



国际信息工程先进技术译丛

 Springer

快速傅里叶变换： 算法与应用

**Fast Fourier Transform:
Algorithms And Applications**

(美) K.R. Rao
D.N. Kim 著
(韩) J.J. Hwang
万帅 杨付正 译



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



国际信息工程先进技术译丛

快速傅里叶变换：算法与应用

Fast Fourier Transform: Algorithms And Applications

(美) K. R. Rao D. N. Kim 著

(韩) J. J. Hwang

万帅 杨付正 译



NLIC2970870699



机械工业出版社

本书深入浅出地阐述了快速傅里叶变换 (FFT) 的原理, 系统地总结了各类 FFT 算法, 并广泛精辟地介绍了 FFT 在视频和音频信号处理中的各种应用。本书在阐述了离散傅里叶变换 (DFT) 的原理和性质之后, 详细讨论了时域抽取 (DIT) 和频域抽取 (DIF) 的各类快速算法。论述了近似计算 DFT 的整数 FFT、二维及多维信号 FFT、非均匀 DFT 等原理和技术。本书还详细讨论了 FFT 的应用, 给出了大量实例。每章之后附有小结、习题, 并附有课程实践和参考文献。

本书语言流畅、图文并茂, 通过使用大量图、表、框图, 为读者提供了直观和生动的资料, 并给出了最新的 MATLAB 程序和源代码。本书可供通信、视频等信号处理领域的工程技术人员、研究人员参考使用, 也适用于相关专业本科高年级学生和研究生, 以及教师和自学者。

Translation from the English language edition: "Fast Fourier Transform: Algorithms And Applications" by K. R. Rao, D. N. Kim, J. J. Hwang (edition: 1; year of publication: 2010), ISBN 978-1-4020-6628-3

Copyright ©2010 Springer Dordrecht as part of Springer Science + Business Media.

All Right Reserved.

本书中文简体字版由 Springer 授权机械工业出版社独家出版。版权所有, 侵权必究。

本书版权登记号: 图字 01-2011-3599 号

图书在版编目 (CIP) 数据

快速傅里叶变换: 算法与应用 / (美) 劳 (Rao, K. R.) 等著; 万帅, 杨付正译. —北京: 机械工业出版社, 2012. 12

(国际信息工程先进技术译丛)

书名原文: Fast Fourier Transform: Algorithms And Applications

ISBN 978-7-111-40529-0

I. ①快… II. ①劳…②万…③杨… III. ①快速傅里叶变换
IV. ①0174. 22

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 283253 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 王 欢 责任编辑: 王 欢

版式设计: 霍永明 责任校对: 张晓蓉

封面设计: 马精明 责任印制: 乔 宇

北京机工印刷厂印刷 (三河市南杨庄国丰装订厂装订)

2013 年 3 月第 1 版第 1 次印刷

169mm × 239mm · 23. 75 印张 · 487 千字

标准书号: ISBN 978-7-111-40529-0

定价: 98. 00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心: (010) 88361066 教材网: <http://www.cmpedu.com>

销售一部: (010) 68326294 机工官网: <http://www.cmpbook.com>

销售二部: (010) 88379649 机工官博: <http://weibo.com/cmp1952>

读者购书热线: (010) 88379203 封面无防伪标均为盗版

目 录

译者序

原书前言

本书结构

缩略语

第1章 简介	1
1.1 离散傅里叶变换的应用	1
第2章 离散傅里叶变换	4
2.1 定义	4
2.1.1 DFT	4
2.1.2 IDFT	4
2.1.3 归一化 DFT	4
2.2 Z 变换	6
2.3 DFT 的性质	11
2.4 卷积定理	16
2.4.1 乘积定理	21
2.5 相关性定理	21
2.6 重叠相加和重叠保留法	24
2.6.1 重叠相加法	24
2.7 数据域的补零	27
2.8 使用一次复数 FFT 计算两个实序列的 DFT	30
2.9 利用 DFT 矩阵将循环矩阵对角化	30
2.9.1 托普利茨 (Toeplitz) 矩阵	30
2.9.2 循环矩阵	31
2.9.3 利用 DFT 矩阵将循环矩阵对角化	31
2.10 小结	33
2.11 习题	33
2.12 课程实践	36
第3章 快速算法	37
3.1 基-2 DIT-FFT 算法	37
3.1.1 $N=8$ 时 IFFT 的稀疏矩阵因子	42
3.2 基于稀疏矩阵因式分解的快速算法	44

3.3 基-2 DIF-FFT	51
3.3.1 $N=8$ 时的 DIF-FFT	52
3.3.2 原位计算	56
3.4 基-3 DIT-FFT	56
3.5 基-3 DIF-FFT	57
3.6 N 为合数时的 FFT	59
3.7 基-4 DIT-FFT	60
3.8 基-4 DIF-FFT	66
3.9 分裂基 FFT 算法	69
3.10 用矩阵分割技术实现快速傅里叶变换 (FFT) 和快速二进制 傅里叶表示 (BIFORE) 变换	70
3.10.1 矩阵分割技术	71
3.10.2 DFT 算法	72
3.10.3 BIFORE 变换 (BT)	74
3.10.4 复 BIFORE 变换 (CBT)	75
3.10.5 稀疏矩阵因式分解 (SMF)	75
3.11 威诺格拉德傅里叶变换算法	75
3.11.1 5 点 DFT	75
3.11.2 7 点 DFT	76
3.11.3 9 点 DFT	77
3.11.4 输入为实序列时的 DFT 算法	78
3.11.5 威诺格拉德短 N DFT 模块	79
3.11.6 素因子映射索引	81
3.11.7 威诺格拉德傅里叶变换算法 (WFTA)	83
3.12 DFT 矩阵的稀疏分解	84
3.12.1 使用复数旋转进行 DFT 矩阵的稀疏分解	84
3.12.2 利用酉矩阵进行 DFT 矩阵的稀疏分解	85
3.13 统一离散傅里叶-哈特雷变换	87
3.13.1 UDFHT 的快速结构	91
3.14 Bluestein FFT 算法	93
3.15 Rader 质数算法	95
3.16 小结	96
3.17 习题	97
3.18 课程实践	99
第4章 整数快速傅里叶变换	100
4.1 介绍	100
4.2 提升技术	100

4.3 算法	101
4.3.1 定点运算的实现	105
4.4 整数离散傅里叶变换	107
4.4.1 近完全整数 DFT	107
4.4.2 完全整数 DFT	108
4.4.3 能量守恒	110
4.4.4 循环移位	110
4.5 小结	112
4.6 习题	112
4.7 课程实践	112
第5章 二维离散傅里叶变换	113
5.1 定义	113
5.2 性质	116
5.2.1 周期性	116
5.2.2 共轭对称	116
5.2.3 时域/空域的循环移位 (周期性移位)	117
5.2.4 频域的循环移位 (周期性移位)	117
5.2.5 斜特性	119
5.2.6 旋转性	120
5.2.7 帕斯瓦尔定理	120
5.2.8 卷积定理	120
5.2.9 相关定理	122
5.2.10 空域微分	122
5.2.11 频域微分	123
5.2.12 拉普拉斯算子	123
5.2.13 矩形方程	123
5.3 二维滤波	124
5.3.1 逆高斯滤波器 (ICF)	126
5.3.2 根滤波器	127
5.3.3 同态滤波	129
5.3.4 范围压缩	130
5.3.5 高斯低通滤波器	131
5.4 逆滤波和维纳滤波	131
5.4.1 维纳滤波器	133
5.4.2 几何平均滤波器 (GMF)	135
5.5 三维 DFT	136
5.5.1 三维 DFT	136
5.5.2 三维 IDFT	136

5.5.3 三维坐标	136
5.5.4 三维 DFT	136
5.5.5 三维 IDFT	136
5.6 一维 DFT 域的方差分布	137
5.7 酉变换下的方差和不变	138
5.8 二维 DFT 域的方差分布	138
5.9 基于变换系数方差的量化	140
5.10 最大方差区域采样 (MVZS)	144
5.11 几何区域采样 (GZS)	145
5.12 小结	151
5.13 习题	151
5.14 课程实践	151
第 6 章 矢量基二维 FFT 算法	161
6.1 矢量基 DIT-FFT	161
6.2 矢量基 DIF-FFT	164
6.3 小结	168
第 7 章 非均匀离散傅里叶变换	169
7.1 简介	169
7.2 一维非均匀离散傅里叶变换 (NDFT)	169
7.2.1 均匀采样序列的离散傅里叶变换	169
7.2.2 非均匀离散傅里叶变换的定义	171
7.2.3 NDFT 的性质	173
7.2.4 NDFT-2 示例	175
7.3 NDFT 的快速算法	180
7.3.1 前向 NDFT	180
7.3.2 NDFT 的逆变换 (INDFT)	184
7.4 二维 NDFT	188
7.4.1 二维采样结构	188
7.4.2 二维非均匀矩形采样的例子	191
7.5 使用 NDFT 设计滤波器	192
7.5.1 低通滤波器的设计	192
7.5.2 非均匀低通滤波器的例子	198
7.6 小结	201
7.7 习题	201
第 8 章 应用	203
8.1 频域下采样	203
8.1.1 频域上采样 (零插入)	206

8.2	分形图像压缩	207
8.3	纯相位相关	211
8.4	利用 DFT/FFT 实现图像的旋转和平移	213
8.5	帧内错误隐藏	216
8.6	表面纹理分析	216
8.7	基于 FFT 的听觉模型	216
8.8	图像水印	218
8.9	音频水印	219
8.9.1	使用知觉掩蔽的音频水印	220
8.10	正交频分复用 (OFDM)	221
8.10.1	使用 IFFT/FFT 表示 OFDM 信号	222
8.11	OFDM 的 FFT 处理器	223
8.12	基于 DF DFT 的信道估计方法	224
8.12.1	基于 DF DFT 的信道估计方法	225
8.13	共轭梯度快速傅里叶变换 (CG-FFT)	226
8.14	改进型离散余弦变换 (MDCT)	226
8.15	奇叠加 TDAC	235
8.16	感知变换音频编码器	237
8.17	OCF 编码器	238
8.18	NMR 评估系统	239
8.19	移动接收音频编码器	240
8.20	高质量音乐信号的自适应功率谱感知熵编码 (ASPEC)	241
8.21	残差激励线性预测 (RELP) 声码器	242
8.22	同态声码器	243
8.23	掩蔽模式通用子带集成编码与复用 (MUSICAM)	243
8.24	AC-2 音频编码器	245
8.25	利用 IFFT 实现 IMDCT/IMDST	246
8.26	利用 IFFT 实现 MDCT/MDST	249
8.27	自相关函数和功率谱密度	250
8.27.1	滤波白噪声	251
8.28	三维人脸识别	252
8.29	二维多采样率处理	254
8.29.1	上采样与内插	254
8.29.2	下采样和抽取	257
8.30	快速均匀离散曲波 (curvelet) 变换 (FUDCuT)	261
8.30.1	Radon 变换	262
8.30.2	脊波 (ridgelet) 变换	262

8.30.3 曲波 (curvelet) 变换	263
8.31 习题	271
8.32 课程实践	274
8.32.1 方向带通滤波器	275
附录	277
附录 A 各种离散变换的性能对比	277
A.1 变换编码增益	277
A.2 变换域中的方差分布	278
A.3 规范化的 MSE	279
A.4 码率与失真 (率失真)	279
A.5 剩余相关	280
A.6 标量维纳滤波	281
A.7 几何区域采样 (GZS)	282
A.8 最大方差区域采样 (MVZS)	282
附录 B 图像质量的谱距离评价法	283
B.1 课程实践	285
附录 C 整数离散余弦变换 (Int DCT)	288
C.1 提升结构的整数 DCT	288
C.1.1 利用沃尔什-哈达玛变换分解 DCT	289
C.1.2 整数 DCT 的实现	292
C.2 利用二元对称性原理实现整数 DCT	293
C.2.1 产生 8 点整数 DCT	293
C.2.2 视频编码标准中的整数 DCT	294
C.2.3 8 点整数 DCT 性能	298
C.3 习题	300
C.4 课程实践	301
附录 D DCT 和 DST	302
D.1 DCT 和 DST 的核	302
D.2 酉 DCT 和 DST 的推导	304
D.3 用 DCT 和 DST 代替 FFT 的循环卷积	311
D.4 DCT 的循环移位特性	312
D.5 习题	313
D.6 课程实践	313
附录 E 克罗内克乘积与可分离性	314
E.1 克罗内克乘积	314
E.2 广义克罗内克乘积	315
E.3 可分离变换	315
附录 F 数学关系	317
F.1 习题	318

附录 G MATLAB 基础	319
G.1 MATLAB 相关网站列表	325
G.1.1 MATLAB 教程	325
G.1.2 MATLAB 命令和函数	325
G.1.3 MATLAB 概要和教程	325
G.1.4 MATLAB 初级读本	325
G.1.5 MATLAB 常见问题解答 (FAQ)	325
G.2 MATLAB 相关参考文献	326
附录 H MATLAB 程序示例	328
H.1 15 点的 WFTA 的 MATLAB 程序代码	328
H.2 纯相位相关的 MATLAB 程序代码	330
参考文献	332

第1章 简介

快速傅里叶变换 (Fast Fourier Transform, FFT)^[A1, LA23] 是离散傅里叶变换 (Discrete Fourier Transform, DFT)^[A42] 的有效实现。DFT 是数字信号处理领域中应用最为广泛的离散变换。DFT 将一个序列 $x(n)$ 映射到频率域。DFT 的许多性质都与对模拟信号进行傅里叶变换的性质相同。DFT 最初是由 Cooley 和 Tukey^[A1] 提出的, 后续的许多研究人员对其进行了增强和改进 (其中有不少是针对于特定的软硬件系统)。DFT 的发展激发和促进了其在各类学科中获得广泛应用和飞速发展。目前, 已经涌现了许多独立于 Cooley - Tukey 方法的算法, 如素因子 (prime factor) 算法^[B29, A42]、分裂基 (split radix) 算法^[SR1, 09, A12, A42]、向量基 (vector radix) 算法^[A16, B41]、分裂向量基 (split vector radix) 算法^[SDS1, SR2, SR3]、Winograd 傅里叶变换算法 (WFTA)^[A35 - A37] 等。许多公司在各自的平台上提供了实现 FFT 及其相关应用的软件, 如卷积/相关、滤波、频谱分析等。并且, 通用数字信号处理器 (Digital Signal Processor, DSP) 芯片可以编程来实现 FFT 和其他离散变换。

本书第2章定义了 DFT 及其反变换 (即 IDFT), 并详细讨论了它们的性质。之后介绍了与之相应的快速算法的发展。从本质上说, DFT 和 IDFT 的快速算法是完全相同的。DFT 是复运算, 具有正交性和可分性。正是由于其所具有的可分性, 从一维 DFT/IDFT 扩展到多维 DFT/IDFT 十分简单易行。多维 DFT/IDFT 可以通过使用一系列的一维 DFT/IDFT 实现。当然, 在具体的实现中采用了快速算法, 以减少存储、计算的复杂度和有限字长运算引起的舍入/截断误差。对于实数数据序列, 计算复杂度可进一步降低。快速算法的其他优点还包括递归 (意味着不同规模的 DFT 和 IDFT 可使用同一算法实现) 和模块化。而且, 通过对不同算法的灵活组合, 可以产生最优的方法。对于某些特定算法, 无需借助一维算法也可以直接实现二维 DFT/IDFT^[A42]。在本书的最后, 给出了大量算法和应用的参考文献。

1.1 离散傅里叶变换的应用

离散傅里叶变换的应用十分广泛。快速傅里叶变换及其反变换 (FFT/IFFT) 算法 (包括硬件和软件算法) 的发展加速了各类应用的出现。下面给出一些例子:

- 阵列天线分析
- 自相关和互相关
- 带宽压缩
- 信道分离和组合

- Chirp Z 变换
- 卷积
- 卷积信号的分解
- 心电图和脑电图仪 (Electrocardiograph 和 Electroencephalograph, EKG 和 EEG) 的信号处理
- 滤波器库
- 滤波器模拟
- 科学鉴定学
- 傅里叶光谱学
- 图像分形编码
- 频移键控 (Frequency Shift Keying, FSK) 解调
- 广义频谱和同形滤波
- 抗多径干扰
- 图像质量度量
- 图像配准
- 内插和抽取
- 线性预测
- 最小均方 (Least Mean Square, LMS) 自适应滤波器
- 通过 FFT 实现 MDCT/MDST (杜比 AC-3 [音频编码器, 5.1 环绕声道], DVD, MPEG-2 AAC [高级音频编码], MPEG-4 音频 [>64Kbit/s])
- 核磁共振成像
- 运动预测
- 多路载波传输
- 多频率检测
- 多时间序列分析及滤波
- 去噪滤波
- 差分方程的数值求解
- 正交频分复用 (Orthogonal Frequency - Division Multiplexing, OFDM) 调制
- 光信号处理
- 模式识别
- 基于相位相关的运动预测
- 医学成像中的相位相关 (Phase Only Correlation, POC)
- 能量频谱分析
- 相移键控 (Phase Shift Keying, PSK) 分类
- 音频编码的心理声学模型
- 雷达信号处理

- 信号描述和辨别
- 声纳信号处理
- 频谱预测
- 语音加密
- 语音信号处理
- 语音声谱图
- 扩展频谱
- 表面纹理分析
- 视频/图像压缩
- 水印
- 维纳滤波（图像去噪）
- 二维和三维图像旋转

第 2 章 离散傅里叶变换

2.1 定义

离散傅里叶变换 (DFT) 及其反变换 (IDFT) 定义如下。

2.1.1 DFT

$$X^F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \text{ 为 } N \text{ 个 DFT 系数} \quad (2.1a)$$

$$W_N = \exp\left(\frac{-j2\pi}{N}\right)$$

$$W_N^{kn} = \exp\left[\left(\frac{-j2\pi}{N}\right)kn\right]$$

式中, $x(n)$ 是一个均匀采样序列, $n=0, 1, \dots, N-1$; T 为采样间隔; $W_N = \exp(-j2\pi/N)$ 是 1 的 N 次根; $X^F(k)$ 为第 k 个 DFT 系数, $k=0, 1, \dots, N-1$; $j = \sqrt{-1}$ 。

2.1.2 IDFT

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^F(k) W_N^{-kn} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \text{ 为 } N \text{ 点采样数据} \quad (2.1b)$$

$$(W_N^{kn})^* = W_N^{-kn} = \exp[(j2\pi/N)kn] \quad e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j\sin \theta$$

式中, 上标 “*” 代表复共轭运算。DFT 的变换对可以使用下式表示:

$$x(n) \Leftrightarrow X^F(k) \quad (2.2)$$

式 (2.1b) 中的归一化因子 $1/N$ 可以平均分配在 DFT 和 IDFT 中 (此时称为归一化 DFT), 也可以全部放在 DFT 运算中。

2.1.3 归一化 DFT

正变换

$$X^F(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.3a)$$

反变换

$$x(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X^F(k) W_N^{-kn} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.3b)$$

或者写为

正变换

$$X^F(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp\left(-j\frac{2\pi kn}{N}\right) \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.4a)$$

反变换

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X^F(k) \exp\left(j\frac{2\pi kn}{N}\right) \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.4b)$$

式(2.1)、式(2.3)、式(2.4)中定义的 DFT/IDFT 是等价的。为保持一致性,我们使用式(2.1)的形式,即

$$\text{DFT} \quad X^F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[\cos \frac{2\pi kn}{N} - j \sin \frac{2\pi kn}{N} \right] \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.5a)$$

$$\text{IDFT} \quad x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^F(k) \left[\cos \frac{2\pi kn}{N} + j \sin \frac{2\pi kn}{N} \right] \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.5b)$$

$x(n)$ 和 $X^F(k)$ 均为长度为 N 的序列。

$$\underline{x}(n) = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T \quad N \text{ 点数据向量} \\ (N \times 1)$$

$$\underline{X^F}(k) = [X^F(0), X^F(1), \dots, X^F(N-1)]^T \quad N \text{ 点 DFT 向量} \\ (N \times 1)$$

$$W_N = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}\right) \quad 1 \text{ 的 } N \text{ 次根}$$

$$W_N^k = W_N^{k \bmod N}$$

式中, $k \bmod N = k \text{ modulo } N$, 表示 (k/N) 的余数。例如, $23 \bmod 5 = 3$ (因为 $\frac{23}{5} = 4 + \frac{3}{5}$)。这里上标 T 表示转置。

$\sum_{k=0}^{N-1} W_N^k = 0$ 。所有 N 个根均匀分布在以原点为中心的单位圆上, 即 1 的 N 个根之和为

0, 如 $\sum_{k=0}^7 W_8^k = 0$ (见图 2.1)。一般情况下, 当

p 为整数时, 有 $\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{pk} = N\delta(p)$ 。

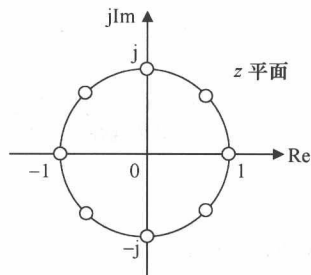


图 2.1 1 的 8 个根均匀分布在 z 平面以原点为中心的单位圆上

下面讨论 Z 变换与 DFT 的关系。

2.2 Z 变换

$x(n)$ 的 Z 变换 $X(z)$ 定义为

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} \quad (2.6a)$$

令 $f_s = \frac{1}{T}$ 为采样速率（单位为每秒采样点数），或者 $T = \frac{1}{f_s}$ ，即采样间隔（单位为 s），则

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp \left[-\frac{j2\pi fn}{f_s} \right] \quad (2.6b)$$

此式表示 $X(z)$ 在 z 平面以原点为中心的单位圆上的取值。

通过对单位圆进行等间隔采样，式 (2.6b) 可表示为

$$X^F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp \left[\frac{-j2\pi kn}{N} \right] \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.7)$$

式中， $k = Nf/f_s$ 。

$x(n)$ 的 DFT 实际上是 $x(n)$ 的 Z 变换在单位圆上的等间隔采样（见图 2.3）。

$X^F(k)$ 表示 $\{x(n)\}$ 在频率为 $f = kf_s/N$ 时的 DFT， $k = 0, 1, \dots, N-1$ 。需要注意的是，由于存在频率混叠，因此 $x(n)$ 的最高频率系数为 $X^F\left(\frac{N}{2}\right)$ ，即 $f = \frac{f_s}{2}$ 。例如，当 $N = 100$ ， $T = 1\mu\text{s}$ 时， $f_s = 1\text{MHz}$ ，频域分辨率 f_0 为 10^4Hz ，最高频率分量为 0.5MHz （见图 2.2 ~ 图 2.4）。

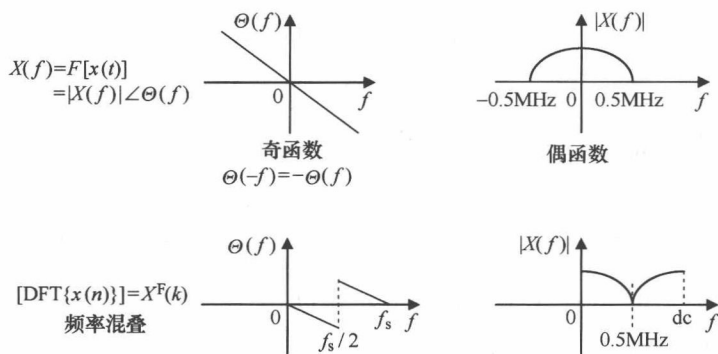


图 2.2 $f_s/2$ 处频率混叠效应

频域分辨率为

$$f_0 = \frac{1}{NT} = \frac{1}{T_R} = \frac{f_s}{N} \quad (2.8)$$

式中, $T_R = NT$, 为记录长度。对于一个给定的 N , 可以看出频域分辨率 f_0 和时域分辨率 T 之间具有反比的关系。需要注意的是, $x(n)$ 可以是空间均匀采样序列, 此时 T 的单位为 m, $f_s = \frac{1}{T}$ 表示每米采样点的个数。

DFT 的周期性如图 2.3 所示。当我们追踪 z 平面单位圆上的等间隔采样点 $X^F(k)$ 时, 每绕单位圆一周, DFT 都会循环一次。因此

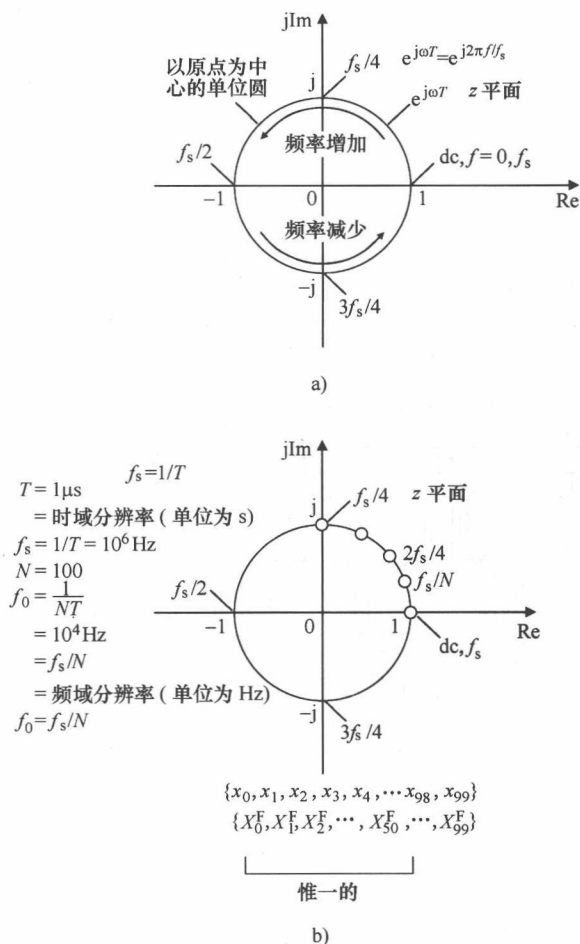


图 2.3 $x(n)$ 的 DFT 为 $x(n)$ 的 Z 变换在 z 平面单位圆上的等间隔采样及

$T = 1\mu s$ 、 $N = 100$ 时的实例

a) $x(n)$ 的 DFT 为 $x(n)$ 的 Z 变换在 z 平面单位圆上的等间隔采样

b) 当 $T = 1\mu s$ 、 $N = 100$ 时的实例

$$X^F(k) = X^F(k + lN) \quad (2.9a)$$

式中, l 为整数。DFT 假设 $x(n)$ 也以 N 为周期, 即

$$x(n) = x(n + lN) \quad (2.9b)$$