微積分学

孙光远　孙叔平著

（修訂本）

商　务　印　書　館

微積分学

孙光远
孙叔平 著

（修訂本）

商务印書館

微 积 分 学

孙光远 孙叔平著

商 务 印 书 館 出 版
北京东总布胡同 10 号
(北京市书刊出版业营业許可証出字第 107 号)
新 华 书 店 总 經 售
上海大东集成联合印刷厂印刷
統一书号 13017·132

1940 年 9 月初版 开本 850×1168 1/32
1957 年 6 月 9 版 印張 11 14/16
1959 年 4 月上海第 4 次印刷 印数 19,901—21,900
定价(10) ¥ 1.80

目　次

第一章　函數及極限

第二章　微分法

第三章 導數之性質及其應用

第四章 逐次微分法

第五章　平面曲線

第六章　無窮級數

第七章　函數之展開

第八章 不定積分

第九章 定積分

第十章　積分法

第十一章　偏微分法

第十二章 幾何上的應用

第十三章 重積分

第十四章　一級微分方程式

第十五章　高級微分方程式

第一章
函數及極限

1. 常數，變數 有一種數量，在計算的時候，其數值是永遠不變的，這種數量叫做<u>常數</u>．我們以後常用 $a, b, c, \cdots A, B, C, \cdots \alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 來代表常數．又有一種數量，在計算的時候，其數值在一定範圍之內可以變易的，這種數量叫做<u>變數</u>．我們以後常用 $x, y, z, \cdots, X, Y, Z, \cdots$ 來代表變數．

在數學中，我們常用一直線上的點，來表示種種數值．如在一直線上，任擇一點 O 使其代表零，這點叫做原點．又任擇一段之長如 OU，叫

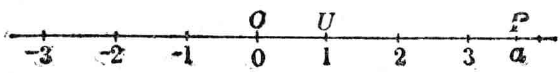


圖 1

做單位．設 P 為直線上的一點，OP 之長便代表一數 a．凡點之在原點右者，用以代表正數，在原點左者，用以代表負數，並且我們認為直線上的點，足以表達一切實數而無遺．申言之，凡直線上任何一點，都表示一個實數．任何實數，必有直線上的一點為其代表．

設變數 x 在 a, b 二數之間 $(a<b)$，可以任意變易，但不能小於 a，也不能大於 b，我們就寫如

$$a \leqq x \leqq b.$$

若用直線上的點來講，變數 x 可以代表 ab 段中一切的點．a, b 二數

所以限制變數 x 的範圍，這種範圍叫做變數 x 的間隔，我們常用記號 (a, b) 或 $a \leqq x \leqq b$ 以表示之.

圖 2

2. 函數及其圖表 設 x 與 y 表示兩個變數，若 x 之值既定，y 之值就隨之而定，x 與 y 之間有一種相倚相應的關係，那末 y 就叫做 x 的函數. 這時 x 叫做自變數，y 也叫做因變數. 例如 $y=x-3$，當 $x=3$ 時，y 之值爲零. x 等於其他之數如 1, 2, 4, 5, … 時，y 之值爲 $-2, -1, 1, 2, \cdots$. y 與 x 之間有一種相倚相應的關係，至爲顯然. 在自然科學中，函數的例，所在皆是. 如氣體所佔的容量，當溫度不變之時，與其所受的壓力成反比例，如以 p 表壓力，v 表容量，c 表一常數，則有

$$v=\frac{c}{p}.$$

根據這個關係，我們可以從 p 知 v. 又如物體受地心吸力而下墜，其所經的途徑，自然是時間的函數，如以 S 表其所經的途徑，t 表時間，g 表引力常數，那末 S 隨 t 而變的情形可由下式表達之，

$$S=\frac{1}{2}gt^2.$$

有了這個關係，物體下墜時所處的地位，就可以推知了.

x 與 y 中間的關係常用記號表之如下：

$$y=f(x), \quad y=g(x), \quad y=F(x), \quad y=\varphi(x).$$

令 $x=a$ 則函數 $f(x)$ 之值即以 $f(a)$ 表示之，例如

$$f(x)=x^2-9x+10,$$

則

$$f(a)=a^2-9a+10,$$

$$f(0)=0^2-9\cdot 0+10=10,$$

$$f(3)=3^2-9\cdot 3+10=-8.$$

爲明瞭函數的性質起見,我們往往用製圖之法.先畫兩條互相垂直的直線,作爲座標軸,其一叫做 x 軸,其他叫做 y 軸.既知 y 與 x 的函數關係 $y=f(x)$,那末當 x 旣得一值,y 必有一值與之相應,我們把這種 x 及與之相應之 y 作爲座標,就得種種不同之點,諸點相連,就得一條曲線,這條曲線叫做函數 $y=f(x)$ 的圖表.例如函數

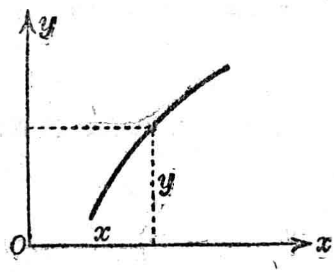


圖 3

$$y=+\sqrt{1-x^2}$$

當 $x=0$ 時,y 等於 1. x 無論爲正爲負,y 始終爲正.因此其圖表必居於 x 軸之上,不但如此,當 $-1\leqq x\leqq 1$ 時,如將 x 換爲 $-x$,y 之值不變,因此之故,其圖表對於 y 軸成對稱.又當 x 自 -1 漸漸變大而達於零,y 隨之變大,此時函數 y 隨 x 增大而增大.當 x 自零漸漸變大而達於 1,y 隨之變小,此時函數 y 隨 x 變大而變小.

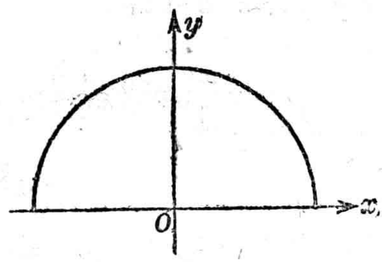


圖 4

根據這種性質,就可推知 $y=+\sqrt{1-x^2}$ 的圖表了.又如方程式

$$2xy-y+5=0$$

也足以表示 y 爲 x 的函數,不過並未將 y 解出罷了.這時 y 便叫做 x 的隱函數,$y=f(x)$ 便叫做 x 的顯函數.上面的隱函數也可寫成顯函數如下:

$$y=\frac{5}{1-2x}.$$

隱函數 y 與自變數 x 的關係,常用記號如 $f(x,y)=0$ 表示之.

單調函數　設函數 $f(x)$ 在間隔 (a,b) 內之值,隨 x 增大而增大,那末在這間隔內,$f(x)$ 叫做 x 的增函數.反之,如 $f(x)$ 之值隨 x 增大而

減少，那末在這間隔內，$f(x)$ 叫做 x 的減函數．令 x_1, x_2 爲這間隔內的任意二數，若常有

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0,$$

$f(x)$ 便是 x 的增函數，若常有

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0,$$

$f(x)$ 便是 x 的減函數．增函數與減函數統叫做單調函數．由前例言之，函數 $y=+\sqrt{1-x^2}$ 在間隔 $(-1, 0)$ 內，爲 x 的增函數，在間隔 $(0, 1)$ 內，爲 x 的減函數．

反函數　我們若由方程式

$$y=\frac{5}{1-2x}$$

把 x 解出，則得

$$x=\frac{y-5}{2y}.$$

前者的意思表示 y 是 x 的函數，後者所表示的，x 是 y 的函數．因此之故，我們名後者爲前者的反函數．普遍言之，若將方程式中 $y=f(x)$ 的 y 視爲自變數，x 視爲因變數，於是由 $y=f(x)$ 解出 x 而得 $x=\varphi(y)$，那末函數 $\varphi(x)$ 就叫做 $f(x)$ 的反函數．但 $\varphi(x)$ 與 $f(x)$ 的關係是相對的，所以 $f(x)$ 也可以叫做 $\varphi(x)$ 的反函數，例如 $\log_a x$ 爲 a^x 的反函數，$\arcsin x$ 爲 $\sin x$ 的反函數，$\pm\sqrt{x}$ 爲 x^2 的反函數．

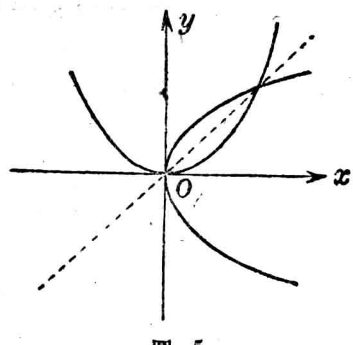


圖　5

$y=f(x)$ 與 $x=\varphi(y)$ 所代表的曲線原屬相同，今將 $x=\varphi(y)$ 中的 x 易

爲 y, y 易爲 x, 則 $y=f(x)$ 與 $y=\varphi(x)$ 所代表的曲線,對於直線 $y=x$ 便成對稱. 圖 5 就是 $y=x^2$ 與其反函數 $y=\pm\sqrt{x}$ 所代表的曲線.

3. 初等函數

有理函數　$y=x^n$ (n 爲一正整數)要算最簡單的函數. 又如函數

$$y=ax^3+bx^2+cx+d$$

乃由 x 與常數 a, b, c, d, 施以加減乘的運算而得, 這種函數叫做有理整函數,或叫做多項式,其一般形式爲

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

又如函數

$$y=\frac{1}{ax+b}+\frac{x+d}{x^2+cx}.$$

乃由變數 x 與常數 a, b, c, d, 施以加減乘除的運算而得, 這種函數叫做有理分函數, 其一般形式爲

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}.$$

如 $b_0, b_1, \cdots, b_{m-1}$ 皆等於零, 而 $b_m\neq 0$, 則函數便爲有理整函數,所以有理整函數實在是有理分函數的特例罷了.

有理整函數與有理分函數, 統叫做有理函數.

無理函數　最簡單的無理函數爲 $y=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$ (n 爲一正整數). 又如

$$y=x+\sqrt{x^2+1},\qquad y=\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{x}}{1-x^2}},\qquad y=\sqrt{ax^2+bx+c}$$

都是 x 的無理函數. 這種函數皆能滿足一代數方程式如下

$$A_0(x)y^m+A_1(x)y^{m-1}+\cdots+A_m(x)=0,$$

其中 $A_0(x)$, $A_1(x)$, $\cdots$ $A_m(x)$ 皆爲 x 的有理函數. 例如

$$y=x+\sqrt{x^2+1}$$

便能滿足代數方程式

$$y^2-2xy-1=0.$$

有理函數 $y=f(x)$ 顯然也能滿足一代數方程式. 有理函數與無理函數統叫做代數函數.

我們在 §2 已經說明方程式

$$F(x, y)=y^2-2y+x^2=0$$

也足以表示 y 爲 x 的函數, 今與 x 以一定値 $(-1\leqq x\leqq 1)$, y 便得二相應値

$$y=1\pm\sqrt{1-x^2},$$

在這種情形, y 叫做 x 的二値函數.

設 y 爲 x 的函數, 若 x 之値旣定, y 祇有一値與之相應, 那末 y 就叫做 x 的單値函數. 若 x 之値旣定, 而 y 有數個値與之相應, 那末 y 就叫做 x 的多値函數.

例如有理整函數是單値函數, $\pm\sqrt{x}$ 是二値函數, $\arcsin x$ 是多値函數. 本書以後所謂函數, 都指單値函數而言.

三角函數 在高等數學中,角度的單位多用弧度,本書以後計算角的大小, 都用這個單位. 設以 O 爲圓心, 以 1 爲半徑作一圓, 取圓上二點 A, B, 使 AB 弧之長等於 1. 取 $\angle AOB$ 作爲角度的單位,這個單位便叫做一弧度. 當半徑等於 1 時, 圓周之長等於 2π, 所以全圓周 $360°$ 等於 2π 弧度, $180°$ 等於 π 弧度, $90°$ 等於 $\frac{\pi}{2}$ 弧度,

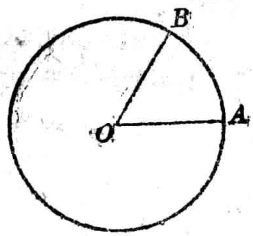


圖 6

$$1\text{ 弧度}=\frac{180°}{\pi}=57°\,17'\,45''$$

$$1°=\frac{\pi}{180}=0.017453\text{ 弧度}.$$

三角函數 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ 也叫做週期函數，因爲把 x 換爲 $x+2\pi$ 或 $x-2\pi$，函數之值依然不變，其中 $\tan x$,

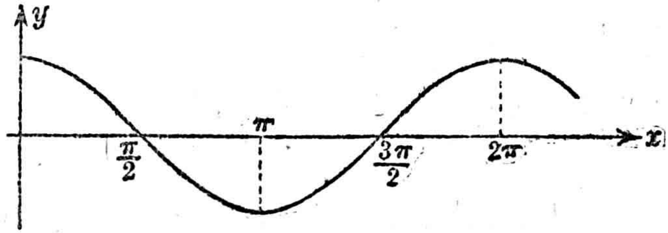


圖 7

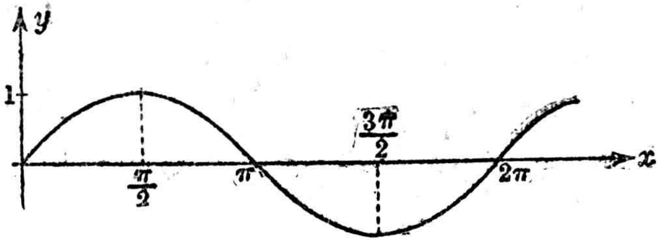
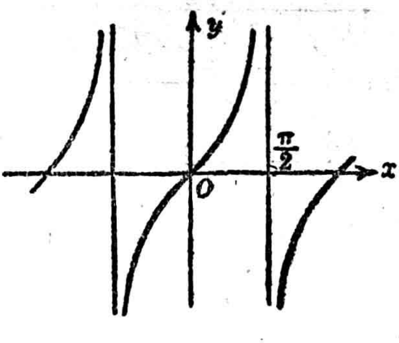


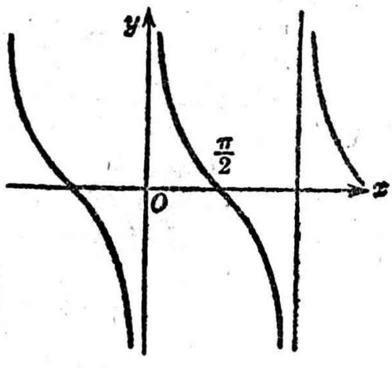
圖 8

$\cot x$, 二函數，如將 x 換爲 $x\pm\pi$. 函數之值仍不變，



$y=\tan x$

圖 9



$y=\cot x$

圖 10