高等学校基础课配套辅导丛书

高等数学

（同济第五版）

同步精讲

下册

组编：恩　波

主编：陈兰祥（同济大学应用数学系）

学苑出版社

高等数学同步精讲

（下　册）

主编：同济大学数学教研室陈兰祥教授

编委：（按姓氏笔画为序）

东　南　大　学　王海燕

同　济　大　学　刘庆生

上海交通大学　李　铮

同　济　大　学　陈兰祥

解放军理工大学　顾宛成

学苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步精讲．下册/陈兰祥主编．－北京:学苑出版社，2002.9

ISBN 7-5077-1938-3

Ⅰ．高…　Ⅱ．陈…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 013276 号

学苑出版社出版发行
北京市万寿路西街 11 号　100036
北京朝阳宏大印刷厂印刷　新华书店经销
850×1168　32 开本　13.625 印张　450 千字
2003 年 2 月北京第 2 版　2003 年 2 月北京第 1 次印刷
印数:8001—20000 册　上下册总定价:27.00 元(本册:13.50)

内 容 提 要

本书是根据全国工科院校高等数学教学大纲和研究生入学考试高等数学考试要求编写的。

本书可供理、工、医、农(非数学专业)大学生学习高等数学同步复习使用,也可供参加硕士研究生入学考试的考生复习使用。另外也可作为从事高等数学教学的教师和非数学专业的研究生的参考书。

前 言

高等数学课程对于大学生的重要性是不言而喻的，已出版的多种高等数学复习参考书和习题解答曾给予了广大学生众多的帮助。然而，一方面近年来由于教学改革的实施，高等数学授课时间有所减少，受到时间限制，概念的深入探讨，知识点的融会贯通，知识面的拓展势必受到一定影响；另一方面后续课程以及研究生入学考试对高等数学的要求有在教学大纲范围内深化的趋势。

为解决这一新的矛盾，我们根据在同济大学、交通大学、东南大学、中国人民解放军理工大学多年的教学实践以及研究生高等数学入学考试辅导的经验，听取了广大学员的意见，决定编写一本与新近出版的《高等数学》(同济第五版)配套的同步辅导读物。

全书分上、下两册出版，其章节次序、术语、符号均参照前述《高等数学》(同济第五版)。书以讲清讲透基本概念为主线，同时介绍与其相关的各种典型例题，并通过综合例题的讲解和综合练习的训练提高学生分析解决问题的能力。

在使用该书时我们有以下建议：

1. “基本概念”以框图形式列出，是全书的精髓，要求逐字逐句深刻理解，并在理解基础上随时都能正确表达。

2. 各章的“知识网络图”指出了各知识点的有机联系，应该予以充分理解。

3. “概念的内涵，重点和难点”在于帮助读者深入理解基本概念，抓住事物的主要矛盾，理清思路。

4. “典型例题解析”中介绍了与基本概念有关的各种题型。

在学习时应带着三个问题去思考：

① 这种题型是怎样提出的?

② 它反映了基本概念的什么内涵?

③ 用什么途径解决的。

5. "综合例题"是涉及多个知识点的题目,其中包括了同济五版教科书中的大部分难题和部分研究生入学试题。在学习时应着重考虑该题目究竟与那些知识点相关连,是如何解决的,这对于基本理论的融会贯通,解题方法的举一反三,分析、解决问题的能力的提高会起到十分重要的作用。

6. "综合练习"是供学员自我考核的。参考答案应该在独立思考解题以后再予以核对检查。

全书由同济大学应用数学系陈兰祥教授主编。下册由同济大学陈兰祥、刘庆生、上海交通大学李铮、东南大学王海燕、中国人民解放军理工大学顾宛成执笔共同编写。

由于是多位编者合作撰写,各自章节安排和风格可能略有不同,虽经协调,仍存在一定差异在所难免。另外由于编者的水平所限,难免有错误与不妥之处。欢迎来信批评指正。

本书的出版,如果能对广大学生在高等数学的学习和复习过程中达到节约复习时间,加深理解基本概念,拓宽解题思路和提高分析解决问题的能力有所帮助,就是对我们工作的最大安慰。

编者

目　　录

第八章　多元函数微分法及其应用

本章主题词

多元函数、定义域、极限、连续、偏导数、全微分、多元复合函数偏导数、隐函数偏导数、曲线的切线与法平面、曲面的切平面与法线、方向导数、梯度、多元函数的极值、条件极值与拉格朗日乘数法.

本章大纲要求

1. 了解多元函数的概念及多元函数赖以建立的 n 维空间点集的概念、性质.

2. 了解二元函数极限与连续概念,掌握有界闭区域上二元连续函数的性质、全微分存在的充分条件与必要条件,了解二元函数连续、存在偏导与可微之间的关系.

3. 熟练掌握偏导数的定义与求法,特别要注意掌握复合函数与隐函数偏导数的求法.会求函数的全微分.

4. 熟练掌握空间曲线的切线与法平面方程、曲面的切平面与法线方程的求法.会解有关的几何应用题.

5. 熟练掌握二元函数极值的理论及其求法,会用拉格朗日乘数法求多元函数的条件极值以及有关应用题.

6. 了解方向导数和梯度的概念及它们的计算方法.

本章知识网络图

- 多元函数微分法及其应用
  - 多元函数的极限与连续性
    - 平面点集，n 维空间，多元函数概念，定义域
      函数 $z=f(x,y)$ 的图像
    - 极限
      - 极限的定义　二重极限
      - 极限的性质
    - 连续
      - 连续函数的定义，连续与极限的关系
      - 有界闭域上连续函数的若干性质
  - 偏导数与全微分
    - 概念
      - 偏导数
      - 全微分
      - 方向导数，梯度
      - 高阶偏导数
    - 微分法与性质
      - 关系：有连续偏导⇒可微分 $\nearrow$ 偏导数存在，$\searrow$ 连续
      - 求导法
        - 复合函数微分法
        - 隐函数微分法
          - 一个方程的情况
          - 方程组的情况
  - 多元函数微分学的应用
    - 几何应用
      - 空间曲线的切线与法平面
      - 空间曲面的法线与切平面
    - 多元极值
      - 无条件极值，二元函数极值的充分
        条件和必要条件
      - 条件极值与拉格朗日乘数法

第一节　多元函数的基本概念

【基本概念】

表 1.1　平面点集的初步概念

<table>
<tr><th colspan="2">名　称</th><th>定　义</th><th>说　明</th></tr>
<tr><td colspan="2">平面点集</td><td>坐标平面上具有某种性质 p 的点的集合，称为平面点集，记作
$E=\{(x,y)\mid(x,y)$具有性质 $p\}$.</td><td>坐标平面表为二维数组 (x,y) 的全体 $R^2=R\times R$
$=\{(x,y)\mid x,y\in R\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">P_0 的邻域 $U(P_0,\delta)$（或简记为 $U(P_0)$）</td><td>与平面定点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于 δ $(\delta>0)$ 的点 $P(x,y)$ 的全体，称为点 P_0 的 δ(圆形)邻域，记作
$U(P_0,\delta)=\{P \mid |P_0P|<\delta\}$ 或
$U(P_0)$ 即 $U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$.</td><td>几何上表示平面上以点 P_0 为中心，$\delta>0$ 为半径的圆内部的点 $P(x,y)$ 的全体.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">与点集有各种不同关系的点</td><td>内点</td><td>若存在点 P_1 的某邻域 $U(P_1)$，使 $U(P_1)\subset E$，则称 P_1 为点集 E 的内点.</td><td>指能找到(大小不限) $\varepsilon>0$，使整个邻域 $U(P_1,\varepsilon)$ 全在 E 内的点 P_1.</td></tr>
<tr><td>外点</td><td>若存在点 P_2 的某邻域 $U(P_2)$，使得 $U(P_2)\cap E=\varnothing$，则称 P_2 为点集 E 的外点.</td><td>显然，集 E 的外点 $P_2\notin E$，即外点 P_2 不在集内.</td></tr>
<tr><td>边界点</td><td>若点 P_3 的任何邻域内既含有集 E 的点，又含有非 E 的点，则称 P_3 为集 E 的边界点.</td><td>边界点可能属于集 E，也可能不属于集 E.</td></tr>
<tr><td>聚点（极限点）</td><td>若对任意给定的 $\delta>0$，去心邻域 $\mathring{U}(P,\delta)$ 内总有 E 的点，则称 P 是 E 的聚点，或极限点.</td><td>聚点可属于集 E(如 E 的内点等)，也可不属于 E(如 E 的边界点中非 E 的点).</td></tr>
</table>

续表

名称		定义	说明
一些重要的平面点集	开集	若点集 E 的所有点都是内点，则称 E 为开集.	开集由内点组成，不含边界点.
	闭集	若点集 E 的余集 E^C 为开集，则称 E 为闭集.	闭集包含全部聚点. 包括内点及非孤立的边界点.
	连通集	若集 E 中任何两点均可用完全位于 E 中的折线连接起来，则称 E 为连通集.	集中任何两点均可经内部通道到达（未被"鸿沟"隔开）.
	区域	连通的开集称为区域或开区域.	具"连通"、"开集"双性.
	闭区域	（开）区域 D 加上它的边界所成的点集称为闭区域或闭域，记为 $\overline{D}$.	注意闭区域一般已不属于区域了. 闭区域与闭集也有区别. 闭域是闭集的特别情形.
	有界集	若对平面点集 E，存在 $\gamma>0$，使得 $E\subset U(0,r)$，则称 E 为有界集.	能含在原点为中心的某个圆内的集为有界集.
	无界集	不是有界集的集合称为无界集.	
	导集	集 E 的全体聚点所成的集称为 E 的导集，记为 E'.	

表 1.2　n 维空间的初步概念

名称、记号	定义或表示式	说明
$\boldsymbol{R}^n$	n 元有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(n\in N)$ 的全体所成的集会记为 $\boldsymbol{R}^n$，即 $\boldsymbol{R}^n=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\times\cdots\times\boldsymbol{R}$ $=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\boldsymbol{R},$ $i=1,2,\cdots,n\}$.	$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 也称为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个点。$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为其坐标，如 (x_1,x_2) 即平面点，(x_1,x_2,x_3) 即空间点.

续表

名称、记号		定义或表示式	说　明
n 维向量		n 元数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$用一个黑体字母(或带箭头的字母)表示就称为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个 n 维向量,即 $\boldsymbol{x}=\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.	$\vec{x}=(x_1,x_2)$即平面向量, $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$即空间向量.
线性运算	加法	设$\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$、$\vec{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\boldsymbol{R}^n$,规定$\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_2,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$.	$n=2,3$ 时即平面上、空间中向量的线性运算.
	数乘	$\lambda\vec{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n),\lambda\in\boldsymbol{R}$.	
n 维空间		定义了线性运算的集合 $\boldsymbol{R}^n$ 称为 n 维空间	
距离 $\rho(X,Y)$		设 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\boldsymbol{R}^n$,规定点 X 和 Y 的距离为 $\rho(X,Y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$	$n=1,2,3$ 时即数轴、平面上、空间中两点的距离.
$\Vert X\Vert$ (向量 X 的范数)		$\boldsymbol{R}^n$ 中向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与零向量 $O=(0,0,\cdots,0)$的距离 $\rho(X,0)$记作 $\Vert X\Vert$,即 $\Vert X\Vert=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$.	$\boldsymbol{R}^1,\boldsymbol{R}^2,\boldsymbol{R}^3$ 中的 $\Vert X\Vert$ 通常写为 $\vert x\vert$.
$\Vert X-Y\Vert$		$\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)+\cdots+(x_n-y_n)^2}=\rho(X,Y)$.	结合向量的线性运算可得.
$X\to\boldsymbol{a}$ (变元的极限)		设 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\boldsymbol{R}^n$,若 $\Vert X-\boldsymbol{a}\Vert\to 0$,则称变元 X 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中趋向固定元 α,记作 $X\to a$.	显然 $X\to\boldsymbol{a}\Leftrightarrow x_1\to a_1,x_2\to a_2,\cdots,x_n\to a_n$.
$U(\boldsymbol{a},\delta)$ ($\boldsymbol{R}^n$ 中的邻域)		设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\boldsymbol{R}^n,\delta>0$,则定义 $\boldsymbol{R}^n$ 中点 $\boldsymbol{a}$ 的 δ 邻域为 $U(\boldsymbol{a},\delta)=\{X\mid X\in\boldsymbol{R}^n,\rho(X,\boldsymbol{a})<\delta\}$	由此,平面点集中的其他概念也可推广到 $\boldsymbol{R}^n$ 中来.

表 1.3　多元函数概念

名　称	定义或规定	说　明
二元函数	设 D 是 $\boldsymbol{R}^2$ 的一个非空子集，称映射 f: $D\to\boldsymbol{R}$ 为定义在 D 上的二元函数，通常记为 $Z=f(x,y),(x,y)\in D$. 或 $Z=f(P),P\in D$. 其中 D 称为函数的定义域，x、y 称为自变量，Z 称为因变量.	函数记号 f（即映射记号）可改选其他字母，但选定后在同一问题中不再变更.
值域 $f(D)$	函数值 $f(x,y)$ 的全体所构成的集合记作 $f(D)$，称为 f 的值域，即 $f(D)=\{Z\mid Z=f(x,y),(x,y)\in D\}$.	值域 $f(D)$ 是 D 在映射 f. $D\to\boldsymbol{R}$ 下的“象”集.
二元函数的图形	设二元函数 $Z=f(x,y)$ 的定义域为 D. 则空间点集 $\{(x,y,z)\mid Z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为二元函数 $Z=f(x,y)$ 的图形.	二元函数的图形通常是空间的一张曲面.
n 元函数	设 D 为 n 维空间 $\boldsymbol{R}^n$ 内的点集，称映射 f:$D\to\boldsymbol{R}$ 为定义在 D 上的 n 元函数，通常记为 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$. 或简记为 $u=f(X),X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$. 也可记为 $u=f(P),P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$.	$n=2$ 和 3 时即为二元函数 $Z=f(x,y)$ 和三元函数 $u=f(x,y,z)$.
自然定义域	使多元函数算式 $u=f(X)$ 有意义的变元 X 的值组成的集合.	这与一元函数情形类似.

表 1.4　多元函数的极限与连续性

名　称		基　本　内　容
多元函数的极限	二重极限的定义	设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D, $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点,若存在常数 A,存在 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $0<\mid PP_0\mid=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时都有 $\mid f(p)-A\mid=\mid f(x,y)-A\mid<\varepsilon$ 成立,则称 A 是 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时 $f(x,y)$ 的二重极限(简称极限)记作 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 或 $f(x,y)\to A((x,y)\to(x_0,y_0))$ 也简记为 $\lim\limits_{p\to p_0} f(p)=A$ 或 $f(p)\to A(p\to p_0)$.
	性质	当 $\lim\limits_{p\to p_0} f(p)=A$, $\lim\limits_{p\to p_0} g(p)=B$. 极限存在时 1. $\lim\limits_{p\to p_0}(f(p)\pm g(p))=\lim\limits_{p\to p_0} f(p)\pm\lim\limits_{p\to p_0} g(p)=A\pm B$. 2. $\lim\limits_{p\to p_0}(f(p)\cdot g(p))=\lim\limits_{p\to p_0} f(p)\cdot\lim\limits_{p\to p_0} g(p)=A\cdot B$. 3. $B\neq 0$ 时, $\lim\limits_{p\to p_0}\dfrac{f(p)}{g(p)}=\dfrac{\lim\limits_{p\to p_0} f(p)}{\lim\limits_{p\to p_0} g(p)}=\dfrac{A}{B}$. 4. 若 $A>0$ 时,则 $\exists\,\delta>0$,当 $0<\mid pp_0\mid<\delta$ 时, $f(p)>0$.
多元函数的连续性	定义	设二元函数 $f(p)=f(x,y)$ 的定义域为 D, $p_0(x_0,y_0)$ 为 D 内的聚点,且 $p_0\in D$,若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$ 则称 $f(x,y)$ 在 $p_0(x_0,y_0)$ 连续.
	性质与定理	1. 若 $f(p)$, $g(p)$ 在 p_0 连续,则 $f(p)\pm g(p)$, $f(p)\cdot g(p)$ 在 p_0 连续,当 $g(p_0)\neq 0$ 时, $f(p)/g(p)$ 在 p_0 连续. 2. $g(u)$ 在 u_0 连续, $u_0=f(p_0)$, $f(p)$ 在 p_0 连续,则 $g(f(p))$ 在 p_0 连续. 3. $f(p)$ 在有界闭域 D 上连续,则 (1) $f(p)$ 在 D 上能取到最大与最小值. (2) $f(p)$ 在 D 上能取到最大值与最小值之间的一切实数. 4. 多元初等函数在定义区域内连续.

【概念的内涵、重点及难点】

1. 平面点集是二元函数自变量 x、y 的变化域，换句话说，二元函数的定义域是某个平面点集. 二元函数、平面点集基本概念的名称和符号几乎都不要变动就可以推广到 n 元函数、n 维空间的相应概念上去. 而 n 维空间是近代数学的基础概念之一. 现代科学技术越来越需要近代数学乃至现代数学作为其得力工具，人们在现代科技文献中也乐于采用现代数学的术语、符号来抽象概括地表述精湛的高科技内容。所以平面点集、n 维空间基本概念的重要性是不言而喻的. 表 1.1～1.2 列出的仅是这方面的初步概念，读者首先应当分清与点集有不同关系的各种点以及几种重要的平面点集的性质、相互关系与区别. 其中特别对区域和聚点要有清楚的认识. 聚点还是较难理解的概念. 下面再对聚点加一些说明.

聚点 P 的定义是说；P 的去心邻域内总有点集 E 的点，则称 P 是 E 的聚点. 这相当于说，聚点的邻域内至少有一个异于聚点的属于 E 的点，这还等价于说，聚点的邻域内含有集 E 的无穷多个点(想想看，这是为什么?). 由此也就知道聚点名称的由来了.

聚点的定义也可用它的上述等价说法来给出，聚点也可先于其他“点”而定义，这样也可用聚点来说明别的点和某些点集. 如：(1) 若 $P\in E$，但 P 非 E 的聚点，则称 P 为 E 的孤立点，(2) 若 $P\notin E$，又非 E 的聚点，则称 P 为 E 的外点，(3) 若点集 E 的每个聚点皆属于 E，则称 E 为闭集，等等. 这样，包括聚点在内，我们对平面点集也就有更清楚的认识了.

2. 对多元函数的讨论和认识，主要以二元函数为主，最基本的是要了解清楚二元函数的定义域和 $Z=f(x,y)$ 与它在空间所表示的曲面之间的联系(对 $n\geqslant 3$，n 元函数不能象一元、二元函数那样有直观的几何图形表示)这些是学习多元函数的微分学和积分学的重要基础.

3. 在极限问题上，多元极限与一元函数极限有很大的不同. 例如对二元函数极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$，变量 $\begin{matrix}x\to x_0\\ y\to y_0\end{matrix}$ 作为记号表示 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$，它是表征平面点 $P(x,y)$ 以任意不同方式按距离 $|PP_0|$ 趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 有否确定的趋向值. 我们应该避免选择特殊的路径来代替沿任意路径求二重极限，例如 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x,y)=A$ 及 $\lim\limits_{\substack{x=0\\ y\to 0}} f(x,y)=A$. 说明变量沿着直线

路径趋向坐标原点时极限都是 A，但是这并不能说明函数在坐标原点的极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 存在，事实上变量还可以以其它的方式趋向于原点. 不过我们在证明二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 不存在时，却可以选择 $P(x,y)$ 以不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时函数趋于不同的值来断定这函数的极限不存在.

4. 极限与连续的一个主要的差别是极限点（即聚点）$P_0(x_0,y_0)$ 的情况，极限的讨论不涉及该点，甚至该点可以无定义. 但连续性则要求聚点（极限点）必须在定义域内. 当然，聚点处的函数值也恰好是极限值才满足连续性的要求.

5. 与一元函数在闭区间上连续具有的性质类似，多元函数在有界闭区域上连续也有最大最小值及介值定理，应用这两个性质解答证明题是一个难点，应当充分理解这两个性质的条件和结论，现在将它们再作表述如下：

$f(p)$ 在有界闭域 D 上连续，那么有：

(1) 存在 $p_1, p_2\in D$ 使 $f(p_1)=m$ 是 D 上的最小值，$f(p_2)=M$ 是 D 上的最大值，即，对任意 $p\in D$ 有 $f(p_1)\leqslant f(p)\leqslant f(p_2)$.

应用：$f(p)$ 在 D 上有界

(2) 对任意实数 c，$m\leqslant c\leqslant M$，存在 $p\in D$ 使得 $f(p)=c$

应用：若有 $f(p_1)\cdot f(p_2)<0$，则存在 $p\in D$ 使得 $f(p)=0$.

6. 对于如下极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}$，有的教材认为极限不存在，因为 $\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$ 在 $\mathring{U}((0,0),\delta)$ 内 $x=y$ 的点上无定义，故不满足极限定义的条件，而另一些教材则将上述极限视为在 $\mathring{U}((0,0),\delta)$ 上有定义的点集上讨论的极限. 下面就极限问题列出两个常见的定义.

定义 1　$z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义（除 p_0 外），如果对任一 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

那么 A 就称为 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的极限.

定义 2　$f(x,y)$ 的定义域为 D，(x_0,y_0) 是 D 的聚点，（即对任意 $\delta>0$，$\mathring{U}((x_0,y_0),\delta)$ 内含有 D 的点）. 如果任一 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $(x,y)\in D$ 且 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$，那么 A 就称为 $f(x,y)$ 在