

高等学校教材

有限单元法基础 及MATLAB编程

王焕定 陈少峰 边文凤 编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

有限单元法基础 及MATLAB编程

王焕定 陈少峰 边文凤 编著

YOUXIAN DANYUANFA JICHU JI MATLAB BIANCHENG



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是作者根据几十年的教学体会并结合工程实际编写而成的。全书重点突出、实例丰富,其基本理论与编程相互衔接,并配以详细的MATLAB有限元程序注释,将汉化和调试通过的函数程序做成MATLAB有限元工具箱,以便于学习应用。

全书共分12章,包括绪论、MATLAB预备知识、弹性力学相关预备知识、杆件体系结构有限元分析、杆件体系结构有限元分析的MATLAB编程、平面问题有限元分析、形函数、应变矩阵及应力矩阵的MATLAB程序、平面问题有限元分析编程、空间与轴对称问题、空间与轴对称问题的MATLAB编程、弹性板壳有限元分析初步、弹性板壳结构有限元分析的MATLAB编程、有限元逐步精细化分析的若干问题。

本书可供力学、土木、交通、水利、机械、材料等专业的本科高年级教学使用,也可作为研究生和有关工程技术人员学习有限单元法及编程的入门参考书。

图书在版编目(CIP)数据

有限单元法基础及 MATLAB 编程 / 王焕定, 陈少峰,
边文凤编著. —北京: 高等教育出版社, 2012.1

ISBN 978-7-04-034013-6

I. ①有… II. ①王…②陈…③边… III. ①有限元
法 - 计算机辅助计算 - 软件包, MATLAB - 高等学校 - 教材
IV. ①0241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 274389 号

策划编辑 黄强
责任校对 杨凤玲

责任编辑 黄强
责任印制 刘思涵

封面设计 王 雱

版式设计 马敬茹

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 山东鸿杰印务集团有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 29.5
字 数 540千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 2012年1月第1版
印 次 2012年1月第1次印刷
定 价 45.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 34013-00

前 言

20 世纪 80 年代以来,我国高等学校纷纷在力学、土木、水利、交通工程等专业的本科教学计划中,将有限单元法列入了选修课。作为 21 世纪的工程技术人员,只会使用上市的商用软件进行设计,不懂这些计算设计软件核心的有限单元法知识,没有任何编程能力,是不能满足 21 世纪对人才培养的要求的。基于这样的思想,我们编写了这本集基本理论、原理、方法和程序编制与应用等内容于一体的本科生教材。

本书内容分为 12 章,主要包括绪论、MATLAB 预备知识、变形体虚位移原理、杆系结构单元分析和整体分析、弹性力学平面问题有限元、空间问题与轴对称问题以及弹性板壳有限元分析初步。从杆件体系结构开始,每一类问题的理论内容都有一章 MATLAB 程序与之对应,最后对有限元精细化分析的若干问题进行了探讨。从教学需要考虑,要想深入理解和掌握弹性力学及 MATLAB 的相关知识,需要进一步学习相关的书籍、资料。本书作为有限单元法原理和编程的入门教材,所涉及的基本知识在第 2、3 章做了必要的铺垫,对学习本书是基本够用的。

作为有限单元法原理及编程的教材,从杆系结构有限单元法开始讲解是合适的。如果读者没有学过结构力学的矩阵位移法,当使用本教材时,不仅可以掌握有限单元法的基本原理,也可以达到结构力学对这部分内容的基本要求。对于已经学过并较好掌握矩阵位移法的读者,可以跳过第 4、5 章。由于 MATLAB 程序的前后一致性,建议读者还是阅读一下第 5 章的程序为好。

长期的教学经验表明,只学有限单元法原理而不涉及程序的实现,多数读者都难以切实掌握有限单元法。遇到现有软件不能解决的问题时,或者束手无策,或者凭想当然建模,用现有软件进行分析,其结果的科学性、可靠性就很难保证。在了解原理的基础上,配合程序的阅读,自行编调一些小的程序,对切实掌握有限单元法,确保分析的科学性、可靠性是必不可少的。作为工程与科学计算的计算机高级语言,FORTRAN 无疑是最好的。但是,由于 MATLAB 计算功能强大、丰富方便的图形功能、编程效率高、扩充能力强、语句简单、易学易用的突出优点,为工程与科学的计算提供了极大的方便,学习和掌握 FORTRAN 比 MATLAB 相对来说要困难,因此本书选用 MATLAB 作为语言工具,讲解有限单元法原理

II 前 言

的具体程序实现。

本书所涉及的全部程序源代码均在 MATLAB R2010b 下经过严格测试,它们与部分超出本书有限单元法基础内容的程序源代码一起均放在下列网站上,以便读者学习参考和应用:

http://civil.hitwh.edu.cn/news_more_list.asp?id=5

本书中有限单元法基本原理部分取自王焕定、焦兆平编著的《有限单元法基础》(高等教育出版社),为了结合编程,做了许多修改与补充,并参考和借鉴了国内外部分优秀教材。全书由王焕定指导编写、负责统稿,王焕定负责编写第1、3、4、5、12章和第8章部分内容,此外还对部分源代码进行了转换及调试,陈少峰负责大部分源代码的转换、汉化和调试及第2章的编写,第6、7章由边文凤编写,第8、9章由陈再现编写,第10、11章由曾森编写。浙江大学徐荣桥教授审阅了全稿,并提出了很好的意见和建议,对提高本书的质量帮助很大,对此我们深表感谢。

本书尽量考虑了面向大多数读者,尽可能深入浅出,力求做到概念清晰、层次分明,使之便于学习、便于教学。虽然每一位作者都竭尽全力,力争能达到上述目标,但限于能力和水平,书中不当之处敬请读者批评指正。

作 者

2011年6月

目 录

第 1 章 绪论	1
§ 1-1 引言.....	1
§ 1-2 有限单元法的分析过程.....	3
§ 1-3 有限单元法发展概况.....	6
§ 1-4 学习指导.....	9
第 2 章 MATLAB 预备知识	12
§ 2-1 MATLAB 基础知识	12
§ 2-2 MATLAB 编程基础	26
§ 2-3 MATLAB 符号运算简介	41
第 3 章 弹性力学相关预备知识	50
§ 3-1 弹性力学的基本方程及其矩阵表示	51
§ 3-2 变形体虚位移原理	57
§ 3-3 最小势能原理及里茨法	61
*§ 3-4 加权余量法	66
§ 3-5 结论与讨论	68
第 4 章 杆件体系结构有限元分析	71
§ 4-1 引言	71
§ 4-2 等截面直杆细长单元的分析	78
§ 4-3 杆件体系结构整体分析.....	105
§ 4-4 约束条件的处理.....	125
§ 4-5 刚度矩阵的存储.....	129
§ 4-6 结论与讨论.....	132
第 5 章 杆件体系结构有限元分析的 MATLAB 编程	139
§ 5-1 桁架结构分析 MATLAB 程序	139
§ 5-2 刚架结构.....	153
第 6 章 平面问题有限元分析	172
§ 6-1 引言.....	173
§ 6-2 常应变三角形单元.....	174

II 目 录

§ 6-3	双线性矩形单元	187
§ 6-4	平面等参数单元	192
§ 6-5	形函数、应变矩阵及应力矩阵的 MATLAB 程序	208
*§ 6-6	Wilson 非协调元	216
§ 6-7	结论与讨论	219
第 7 章	平面问题有限元分析编程	223
§ 7-1	平面问题的 MATLAB 函数程序及注释	224
§ 7-2	平面问题主体 MATLAB 程序及注释	243
§ 7-3	平面问题的 MATLAB 程序应用例题	249
* 第 8 章	空间与轴对称问题	260
§ 8-1	空间问题	261
§ 8-2	轴对称问题	285
§ 8-3	结论与讨论	298
第 9 章	空间与轴对称问题的 MATLAB 编程	301
§ 9-1	轴对称弹性实体的轴对称程序应用	301
§ 9-2	轴对称弹性实体的非轴对称荷载 MATLAB 程序	304
§ 9-3	三维实体单元的程序及应用举例	312
§ 9-4	考虑自重的平面、轴对称及空间问题的程序分析	324
第 10 章	弹性板壳有限元分析初步	337
§ 10-1	弹性薄板基本理论	337
§ 10-2	矩形(12 自由度, R12)薄板单元分析	340
§ 10-3	柱壳分析的矩形平面壳体单元	355
*§ 10-4	考虑横向剪切变形的薄板弯曲单元	362
*§ 10-5	其他板壳单元	371
§ 10-6	结论与讨论	390
第 11 章	弹性板壳结构有限元分析的 MATLAB 编程	394
§ 11-1	R12 板元分析薄板结构的 MATLAB 程序	395
§ 11-2	R16 板元分析薄板结构的 MATLAB 程序	403
§ 11-3	平面壳元分析柱壳结构的 MATLAB 程序	412
*§ 11-4	中厚度板分析的 MATLAB 程序	419
* 第 12 章	有限元逐步精细化分析的若干问题	429
§ 12-1	实际结构有限元逐步精细化分析的简要说明	430
§ 12-2	结构静力分析的逐步精细化简要说明	431
§ 12-3	实际结构分析中的若干问题	442

§ 12-4 结论与讨论	450
附录 1 程序参量说明	452
附录 2 函数与程序功能说明	457
参考文献	463

第 1 章

绪 论

§ 1 - 1 引言

有限单元法最初作为结构力学位移法的拓展,它的基本思路是将复杂的结构或物体看成由有限数目的单元体彼此仅在结点处相联系而构成的集合体。首先,对每一个单元分析其特性,建立相关物理量之间的相互联系;然后,依据单元之间在结点处的联系,再将各单元组装成整体,从而获得整体特性方程;最后,应用与所得方程相应的解法,即可完成整个问题的分析。这种先“化整为零”,然后再“集零为整”和“化未知为已知”的研究方法,是有普遍意义的,是科学研究的基本方法之一。

有限单元法作为一种近似的(除杆件体系结构静力分析外)数值分析方法,它借助于矩阵等数学工具,尽管计算工作量很大,但是分析流程是一致的,有很强的规律性和统一的模式,因此特别适合于编制计算机程序来处理。一般来说,一定前提条件下分析的近似性,随着离散化单元网格的不断细化,计算精度将随

之提高。随着计算机软硬件技术的飞速发展,有限单元分析技术得到了越来越多的应用,五十多年来的发展几乎涉及了各类科学、工程领域中的问题。从应用的深度和广度来看,有限单元法的研究和应用正继续不断地向前探索和推进。

学习有限单元法当然首先要掌握其基本原理,但更重要的是要学会应用。这就必须掌握如下两方面的知识:如何建模;如何判断计算结果正确与否,以及如何利用计算成果。

随着科学技术的不断发展,对计算精度的要求越来越高,对可能影响计算结果的方方面面考虑得越来越多、越来越细,原来受到计算条件限制所建立的简化计算简图必须重新审视其适用性,为了满足“精细化分析”的要求,无疑首先应该更合理地确定所求解对象的计算模型——建模。严格地说科学合理的建模是一个反问题,它应该根据实际测试所获得“响应”结果来确定,这是目前科学与工程领域热门的研究课题之一。

现在各学校、单位都已购买诸如 ANSYS、NASTRAN、SAP、ABAQUS、ADINA 等大型有限单元法商用软件之一或者多个。这些商用软件经过不断地发展功能都非常强大,使用手册也越来越厚。因为这些软件都是根据“有限元”(这里是指广义的有限元,包括近年发展起来的各种数值求解技术)原理来实现的,虽然可以将原理及其程序实现当“黑盒子”看待来应用它们,而且这对一些直接可以按手册依葫芦画瓢的问题来说,正确应用的可能性还是很大的,但是,对于要进行“精细化分析”的问题和对于一些并不能直接依葫芦画瓢的问题来说(手册不可能考虑到所有可能遇到的情况,更不可能提前为有待研究的问题提供求解程序),不深入掌握有限单元法原理及具体的程序实现技术,错误或不当应用商用软件的可能性同样也是很大的。为了更好地正确掌握这些大型商用软件的应用,我们越来越意识到在了解有限单元法基本原理的基础上,掌握一些根据有限元基本原理用计算机高级语言编制程序的初步知识是十分必要的。此外,对小问题,也大可不必要用大型商用软件这把“牛刀”来解决,可以自行编制程序来计算。这不仅可以进一步提高自己的能力,使知识掌握得更扎实,也更易驾驭计算结果直至合理应用计算成果。

英国学者 I. M. Smith 和美国学者 D. V. Griffiths 合著的《Programming the Finite Element Method》于 2004 年修订出版了第 4 版,所有程序改用 FORTRAN 95 编写。由于该书深入浅出、内容丰富,故被翻译成多国语言。该书的 Source 资料中给出了各章的例题及计算结果,三个源代码库(Geom、Main 和 Parallel)包含全书内容的所有调试通过的源代码,是学习和自行组合建立专用有限单元法程序很好的参考资料。因此;我们结合《有限单元法基础》(王焕定、焦兆平,高等教育出版社)的教学内容,将本书所涉及的 Geom 和 Main 库中的 FORTRAN 源

代码,转换成了 MATLAB 函数并在 MATLAB R2010b 下通过调试、验证(必须注意,由于一些语法的规定与 MATLAB 低版本不同,因此有的程序在低版本下可能不能运行)和进行了汉化处理,这些源代码都作为附书光盘提供给读者。今后还将进一步扩充源代码库,将其做成一个“有限单元法工具箱”以便读者应用和补充,使其成为一个开放式代码库。

基于上述想法,我们在《有限单元法基础》一书的基础上,应用 MATLAB 语言,补充介绍如何根据有限单元法原理来实现有限元的具体计算,编写了本书内容以供初学者学习参考。

最后需要说明的是,对初次接触有限单元法的读者来说,绪论中的一些内容难以理解是正常的。因此读者学习本章以下内容时,只要了解本课程主要内容是什么、学习中应注意什么也就够了,不必过于考虑其中一些暂时难以理解的概念。

§ 1-2 有限单元法的分析过程

土木工程、岩土工程等学科中的弹塑性、黏弹性、黏塑性力学,水利、码头工程等的流体力学和流体-固体耦合作用,交通和桥隧工程等中的层状介质路面力学、大型桥梁结构分析等都是力学学科的重要分支,其研究结果最终归结为求解数学物理方程边值或初值问题。但遗憾的是这些学科传统的研究结果只对较为简单、规则的问题才能获得解析解答,大量的实际科学、工程计算问题,由于数学上的困难无法得到解决。

从有限单元法正式提出至今已经经历了半个多世纪的发展。用有限单元法来解决问题,从理论上讲,无论是简单的一维杆件体系结构,还是承受复杂荷载和不规则边界情况的二维平面、轴对称问题、三维空间块体等问题的静力、动力和稳定性分析,考虑材料具有非线性力学行为和有限变形的分析,温度场、电磁场,流体、液-固、结构与土壤相互作用等工程复杂问题的分析都可以得到满意的解决,而其基本思路和分析过程是基本相同的。作为本科教材,本书只介绍应用最广泛的、以结点位移作为基本未知量的“位移型有限元”,简称“位移元”,讨论范围仅限于最基本的线弹性问题。

1-2-1 结构离散化

应用有限单元法来分析工程问题的第一步是将结构进行离散化。其过程就是

将要分析的结构对象(或更数学化一点也可称为求解域)用一些假想的线或面进行切割,使其成为具有选定切割形状的有限数量的单元体(注意单元体和材料力学中的微元体是根本不同的,它的尺度是有限值而不是微量)。这些单元体被认为仅在单元的一些指定点相互连接,这些单元上的点称为单元的结点。这一步的实质是用单元的集合体来代替原来要分析的结构或物体。

为便于理论推导和用计算程序进行分析,一般来说结构离散化的具体步骤是:建立单元和整体坐标系,对单元和结点进行合理编号,为后续有限单元法分析准备出所必需的数据化信息。目前市面上的各种类型有限单元法商用分析软件,一般都具有友好的用户图形界面和图形直观输入、输出计算信息的强大功能,使用者应用这些软件越来越方便。使用这些大型软件的第一步“建模”工作,实际上就是建立离散化模型和准备所需的数据。

1-2-2 确定单元位移模式

结构离散化后,接下来的工作就是对结构离散化所得到的任一典型单元进行所谓单元特性分析。为此,对位移元来说,首先必须对该单元中任意一点的位移分布做出假设,即在单元内用只具有有限自由度的简单位移模式代替真实位移,就是将单元中任意一点的位移近似地表示成该单元结点位移的函数,该位移称为单元的位移模式或位移函数。位移函数的假设合理与否,将直接影响有限单元法分析的计算精度、效率和可靠性。有限单元法发展初期常用的方法是以多项式作为位移模式,这主要是因为多项式的微积分运算比较简单。而且从泰勒级数展开的意义来说,任何光滑函数都可以用无限项的泰勒级数多项式来展开,当单元尺度趋于微量时,多项式的位移模式趋于真实位移。位移模式的合理选择,是有限单元法的最重要的内容之一。所谓创建一种新型的单元,位移模式的确定是其核心内容。本书后续各章将结合具体的单元对其进行较详细的讨论。

不管哪类位移元,采用矩阵符号并建立相应的矩阵方程,单元中任意一点的位移矩阵 d ,均可用该单元结点位移排列成的矩阵(称为单元结点位移矩阵) δ 来表示:

$$d = N\delta. \quad (1-1)$$

式中, N 称为形函数矩阵,其元素是坐标的函数。

1-2-3 单元特性分析

确定了单元位移模式后,就可以对单元作如下三方面的工作:

(1) 求应变

利用应变和位移之间关系即几何方程,将单元中任意一点的应变 ϵ 用待定的单元结点位移 δ_e 来表示,也即建立如下的矩阵方程:

$$\epsilon = B\delta_e \quad (1-2)$$

式中, B 称为变形矩阵(也可称为应变矩阵),其元素一般也是坐标的函数。

(2) 求应力

利用应力和应变之间关系即物理方程,推导出用单元结点位移 δ_e 表示单元中任意一点应力 σ 的矩阵方程

$$\sigma = DB\delta_e = S\delta_e \quad (1-3)$$

式中, D 是由单元材料弹性常数所确定的弹性矩阵; $S = DB$ 称为应力矩阵,它的元素一般也是坐标的函数。

(3) 单元列式

利用虚位移原理或最小势能原理(对其他类型的一些有限单元法列式,将应用其他对应的变分原理等)建立单元刚度方程

$$k_e \delta_e = F_e + F_e^c \quad (1-4)$$

式中, F_e 为单元结点力矩阵,它是相邻单元对所讨论单元的结点上所作用之力排列成的矩阵; F_e^c 是作用在该单元上的外荷载转换成的、作用于单元结点上的单元等效荷载矩阵; k_e 由虚位移原理或最小势能原理推导所得,是将单元结点位移和单元结点力、单元等效结点荷载联系起来的联系矩阵,称为单元刚度矩阵。本书中不管什么问题的位移元,其计算公式一般均为:

$$k_e = \int_{\Omega_e} B^T DB d\Omega \quad (1-5)$$

积分式中 Ω_e 视所讨论的问题而异,对平面问题是单元的面积,对空间问题则表示单元的体积等。

在上述位移型有限单元法三个方面的工作中,从编制计算程序用计算机求解的角度来说,核心工作是建立单元刚度矩阵和单元等效结点荷载矩阵。正因如此,许多文献资料在单元刚度方程中没有 F_e 这一项(因为在由单元集成整体时,不同单元所交汇结点的全部结点力是彼此抵消的,也即结点是平衡的)。但是,从理论的完整性、科学性来讲,单元刚度方程应该是式(1-4)形式。

1-2-4 按离散情况集成所有单元的特性, 建立表示整个结构结点平衡的方程组

有了单元特性分析的结果,像结构力学中解超静定结构的位移法一样,对各单元仅在结点相互连接的单元集合体,用虚位移原理或最小势能原理进行推导,可以建立起表示整个结构(实质上更确切地说是单元集合体)结点平衡的方程组即整体刚度方程:

$$K\Delta = P_d + P_e = P \quad (1-6)$$

式中, K 为整体刚度矩阵; P 为整体综合结点荷载矩阵,它又包含直接结点荷载 P_d 与等效结点荷载 P_e 两部分; Δ 为结构整体结点位移矩阵。

通过所谓直接刚度法,可以用“对号入座”方式由各单元的单元刚度矩阵和单元等效结点荷载矩阵集成整体刚度矩阵和整体综合结点荷载矩阵,即建立整体刚度方程。

本步骤计算的细节取决于所求解的问题和所编制计算机程序的处理方法,对于一些问题将存在坐标(局部与整体)转换问题、位移边界条件的引入等,作为绪论,这里不详细论述。

1-2-5 解方程组和输出计算结果

本书所讨论的线弹性计算问题,整体刚度方程式(1-6)一般是一组高阶的线性代数方程组。由于整体刚度矩阵具有带状、稀疏和对称等特性,在有限单元法发展的过程中,人们通过研究,建立了许多不同的存储方式和计算方法;目的是节省计算机的存储空间和提高计算效率。利用相应的计算方法,即可求出全部未知的结点位移。

求出结构全部结点位移后,利用分析过程中已建立的一些关系,即可进一步计算单元中的应力或内力,并以数表或图形的方式输出计算结果。依据这些结果,就可以进行具体结构的进一步设计(实际当前的许多计算机辅助设计软件,已经将有限单元法分析作为其核心计算分析模块(对使用者这是黑匣子),由这一计算结果直接进行结构设计,并达到输出最终施工图的目的)。

§ 1-3 有限单元法发展概况

从经典结构力学派生的结构矩阵分析方法,早就用于建筑工程的复杂刚架

等结构的分析。但这些结构本身都是明显地由杆件所组成,杆件的特性可通过经典的位移法分析来建立。虽然矩阵位移法整个分析方法和步骤都与有限单元法相似,也是用矩阵来表达、用计算机来求解,但是它与目前广泛应用的有限单元法是有本质区别的。前者只能用以分析具有已知单元结点力-单元结点位移关系的杆件体系结构,而不能分析非杆件体系的连续体结构。因为对离散所得的非杆件连续体单元,无法像矩阵位移法那样用传统方法建立起单元结点力和单元结点位移之间的关系。

有限单元法基本思想的提出,可以追溯到 Courant 在 1943 年的工作。他第一次假设翘曲函数在一个人为划分的三角形单元集合体的每个单元上为简单的线性函数,求得了圣维南(St. Venant)扭转问题的近似解。一些应用数学家、物理学家和工程师由于各种原因也都涉足过有限单元法的概念。但由于当时计算技术的制约,不能用以解决工程实际问题,因而也就没有引起科学界及工程界的重视。到了 20 世纪 60 年代以后,电子计算机硬软件技术迅速发展,从而促进了有限单元法的飞速发展。

现代有限单元法的第一个成功尝试,是 Turner 和 Clough 等人于 1956 年在分析飞机结构时进行的。他们将矩阵位移法的方法、原理推广应用于弹性力学平面问题,将一个弹性连续体假想地划分为一系列三角形的所谓单元,不再像里茨法那样在整个求解域内构造约束所允许的位移试函数,而是以三角形单元三个角顶结点的位移作为优先解决的基本未知量,在满足一定条件下对整个求解域构造分片连续的位移场,这就使原来建立位移场的困难得到了解决。继之又解决了单元结点力和结点位移之间的单元特性关系(单元刚度方程),从而用三角形单元求得了平面应力问题的近似解答。他们的这些研究工作开创了利用计算机求解复杂平面弹性问题的新局面。1960 年 Clough 进一步处理了平面弹性问题,并第一次正式提出了“有限单元法”的名称。

早期的有限单元法是建立在虚位移原理或最小势能原理的基础上的,这对人们清楚地理解有限单元法的物理概念是很有帮助的,但是它只能处理一些比较简单的实际问题。1963—1964 年, Besseling、Melosh、Jones、卞学璜等人的研究工作表明,基于各种变分原理可以建立起更为灵活、适应性更强、计算精度更高的单元。这些成果大大刺激了变分原理(包含广义变分原理及其修正广义变分原理等)的研究和发展,先后出现了一系列基于变分原理的新型有限单元模型,诸如各种混合元、杂交元、非协调元、广义协调元等。

许多变分原理都和相应的数学物理方程相对应,但也有一些问题可能建立了数学物理方程和定解条件,却没有对应的变分泛函。从 20 世纪 60 年代后期开始,人们开始研究加权余量(也称为加权残值、加权残数)法。它是按某种规

则建立问题的试函数,根据其对控制方程、边界条件的满足程度,通过建立余量加权意义下的最小来获得问题的数值近似解答。利用加权余量法中的伽辽金法也可建立由基于变分原理所得到的相应方程,因此被称为加权余量有限元。

从有限单元法提出时起,如何建立更好的单元场变量(注意:因为这里已经不仅仅局限于位移元,因此没有称为位移场而是改称为场变量),从而在相同网格划分下提高计算精度和效率,始终是计算力学工作者的一项研究任务。基于样条函数的各种优良特点,人们开始将样条函数引入单元场变量的建立和数值分析,并进一步建立了样条有限元。

随着所分析问题的大型化、复杂化,除了需要进一步研究各种高精度单元外,考虑到多年力学研究的成果已经取得部分“精确解”,人们开始利用这些成果,将有限单元法的离散思想和经典解法的解析结果结合起来,以便获得效率、精度更高的方法。研究的结果就产生了一类“半解析”的数值方法,例如有限条法、组合条-元法、有限线法、边界单元法等。

多年来,有限单元法的应用范围已由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题。由静力平衡问题扩展到稳定问题、动力问题、波动问题和接触问题。分析的对象从弹性材料扩展到弹塑性、黏弹性、黏塑性和复合材料等问题。由小变形的几何线性问题扩展到各种大变形的几何非线性复杂问题。由单一非线性的问题,发展到包括材料非线性、几何非线性和边界非线性等的多重非线性问题。从单一介质的分析,发展到多介质耦合分析的问题。从固体力学扩展到流体力学、传热学、电磁学等连续介质力学领域。从确定性分析的有限单元法,发展到了随机有限元分析。从已知系统和激励求解系统响应的“正分析”,发展到了根据响应和系统识别激励,或者根据响应和激励识别系统的“反问题”。在工程分析中的作用,从分析和校核已经扩展到优化设计和智能计算机辅助设计技术相结合的程度。有限单元法经历了半个多世纪的发展,几乎渗透到了科学、工程的方方面面。可以预计,随着现代力学、计算数学和计算机技术等学科的发展,有限单元法作为一个具有坚固理论基础和广泛应用范围的数值分析工具,必将在国民经济建设和科学技术发展中发挥更大的作用,其自身也将得到进一步的完善和发展。

有限单元法的应用离不开计算机和有限单元法应用软件,随着有限单元法理论的发展与完善,已经开发出了许多大型的通用有限单元法程序,例如 ANSYS、NASTRAN、ABAQUS、SAP、ADINA 等。它们一般都具有结构的静动力分析、大变形和稳定分析、各种非线性分析及热传导、热应力、流体分析和多体耦合等功能,有比较成熟、齐全的单元库,提供了二次开发的接口。利用通用程序,一般的工程问题均可获得解决。因此,在学习本课程的时候,根据所具有的条件,

学习和掌握一些已有程序的应用是十分必要的。但是,这些通用程序功能再强大,对于一些正处于研究阶段的内容,往往也是无能为力的。所以,针对某些特定内容开发各种特殊问题的专用软件,或在这些商用软件的基础上进行二次开发显然是必要的。按照面向对象的程序设计方法,充分考虑“可重用性”,逐步积累与组成有限单元法分析程序库和可重用“构件”库,对加快工程应用和加快软件开发是很有实际意义的。

随着有限单元法的发展和應用,人们还在不断探索效率更高、更精确、更可靠的新型单元,以解决实际应用中遇到的新问题,并在这一过程中进一步拓展有限单元法的应用领域。

§ 1-4 学习指导

许多初学有限单元法的读者,都认为有限单元法很难。这主要是由于有限单元法要用到一些弹性力学、矩阵代数等知识。如果缺乏这方面必要的基本知识,应该说学有限单元法确实是困难的。考虑到力学类、“大土木”类、机械类和材料类等工科本科生,矩阵代数都是必修内容,加之本教材所需用到的知识基本上都是矩阵的简单运算,所以本教材没有复习或介绍这些内容。但是对于涉及的弹性力学基本知识,考虑到目前各学校“大土木”类、机械类和材料类专业此课程基本都是选修课,一般来说选修此课的人很少,因此本教材没有将它作为必须具备的预备知识来要求。对于已经学过弹性力学相关内容的读者,自然可以跳过这些弹性力学基本知识。而对于尚未学过的读者,就我们的能力所及,已经尽可能用较少的篇幅,尽可能简单易懂地介绍有限单元法所必需的弹性力学基础知识。但毕竟该内容理论性较强又比较抽象,加之受篇幅所限,因此从以往的教学实践表明,仅仅看了看、上课听一听是不够的。只有勤于动脑且勤于动手,听前听后多想想,对主要内容自己动手推导一下,这样才能真正掌握这些基本知识。此外,任何一门力学学科前后内容的相关性一般都是很强的,本教材自然也不例外。如果不思考、不复习,不能及时掌握这些弹性力学最基本的知识,那么有限单元法就不只是一般的难了,客观地说,应该是根本无法再学下去的。这是作为学习指导首先要强调的一点。

如果使用本教材的研究生想能真正学到一些有用的知识,那么希望在学习本课程之前能够复习结构力学的位移法并自学矩阵位移法,以便能更好地理解本教材的相关内容。

从 § 1-2 概要介绍的有限单元法分析的过程可见,本书所介绍的位移型有