坐标系中矢量 A, B 沿坐标轴单位矢量 $\hat{a}_x, \hat{a}_y, \hat{a}_z$ 方向上的分量. 并矢是指两个矢量并列(直接“相乘”)构成的量,常使用在矢量字母上加横线表示. 记并矢 $\bar{D} = AB$, 则 $\bar{D}$ 可定义为^[4]

$$\begin{aligned} \bar{D} &= (A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z)(B_x \hat{a}_x + B_y \hat{a}_y + B_z \hat{a}_z) \\ &= A_x B_x \hat{a}_x \hat{a}_x + A_x B_y \hat{a}_x \hat{a}_y + A_x B_z \hat{a}_x \hat{a}_z \\ &\quad + A_y B_x \hat{a}_y \hat{a}_x + A_y B_y \hat{a}_y \hat{a}_y + A_y B_z \hat{a}_y \hat{a}_z \\ &\quad + A_z B_x \hat{a}_z \hat{a}_x + A_z B_y \hat{a}_z \hat{a}_y + A_z B_z \hat{a}_z \hat{a}_z \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

显然,并矢的两个矢量先后次序不同是两个不同的并矢,即 $AB \neq BA$.

令 $D_{ij} = A_i B_j$ ($i, j = x, y, z$), 则可将 $\bar{D}$ 表示为

$$\begin{aligned} \bar{D} &= D_{xx} \hat{a}_x \hat{a}_x + D_{xy} \hat{a}_x \hat{a}_y + D_{xz} \hat{a}_x \hat{a}_z \\ &\quad + D_{yx} \hat{a}_y \hat{a}_x + D_{yy} \hat{a}_y \hat{a}_y + D_{yz} \hat{a}_y \hat{a}_z \\ &\quad + D_{zx} \hat{a}_z \hat{a}_x + D_{zy} \hat{a}_z \hat{a}_y + D_{zz} \hat{a}_z \hat{a}_z \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

即

$$\bar{D} = \sum_{i,j} D_{ij} \hat{a}_i \hat{a}_j \quad (i, j = x, y, z) \quad (1.2.3)$$

式中,系数 D_{ij} 共有 9 个;并矢 $\bar{D}$ 的系数矩阵为

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.2.4)$$

此外,并矢 $\bar{D}$ 亦可写成如下矩阵形式:

$$\bar{\bar{D}} = \begin{bmatrix} D^{(x)} & D^{(y)} & D^{(z)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_x \\ \hat{a}_y \\ \hat{a}_z \end{bmatrix} = D^{(x)} \hat{a}_x + D^{(y)} \hat{a}_y + D^{(z)} \hat{a}_z \quad (1.2.5)$$

式中

$$D^{(i)} = \sum_{j=x,y,z} D_{ij} \hat{a}_j \quad (i, j = x, y, z) \quad (1.2.6)$$

或写成如下矩阵形式:

$$\bar{\bar{D}} = \begin{bmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{(x)} \\ D^{(y)} \\ D^{(z)} \end{bmatrix} = \hat{a}_x^{(x)} D + \hat{a}_y^{(y)} D + \hat{a}_z^{(z)} D \quad (1.2.7)$$

式中

$$^{(i)}D = \sum_{j=x,y,z} D_{ij} \hat{a}_j \quad (i, j = x, y, z) \quad (1.2.8)$$

注:按张量定义,并矢就是一个二阶张量,故并矢亦称为二阶张量.

1.2.2 并矢的加减

$$\begin{aligned} \bar{C} \pm \bar{D} &= (C_{xx} \pm D_{xx}) \hat{a}_x \hat{a}_x + (C_{xy} \pm D_{xy}) \hat{a}_x \hat{a}_y + (C_{xz} \pm D_{xz}) \hat{a}_x \hat{a}_z \\ &\quad + (C_{yx} \pm D_{yx}) \hat{a}_y \hat{a}_x + (C_{yy} \pm D_{yy}) \hat{a}_y \hat{a}_y + (C_{yz} \pm D_{yz}) \hat{a}_y \hat{a}_z \\ &\quad + (C_{zx} \pm D_{zx}) \hat{a}_z \hat{a}_x + (C_{zy} \pm D_{zy}) \hat{a}_z \hat{a}_y + (C_{zz} \pm D_{zz}) \hat{a}_z \hat{a}_z \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

式中,并矢

$$\bar{C} = \sum_{i,j} C_{ij} \hat{a}_i \hat{a}_j, \quad \bar{D} = \sum_{i,j} D_{ij} \hat{a}_i \hat{a}_j \quad (i, j = x, y, z)$$

1.2.3 并矢与矢量的点乘积

并矢 $\bar{D} = AB$, 矢量 C , 则

$$\bar{D} \cdot C = AB \cdot C = A(B \cdot C) = (B \cdot C)A, \quad C \cdot \bar{D} = C \cdot AB = (C \cdot A)B$$

故并矢与矢量的点乘积为一矢量. 显见

$$\bar{D} \cdot C \neq C \cdot \bar{D} \quad (1.2.10)$$

而有前乘与后乘之分, 不满足交换律.

另方面, $\bar{D} = AB$, 令 $(\bar{D})^T = BA$ 称为 $\bar{D}$ 的转置, 则易知有

$$(\bar{D})^T \cdot C = C \cdot \bar{D} \quad (1.2.11)$$

证明: 因 $(\bar{D})^T = BA$, 故 $(\bar{D})^T \cdot C = B(A \cdot C)$, 而

$$C \cdot \bar{D} = (C \cdot A)B = B(A \cdot C)$$

于是, $(\bar{D})^T \cdot C = C \cdot \bar{D}$ 得证.

1.2.4 并矢与并矢的点乘积

$$\bar{C} = AB, \quad \bar{D} = EF$$

$$\bar{C} \cdot \bar{D} = AB \cdot EF = A(B \cdot E)F = (B \cdot E)AF$$

故并矢与并矢的点乘积仍为一并矢. 显见

$$\bar{C} \cdot \bar{D} \neq \bar{D} \cdot \bar{C} \quad (1.2.12)$$

而有前乘与后乘之分, 不满足交换律. 但是, 不难证明有

$$(\bar{C} \cdot \bar{D})^T = (\bar{D})^T \cdot (\bar{C})^T \quad (1.2.13)$$

1.2.5 单位并矢 $\bar{I}$

$$\bar{I} = \hat{a}_x \hat{a}_x + \hat{a}_y \hat{a}_y + \hat{a}_z \hat{a}_z \quad (1.2.14)$$

$$\text{即} \quad I_{i,j} = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (i, j = x, y, z) \quad (1.2.15)$$

显然, 有

$$\bar{I} \cdot A = A \cdot \bar{I} = A \quad \text{和} \quad \bar{I} \cdot \bar{D} = \bar{D} \cdot \bar{I} = \bar{D} \quad (1.2.16)$$

故单位并矢 $\bar{I}$ 亦有归本因子之称.

1.2.6 并矢与矢量的叉乘积

并矢 $\bar{D} = AB$, 矢量 C , 则

$$C \times \bar{D} = C \times AB = (C \times A)B, \quad \bar{D} \times C = AB \times C = A(B \times C)$$

故并矢与矢量的叉乘积为一并矢. 显见

$$\bar{D} \times C \neq C \times \bar{D} \quad (1.2.17)$$

而有前乘与后乘之分, 不满足交换律. 类似地, 不难证明并矢与并矢的叉乘积为三矢, 亦不满足交换律.

1.3 标量函数的梯度

物理学中的物理量有标量和矢量. 若某物理量在全部或部分空间中每一点都有确定的值, 即存在有一定的空间分布, 就称为在此空间中建立了该物理量的场, 其数学表示则为标量或矢量的数学函数. 数学上的场就是所有这些物理量的场的抽象. 本节仅考虑标量场.

设 $\phi(x, y, z)$ 是空间位置的函数, 其给定的值为标量, 则此空间称为函数的标量场(例如, 电势、温度等都是标量场). 为便于研究和了解标量场在空间的分布和变化规律, 以下将引入等值面、方向导数和梯度的概念.

1.3.1 等值面

$\phi(x, y, z) = c$ (常数) 代表一曲面, 其上任意一点的函数值均相等, 这样的曲面常称为等值面, 如图 1.3.1 所示. 不同 c 值有不同的等值面, 显然, 它们所确定的曲面簇中任何两个曲面是互不相交的. 事实上, 若 $\phi(x, y, z) = c$ 和 $\phi(x, y, z) = c'$ 两曲面在 (x_0, y_0, z_0) 点相交, 则有 $\phi(x_0, y_0, z_0) = c$ 和 $\phi(x_0, y_0, z_0) = c'$. 于是 $c = c'$, 故两个曲面是重合的, 实际只代表一个曲面. 对于二维情形, 标量场将退化为平面场 $\phi(x, y)$, 而等值面退化为等值线. 等值面的引入可有助于形象地了解物理量在场中总的分布情况, 例如静电场中的等势面有助于了解其中的电势分布.

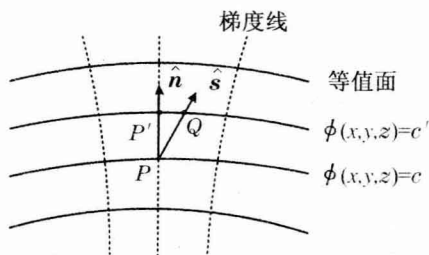


图 1.3.1 等值面和梯度线

1.3.2 方向导数

等值面可形象地了解物理量在场中总的分布情况, 但在研究标量场时, 还常要知道标量函数 $\phi(x, y, z)$ 在场中各个点的邻域内沿每一方向的变化情况. 为此, 需引入方向导数. 参见图 1.3.1, 设位于等值面 $\phi(x, y, z) = c$ 上 $P(x, y, z)$ 点的法线 $\hat{n}$ 与相邻等值面 $\phi(x, y, z) = c'$ ($c' = c + \Delta c$) 相交于 P' 点, 又 P 点沿任意 $\hat{s}$ 方向的直线与之相交于 Q 点.

标量函数 $\phi(x, y, z)$ 在 $P(x, y, z)$ 点沿任意方向 $\hat{s}$ 的方向导数定义为

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \lim_{PP' \rightarrow 0} \frac{\phi_Q - \phi_P}{PQ} \quad (1.3.1)$$

由于 P' 点和 Q 点位于同一曲面上, 故有 $\phi_{P'} = \phi_Q$. 又 $\phi(x, y, z) = c$ 与 $\phi(x, y, z) = c'$ 两等值面相距甚近, 故有

$$PP' = PQ \cos \theta = PQ (\hat{s} \cdot \hat{n}) \quad (1.3.2)$$

这里, θ 为 $\hat{s}$ 与 $\hat{n}$ 之间的夹角; $\hat{n}$ 和 $\hat{s}$ 分别为在 $\phi(x, y, z) = c$ 上沿点 P 法线 $\mathbf{n}$ 与 $\mathbf{s}$ 方向上的单位矢量. 于是 (1.3.1) 式可化为

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \lim_{PP' \rightarrow 0} \frac{\phi_{P'} - \phi_P}{PP'} (\hat{s} \cdot \hat{n}) = \frac{\partial \phi}{\partial n} (\hat{s} \cdot \hat{n}) \quad (1.3.3)$$

式中, $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 为 $\phi(x, y, z)$ 在 $P(x, y, z)$ 点沿 $\mathbf{n}$ (法向) 的方向导数.

1.3.3 梯度

定义 标量函数 $\phi(x, y, z)$ 的梯度为其模等于 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$, 而方向是与 $\hat{n}$ 相同的矢量, 并记之为 $\text{grad } \phi$, 即

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial n} \hat{n} \quad (1.3.4)$$

将(1.3.4)代入(1.3.3)式, 得

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \hat{n} \right) \cdot \hat{s} = \text{grad } \phi \cdot \hat{s} = (\text{grad } \phi)_s \quad (1.3.5)$$

这表明 $\phi(x, y, z)$ 沿 $\hat{s}$ 方向的方向导数等于其梯度矢量在 $\hat{s}$ 方向的分量. 特别是, 当 $\hat{s}$ 分别为直角坐标系中沿三个坐标轴的单位矢量 $\hat{a}_x, \hat{a}_y$ 和 $\hat{a}_z$ 时, 有

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = (\text{grad } \phi)_x, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = (\text{grad } \phi)_y, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = (\text{grad } \phi)_z \quad (1.3.6)$$

故

$$\begin{aligned} \text{grad } \phi &= \hat{a}_x (\text{grad } \phi)_x + \hat{a}_y (\text{grad } \phi)_y + \hat{a}_z (\text{grad } \phi)_z \\ &= \hat{a}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

由(1.3.3)式或图 1.3.1 可看出, 当 $\hat{s}$ 的方向 $\hat{s} \rightarrow \hat{n}$ (梯度方向) 时, $\phi(x, y, z)$ 沿此 $\hat{s}$ 方向的方向导数 $\frac{\partial \phi}{\partial s}$ 的值最大. 这表明梯度方向 $\hat{n}$ 是 $\phi(x, y, z)$ 增加最快的方向, 而 $-\hat{n}$ 方向则是 $\phi(x, y, z)$ 减小最快的方向, 故梯度方向 $\hat{n}$ 是 $\phi(x, y, z)$ 变化最陡的方向. 显然, 当沿 $\phi(x, y, z) = c$ 等值面求方向导数 (此时 Q 点位于等值面上) 时, 而有 $\frac{\partial \phi}{\partial s} = 0$.

今若作 $\phi(x, y, z) = c$ 曲面簇的正交轨线系 (图 1.3.1 中的虚线), 则场中每一点的梯度方向将与这些轨线的切线方向一致, 故此正交轨线也称为梯度线.

现引入矢性微分算子

$$\nabla = \hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.3.8)$$

∇ 称为 Hamilton (哈密顿) 算子 (读作 Nabla 或 Del), 将它直接作用于标量函数 $\phi(x, y, z)$, 则有

$$\nabla \phi = \hat{a}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1.3.9)$$

这正是(1.3.7)式. 因此, 一个标量函数 $\phi(x, y, z)$ 的梯度 $\text{grad } \phi$ 常被写为 $\nabla \phi$, 而