清华大学研究生公共课教材——数学系列

应用近世代数（第3版）学习指导和习题详解

胡冠章 编著

清华大学出版社

清 华 大 学 研 究 生 公 共 课 教 材 —— 数 学 系 列

应用近世代数(第3版)学习指导和习题详解

胡冠章 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书把《应用近世代数(第 3 版)》(胡冠章，王殿军. 清华大学出版社，2006，教育部优秀教材二等奖，普通高等教育"十一五"国家级规划教材)一书的习题全部做了详细解答，并收集了一些补充题. 每节开始有内容提要，便于学习. 每道题解答之前有分析，启发读者进行思考；每道题解完后有点评，指出该题的意义和是否还有其他解法等；使读者加深对近世代数内容的理解，掌握问题的分析方法和计算技巧，培养举一反三的能力. 本书可作为教学参考书，也适合自学之用. 适合数学和应用数学、计算机科学、信息科学、物理和化学等专业需要学习抽象代数知识的本科生、研究生和工程技术人员使用.

图书在版编目(CIP)数据

应用近世代数(第 3 版)学习指导和习题详解/胡冠章编著. —北京：清华大学出版社，2012.10

(清华大学研究生公共课教材·数学系列)

ISBN 978-7-302-29573-0

Ⅰ. ①应…　Ⅱ. ①胡…　Ⅲ. ①抽象代数—研究生—教学参考资料　Ⅳ. ①O153

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 179293 号

责任编辑：佟丽霞
封面设计：常雪影
责任校对：王淑云
责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　**邮　　编**：100084
　　社 总 机：010-62770175　**邮　　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：三河市君旺印装厂
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170mm×230mm　**印　　张**：11.75　**字　　数**：209 千字
版　　次：2012 年 10 月第 1 版　**印　　次**：2012 年 10 月第 1 次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：22.00 元

产品编号：027288-01

前　言

本书的目的不是简单地给出习题的解答，而是使读者加深对近世代数内容的理解，掌握问题的分析方法和计算技巧，培养举一反三的能力．因此采取了下面一些新的写法．

1．每节开始有内容提要，便于复习有关内容．这些内容提要并非简单重复书上的内容，而是经过简化、提炼与组织．对一些概念与定理用简洁的语言表达，便于记忆；或用式子表达，比较确切．例如，群的概念不再重复书上的详细表述，而是简化为：集合对运算满足封闭性、结合律、有单位元和逆元四个条件就构成群．另外，每节内容的顺序也有些改变以适合复习的特点．

2．每道题开始有分析，主要是指出该题的困难在哪里，可能用什么方法解决等．读者在解题之前先看一下分析，然后先自己去解．当解不下去时再去看解答部分，有思路了再自己做．做完后再详细对照一下解答，看每题后的点评．

3．每道题解完后有点评，指出该题的意义和是否还有其他解法等．有些题的点评还扩展了有关内容，例如，在第4章的4.3-6的点评中给出了一些有限域上的不可约与本原多项式的表，不仅可作为参考资料查阅，而且读者可自己进一步扩充知识点．

4．第1～3章是基本部分，都增加了一些补充题，作为综合练习和提高之用．

编者

2012年7月

目　录

第 1 章　引言和预备知识

这一章的内容虽是准备部分，但非常重要，如果不熟悉，以后会处处受阻. 考虑到各人原有的基础不同，这一章的内容和习题适宜自学. 但不管是谁都应把内容和习题通读一遍，有重点地在某些内容上多加注意，例如关于整数的同余运算一定要熟悉起来.

1.1　几类实际问题

一、内容提要

本节的目的是提出一些可用近世代数解决的实际问题，以期引起读者的兴趣. 由于读者现在还未学习到有关内容，所以我们只能用初等的方法来做这些题，从中体会到问题的困难.

二、习题 1.1 详细解答

1.1-1　用两种颜色的珠子做成有 5 颗珠子的项链，问可做出多少种不同的项链？

分析　在学群论前我们没有一般的方法，只能用枚举法.

解　用笔在纸上画一下，用黑白两种珠子，分类进行计算：全白只 1 种，四白一黑 1 种，三白二黑 2 种，二白三黑 2 种，一白四黑 1 种，全黑只 1 种. 因此可得总共 8 种.

点评　读者不妨增加颜色数或珠子数再做做看，可以发现越来越难做，从而体会到必须寻找更高明的方法.

1.1-2　对正四面体的顶点用 2 种颜色着色，有多少种本质上不同的着色方法？

分析　我们可以用硬一点的纸做一个正四面体，也可在纸上画一个正四面体. 看看有多少种着色方法. 这里所说的本质上不同的着色方法，是指对两种着色不论怎样转动此正四面体它们都不能重合.

解　类似第 1 题，用枚举法可得 5 种.

点评　读者不妨增加颜色数再做做看，比项链问题更复杂，如没有更好的

方法是很难走远的.

1.1-3　有 4 个顶点的图共有多少个？其中互不同构的有多少个？

分析　复习一下图的概念，图一般指有标号的图，n 个点的图有 $2^{\binom{n}{2}}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 个. 但其中有很多是互相同构的，即不考虑点号，两个图可以重合就称为它们同构. 互不同构的图又叫无标号图. 求互不同构的图的个数是很难的问题，需要用群论方法.

解　由本节内容，有 4 个顶点的图共有 64 个图. 用分类计数的方法可得共有 11 个互不同构的图：无边的空图 1 个，一条边的图 1 个，有 2 条边的图有 2 个，有 3 条边的图有 3 个，有 4 条边的图有 2 个，有 5 条边的图有 1 个，有 6 条边的图有 1 个.

点评　读者不妨算一下有 5 个顶点的图共有多少个有标号图，有多少个互不同构的图. 虽只增加一个点，但难度有很大的提高.

1.1-4　如何用圆规 5 等分一个圆周？

分析　可先作一个单位圆，设其半径长度为 1，问题变成如何求出五边形的边长.

解　用初等数学的方法求五边形的边长：作一个顶角为 36°、腰长为 1 的等腰三角形，设底边长为 a，则 a 就是十边形的边长，以 a 为半径以单位圆周上任意一点为圆心在圆周上交出两点，则这两点之间的距离就是五边形的边长. 那么 a 怎么求呢？只要在那个等腰三角形上作一条辅助线：底角的角平分线，再利用相似三角形边长成比例的关系，可得 $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，分别以 1 和 2 作直角边，斜边就是$\sqrt{5}$，所以 a 就可作出了.

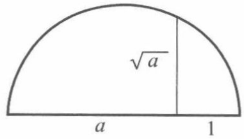

图　1.1

点评　由于一个数的开平方可以在圆上作出(见图 1.1，即主教材图 4.2)，所以，如果正 n 边形的边长，可由某个有理数经过有限次开平方与四则运算求得，则就可 n 等分一个圆. 但这是否是可 n 等分一个圆周的必要条件呢？我们将在第 4 章中详细讨论此问题.

1.1-5　如何用根式表示 3 次和 4 次代数方程的根？

查看数学手册. 因公式较复杂，不在这里列出了.

点评　从手册可见，对 3 次和 4 次代数方程可通过几步表示它的根，每一步都是根式表示式. 而对于 5 次以上的某些代数方程，伽罗瓦证明了对某些 5 次方程不能用根式表示它的根. 我们将在第 5 章中讨论此问题.

1.2 集合与映射

一、内容提要

由于集合的概念太基本了，没有必要从头复习，我们只是强调和补充一些东西.

1. 集合

- **集合的记号**：本书用大写字母表示集合. $|A|$表示集合 A 的元素的个数，称为基数. 用$|A|<\infty$表示有限集.

整数集合记作：$\mathbb{Z}$. 正整数(即自然数)集合记作：$\mathbb{Z}^+$(自然数是否包含 0，有不同的说法，高等教育出版社出版的《数学手册》把自然数定义为正整数). 非负整数的集合无专门的记号. 非零整数的集合记作：$\mathbb{Z}^*$. 类似的，对有理数有记号：$\mathbb{Q}$，$\mathbb{Q}^+$，$\mathbb{Q}^*$；对实数有记号：$\mathbb{R}$，$\mathbb{R}^+$，$\mathbb{R}^*$；对复数有记号：$\mathbb{C}$，$\mathbb{C}^*$.

- **集合 A 的幂集**记作：$\mathscr{P}(A)=2^A=\{A$ 的所有子集的集合$\}$. 当$|A|<\infty$时有$|2^A|=2^{|A|}$.
- **包含与排斥原理**：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是集合 S 的有限子集，则

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cup A_j|+\cdots+(-1)^{n-1}\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|,$$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|+\cdots+(-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|.$$

当并集的基数比交集的基数容易求时，用第一个公式. 反之，用第二个公式.

2. 映射

集合 A 到集合 B 的映射记作：$f:x\mapsto f(x)(A\to B)$.

- f 是单射$\Leftrightarrow f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$.
- f 是满射$\Leftrightarrow f(A)=B$.
- f 是双射$\Leftrightarrow f$ 既是单射又是满射.
- f 可逆$\Leftrightarrow f$ 是双射.

二、习题 1.2 详细解答

1.2-1 设$|A|<\infty$，用二项式定理证明：$|2^A|=2^{|A|}$.

分析 二项式定理为：$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+b^n$. 求

幂集的元素个数如何与二项式定理联系起来呢？我们从二项式系数$\binom{n}{k}$入手，它是从 n 个元素中取 k 个元素的取法，正好是 k 元子集的个数，而全部子集的个数正好就是这些二项式系数之和.

证　设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，由于 A 中 k 元子集的个数等于二项式系数$\binom{n}{k}$，于是把它们从 $k=1$ 到 $k=n$ 加起来，再加一个空集，所以

$$|2^A|=1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=(1+1)^n=2^n=2^{|A|}.$$

点评　证明该公式方法至少有以下几种：

证法1　如主教材1.2.2(指主教材的节号，下同. 例子号，定理号等均指主教材中的.)中所说：每一个元素有在子集中与不在子集中2种可能，因而共有 2^n 种可能，每一种可能对应一个子集，所以共有 2^n 个子集.

证法2　用二项式定理.

证法3　利用主教材1.2.6节中公式：$|B^A|=|B|^{|A|}$. 令 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$B=\{0,1\}$，则每一个 A 到 B 的映射对应一个子集，所以全部子集的个数为 $|B^A|=|B|^{|A|}=2^n$.

1.2-2　一个班有93%的人是团员，80%的人担任过社会工作，70%的人受过奖励，问：

(1) 受过奖励的团员至少占百分之几？

(2) 三者兼而有之的人至少占百分之几？

分析　该题是求几个集合的交集的基数，可用包含与排斥原理得到比较精确的结果.

解　设 A 为团员的集合，B 为担任过社会工作的人的集合，C 为受过奖励的人的集合，则由包含与排斥原理，可得

(1) $|A\cap C|=|A|+|C|-|A\cup C|\geqslant 93+70-100=63$，
所以受过奖励的团员至少占63%.

(2) $|A\cap B\cap C|=|A|+|B|+|C|-|A\cup B|-|B\cup C|-|A\cup C|+|A\cup B\cup C|$，由于 $|A\cup B\cup C|-|A\cup B|\geqslant 0$，所以

$$\begin{aligned}|A\cap B\cap C|&\geqslant|A|+|B|+|C|-|B\cup C|-|A\cup C|\\&\geqslant 93+80+70-100-100=43.\end{aligned}$$

故三者兼而有之的人至少占43%.

点评　该题主要是复习集合运算的包含与排斥原理. 对于集合个数较少时，可用画图的方法来确定.

1.2-3 在不大于 1000 的正整数中，求：

(1) 不能被 5,6,8 中任何一个整数整除的个数.

(2) 既非平方数也非立方数的个数.

分析 利用包含与排斥原理，参考主教材例 1.2.1.

解 (1) 设 $X=[1,1000]$ 表示 1 到 1000 的所有整数，$A=\{x\mid x\in X\&5\mid x\}$，即为 X 中能被 5 整除的所有整数的集合，$B=\{x\mid x\in X\&6\mid x\}$，$C=\{x\mid x\in X\&8\mid x\}$. 则

$$|A|=\frac{1000}{5},\quad |B|=\left\lfloor\frac{1000}{6}\right\rfloor,\quad |C|=\left\lfloor\frac{1000}{8}\right\rfloor,$$

并可求出

$$|A\cap B|=\left\lfloor\frac{1000}{5\times 6}\right\rfloor=33,\quad |B\cap C|=\left\lfloor\frac{1000}{[6,8]}\right\rfloor=41,$$

$$|A\cap C|=\left\lfloor\frac{1000}{5\times 8}\right\rfloor=25,\quad |A\cap B\cap C|=\left\lfloor\frac{1000}{[5,6,8]}\right\rfloor=8,$$

其中 $[6,8]$ 和 $[5,6,8]$ 是最小公倍数的记号. 记号 $\lfloor x\rfloor$ 表示 x 的下整数，$\lceil x\rceil$ 表示 x 的上整数. 所以所求的个数为

$$\begin{aligned}|X|-|A\cup B\cup C|&=1000-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|\\&\quad+|B\cap C|+|A\cap C|-|A\cap B\cap C|\\&=1000-200-166-125+33+41+25-8\\&=600.\end{aligned}$$

(2) 设 A 为 X 中平方数的个数，B 为 X 中立方数的个数，则

$$|A|=\lfloor\sqrt{1000}\rfloor=31,\quad |B|=\lfloor\sqrt[3]{1000}\rfloor=10,$$

$$|A\cap B|=\lfloor\sqrt[6]{1000}\rfloor=3.$$

所以所求的个数为

$$\begin{aligned}|X|-|A\cup B|&=1000-|A|-|B|+|A\cap B|\\&=1000-31-10+3\\&=962.\end{aligned}$$

点评 根据题意，首先确定是求集合的交还是并，然后利用包含与排斥原理.

1.2-4 设 $|A|=m$，$|B|=n$，求：

(1) A 到 B 的单射有多少个？

(2) 当 $m=3$，$n=2$ 时，求 A 到 B 的满射有多少个？

分析 f：$A\to B$ 是单射 $\Leftrightarrow|f(A)|=|A|$，因而 $|A|\leqslant|B|$.

$f: A \to B$ 是满射$\Leftrightarrow |f(A)| = |B|$,因而$|A| \geqslant |B|$.

解 (1) 当 $m>n$ 时,显然不存在 A 到 B 的单射.

当 $m \leqslant n$ 时,由于单射的像必是 B 中的某个 m-子集,且和子集元素的次序有关,由此可得 A 到 B 的单射个数为以下从 m 个元素中选取 n 个元素的选排列数:

$$P(m,n) = m(m-1)\cdots(m-n+1).$$

(2) 当 $m<n$ 时,显然不存在 A 到 B 满射.

当 $m \geqslant n$ 时,存在 A 到 B 满射. 对于 $m=3, n=2$,设 $A=\{a_1, a_2, a_3\}$, $B=\{0,1\}$,我们知道 A 到 B 全部映射数为8,非满射只有2个,所以 A 到 B 的满射有6个.

点评 对一般情形,求满射数的问题可参看[4]p. 52-53.(参考文献的页码是本书后所附的参考文献,下同.)

1.2-5 证明实数区间$(0,1)$与$(-\infty, +\infty)$等势.

分析 关键是在这两个集合之间找一个双射.

证 作映射 $f: x \mapsto \ln \dfrac{x}{1-x}$. 可证 f 是单射: 任取 $x_1, x_2 \in (0,1)$,有

$$\begin{aligned}\ln \frac{x_1}{1-x_1} = \ln \frac{x_2}{1-x_2} \Rightarrow \frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2} \Rightarrow x_1 - x_1x_2 \\ = x_2 - x_1x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.\end{aligned}$$

所以 f 是单射.

再证 f 是满射: 任取 $y \in (-\infty, +\infty)$,令 $y = \ln \dfrac{x}{1-x}$,可解出 $x = \dfrac{e^y}{1+e^y}$ $\in (0,1)$使 $f(x)=y$,所以 f 是满射.

综上,f 是双射,因此$(0,1)$与$(-\infty, +\infty)$等势.

点评 可以找到很多满足要求的映射,读者试另找一个双射.

1.2-6 设 f 是 A 到 B 的一个映射,$S \subseteq A$,举例说明 $f^{-1}[f(S)]=S$ 是否成立?

注意 这里的记号 f^{-1} 并非指 f 的逆,f 不一定可逆. $f^{-1}[T]$表示 T 的全原像.

解 不一定成立.

成立的情况: 显然当 f 可逆时,$f^{-1}[f(S)]=S$ 成立. 实际上,只要 f 是单射,式子就成立: $\forall x \in S$,设 $f(x)=y$,由于 f 是单射,y 的原像只有 x,即 $f^{-1}[f(x)]=x$,所以 $f^{-1}[f(S)]=S$.

不成立的情况: 只要举一个 f 不是单射的例子. 例如: $f: x \mapsto x^2, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. 取 $S=\{1\}$,则 $f(S)=\{1\}$,但 $f^{-1}[f(S)]=f^{-1}(1)=\{-1,1\} \neq S$.

点评 可以一般的证明：$f^{-1}[f(S)]=S$ 成立的充分必要条件是 f 是单射.

1.2-7 设 $|A|<\infty$，$f:A\to A$，证明以下三个命题等价：

(1) f 是单射； (2) f 是满射； (3) f 可逆.

分析 这个题的结论很重要，即有限集上的单射、满射与双射都是互为充要条件. 证明方法并不复杂.

证 用循环证法：

(1)⇒(2)：因为 f 是单射，且 A 是有限集，故有 $|f(A)|=|A|$. 所以 f 是满射.

(2)⇒(3)：因为 f 是满射，故有 $f(A)=A$. 下面用反证法证明 f 是单射：假设 f 不是单射，由于 A 是有限集，必故有 $|f(A)|<|A|$. 与 f 是满射矛盾，所以 f 是单射. 因而 f 是双射，即可逆.

(3)⇒(1)：显然.

点评 我们再强调一下，对有限集这个结论很重要！即有限集上的单变换必是满变换，也必是双变换和可逆变换. 通常遇到有限集的问题我们要充分利用有限性使问题简化，甚至可列出所有的元素来进行分析.

1.2-8 设 $A\neq\varnothing$，证明不存在 A 到它的幂集 $\mathscr{P}(A)$ 的双射.

分析 如果 A 是有限集，这个结论是显然的. 因为 $\mathscr{P}(A)$ 的元素个数多于 A 的元素个数，因此不存在 A 到 $\mathscr{P}(A)$ 的双射. 但对于无限集，就不能用用这种方法证明了. 下面的证法有特殊的技巧.

证 用反证法.

假设存在 A 到 $\mathscr{P}(A)$ 的双射 $f:x\mapsto f(x)=S_x\in\mathscr{P}(A)$. 在 A 中取一个满足以下条件的子集：

$$T=\{x\mid x\in A\,\&\,x\notin S_x\}.$$

$T\in\mathscr{P}(A)$，由于 f 是满射，存在 $a\in A$ 使 $f(a)=S_a=T$，现我们分析 a 是否在 T 中？

若 $a\in T$，根据 T 的定义有 $a\notin S_a$，即 $a\notin T$，矛盾.

若 $a\notin T$，即 $a\notin S_a$，根据 T 的定义有 $a\in T$，也矛盾.

所以不可能有这样的双射存在.

点评 是否有其他的证明方法呢？如有更简单的证明方法请发 Email 至 hugz@tsinghua.edu.cn.

1.3 二元关系

一、内容提要

1. 二元运算和代数系

我们从小学开始所做的运算大多是两个数的运算，但不太关心数的范围的变化. 例如，两个正整数相减，其结果可能跑出正整数的范围；一个整数开平方，其结果不仅可能跑出整数的范围，而且可能跑出有理数的范围. 在近世代数中，不管做什么样的运算，我们始终念念不忘是在什么集合里进行，其结果是否还在这个集合里？而且只有其结果仍在原集合的运算称为二元运算，具体定义如下：

- **二元运算**：设 S 为非空集合，则映射 $f:S\times S\to S$ 就称为 S 中的一个二元运算. 其最主要之点是满足封闭性和惟一性.
- **代数系**：定义了一个或几个二元运算的集合就称为一个代数系. 对不同的集合定义不同的运算就得到不同的代数系，例如群，环，域等. 代数系是近世代数的基本舞台.

2. 二元关系和等价关系

我们从小学开始就知道相等、大于和小于等关系，后来学几何又知道三角形的全等、相似等关系，在线性代数里又有矩阵的相似、相合等关系. 这些都是二元关系. 其中最重要的是等价关系.

- **二元关系**：在两个集合 A 和 B 的元素之间如果有一个规则 R，$\forall a\in A$，$\forall b\in B$ 可判断 aRb（a 与 b 符合规则 R），或 $aR'b$（a 与 b 不符合规则 R）. 则规则 R 就称为集合 A 和 B 的元素之间的一个二元关系.
- **等价关系**：在同一个集合里，一个二元关系如果满足 3 个条件：反身性，对称性和传递性. 则此二元关系称为此集合中的一个等价关系，等价关系记作～、$=$ 、$\equiv$ 等.
- **等价类及其代表元**：设集合 A 中的一个等价关系为～，则子集 $\bar{a}=\{x\mid x\sim a\}$ 称为以 a 为代表的等价类，它的记号有：$\tilde{a}$，$[a]$等，以 $\bar{a}$ 最简单，本书主要采用此记号.
- **商集**：A 中等价类的集合，记作 $A/\sim=\{\bar{a}\mid a\in A\}$，称为 A 模～的商集. 它是 A 的幂集的一个子集.
- **一个重要的等价关系——同余关系**（非常重要！）：先在整数集合 $\mathbb{Z}$ 中

定义一个二元关系称为整除关系：$a|b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z}$ 使 $b=ac$. 然后可定义两整数的同余关系.

整数集合$\mathbb{Z}$中模 n 的同余关系记作：$\equiv (\bmod n)$，定义为

$$a \equiv b(\bmod n) \Leftrightarrow n \mid (a-b).$$

这个等价关系的记号有点复杂和特殊，“a 与 b 模 n 同余”习惯记作 $a \equiv b(\bmod n)$. 整数模 n 的同余类：$\bar{a}=\{a+qn|q\in\mathbb{Z}\}$. a 是 $\bar{a}$ 的代表元，代表元不是惟一的. 若取代表元满足：$0\leqslant a<n$，则称它是**正则代表元**，是惟一确定的.

有的书把同余类记作：$[a]=\{a+qn|q\in\mathbb{Z}\}$.

整数模 n 的商集：$\mathbb{Z}_n=\mathbb{Z}/\equiv(\bmod n)=\{\bar{0},\bar{1},\cdots,\overline{n-1}\}$. 称为整数模 n 的同(剩)余类集合.

二、习题 1.3 详细解答

1.3-1 $A=\{1,2,3,4,5\}$，在 2^A 中定义二元关系$\sim$：$S\sim T \Leftrightarrow |S|=|T|$. 证明$\sim$是等价关系，并写出等价类和商集 $2^A/\sim$.

分析 此题虽然简单，但对还不太熟悉等价类和商集的读者来说，还是应认真做一下.

证 易证$\sim$满足等价关系的三个条件，反身性，$|S|=|S|\Rightarrow S\sim S$；对称性：$S\sim T\Rightarrow |S|=|T|\Rightarrow T\sim S$；传递性：$S\sim T, T\sim U\Rightarrow |S|=|T|=|U|\Rightarrow S\sim U$.

等价类为：$\overline{\varnothing}=\{\varnothing\}$，$\overline{\{1\}}=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$，

$$\begin{aligned}
\overline{\{1,2\}} &= \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\\
&\quad\ \{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\},\\
\overline{\{1,2,3\}} &= \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\cdots,\{3,4,5\}\},\\
\overline{\{1,2,3,4\}} &= \{\{1,2,3,4\},\cdots,\{2,3,4,5\}\},\\
\bar{A} &= \{A\}.
\end{aligned}$$

商集为 $2^A/\sim=\{\overline{\varnothing},\overline{\{1\}},\overline{\{1,2\}},\overline{\{1,2,3\}},\overline{\{1,2,3,4\}},\bar{A}\}$.

点评 这是概念题，虽然简单，但必须仔细写一写，以加深印象，并熟悉表示方法.

1.3-2 $S=\{0,1,\cdots,n\}$，$f: A\mapsto \mathrm{r}(A)$ $(M_n(\mathbb{R})\to S)$. 求由 f 所决定的等价关系，并决定等价类和商集.

分析 本题是把所有实 n 阶矩阵按秩分类，注意把等价类的代表元写得简单一些.