王永革　藤岩梅　贾超华　冯伟杰　编著

高等学校研究生教材

应用泛函分析

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

高等学校研究生教材

应用泛函分析

王永革　滕岩梅　贾超华　冯伟杰　编著

北京航空航天大学出版社

内容简介

全书共分4章，分别介绍了实变函数、抽象空间、线性算子和非线性算子的基本概念、理论和方法。在内容的选取上，既充分考虑了工科研究生的数学基础及专业研究需求，又兼顾了泛函分析理论体系。在编写时，亦注重于基本理论与应用的结合，力求以简明直观的语言来阐述泛函分析的思想和方法，使读者在掌握抽象理论工具的同时能体会到深刻的数学思想，得到较好的数学训练。

本书适用对象是工科各专业硕士和博士研究生，也可以作为工程研究人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

应用泛函分析 / 王永革等编著. -- 北京：北京航空航天大学出版社，2012.9

ISBN 978-7-5124-0920-0

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①泛函分析 Ⅳ. ①O177

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第198040号

应用泛函分析

王永革 滕岩梅 贾超华 冯伟杰 编著

责任编辑 刘晓明

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(邮编100191) http://www.buaapress.com.cn

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱：bhpress@263.net 邮购电话:(010)82316936

北京时代华都印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×1 092 1/16 印张:11.25 字数:288千字

2012年9月第1版 2012年9月第1次印刷 印数:3 000册

ISBN 978-7-5124-0920-0 定价:25.00元

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题，请与本社发行部联系调换。联系电话:(010)82317024

前　言

泛函分析是20世纪初产生和发展起来的现代数学学科，其思想和方法广泛用于数学、物理学、量子力学、自动控制、信号处理等诸多领域的研究之中，已成为掌握现代科学技术不可或缺的数学工具。

在本书编写之初，编者曾专门拜访过几位在应用领域卓有建树的专家，倾听了他们在研究工作中的数学需求，也曾在选修泛函分析课程的工科研究生中做过调研，结合编者多年的研究和教学实践，最终确立了此书的内容架构体系。在充分考虑工科研究生的数学基础及专业研究需求的同时，兼顾保持泛函分析理论体系之完整，我们舍弃了一些在泛函分析学科从数学行家的角度来看非常重要的基础理论，而尽可能详尽地介绍有实际工程应用背景的射影定理、Hahn－Banach 定理和不动点定理。

全书共分 4 章，分别介绍了实变函数、抽象空间、线性算子和非线性算子的基本概念、理论和方法。鉴于绝大多数工科研究生在学习泛函分析以前没有修过实变函数课程的实际情况，我们首先在第 1 章简要介绍了实变函数论中的集合、Lebesgue 测度、Lebesgue 可测和 Lebesgue 积分理论，这些知识对于学习泛函分析,掌握现代分析方法，无疑是十分重要的；第 2 章主要介绍抽象空间中的基本理论，如可分性、完备性、紧性和纲定理等等，重点介绍了射影定理及其应用；第 3 章是有关线性算子的内容，主要介绍线性算子的有界性、基本定理、空间对偶、算子共轭、有界线性算子的谱、紧算子和自伴算子，重点介绍了 Hahn－Banach 定理及其应用；第 4 章主要介绍非线性算子的连续性、有界性、Fréchet 微分、Gâ-teaux微分、不动点定理和隐函数定理。

在编写时,我们没有过多地专注于定理的证明,而是更侧重于介绍相关理论与经典分析概念及代数方法的联系,以简明直观的语言阐述泛函分析的思想和方法，使学生在掌握抽象理论工具的同时能体会到深刻的数学思想，得到较好的数学训练。本书另一突出的特点是非常重视基本理论与应用的结合，除在正文中适当介绍相关理论的典型应用之外，还以“本章注记”的形式给出了一些与本章内容相关的重要应用进展，此举可以激发同学们的学习兴趣，更好地帮助他们理解和掌握泛函分析的思想与方法。

本书第 1 章和第 2 章由滕岩梅编写，第 3 章由王永革编写，第 4 章由贾超华

编写，习题解答提示由冯伟杰编写，最后的统稿和完善工作由王永革完成。尽管编者非常想写好此书，但由于自身理论水平不高，加上对应用方面理解的不足，书中定会有诸多不妥之处，若蒙专家和读者指正，必将不胜感激！

值此出版之际，编者要特别感谢北京航空航天大学孙善利教授。孙先生不仅在最初交由编者承担编写本书之重任，亦全程关心本书的编写；在本书初稿完成后，更是亲自试用3年，提出了许多修改建议，着实使本书增色不少，编者受益良多。感谢数学与系统科学学院的领导和同事在本书编写过程中给予编者的关心与照顾。当然，本书得以出版，要感谢北京航空航天大学研究生院精品课建设及教材出版项目和973（No. 2010CB731 900）项目的资助。

本书适用对象是工科各专业硕士和博士研究生，也可以作为工程研究人员的参考书。

编　者

2012 年 2 月

于北京航空航天大学图书馆西配楼

目　　录

第 1 章　实变理论基础

在微积分中，我们学习了 Riemann 积分，这种积分对微积分的建立和发展起到了无可替代的作用。但是随着数学理论的发展，人们逐渐发现 Riemann 积分具有一定的局限性。首先，Riemann 积分所讨论的都是“基本连续”的函数，可积函数类不多；其次，极限与积分交换顺序对函数列的收敛条件要求过强；最后，我们知道微积分基本定理是微积分学的重要内容，但可微函数的导函数未必 Riemann 可积，这在很大程度上限制了此定理的应用范围。

为了克服以上问题，法国数学家 Lebesgue 放弃了对函数的定义域进行分割进而求和的方法，转而对函数的值域进行分割，并于 1902 年在其博士论文《积分、长度与面积》中建立了 Lebesgue 积分理论。这类积分是 Riemann 积分的改进，具有更广的适用范围和更好的应用价值。

泛函分析中所考虑的积分基本上都是 Lebesgue 积分，因此，本章中我们将简要介绍 Lebesgue 测度与积分理论。

1.1　集合与点集

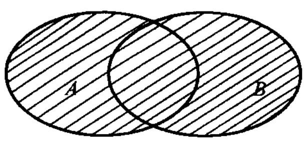
集合论是由德国数学家 Cantor(康托)于 19 世纪 80 年代创立的，是实变函数理论的基础。本节简单介绍集合的概念和性质。

定义 1.1.1　具有某种特定性质的对象的全体称为集合，常用大写英文字母 $A,B,X,\cdots$ 表示。集合中的对象称为元素，常用小写英文字母 $a,b,x,\cdots$ 表示。对于集合 A，$x\in A$ 表示 x 是 A 的一个元素；当 x 不是 A 的元素时，用 $x\notin A$(或 $x\overline{\in}A$)表示。

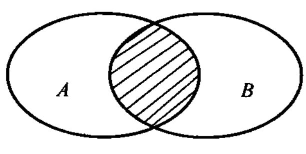
定义 1.1.2　假设 A,B 是两个集合，如果 A 中的元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$，或 $B\supset A$；如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 等于 B，记作 $A=B$；如果 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集。

定义 1.1.3　设 A,B 是两个集合，称由 A 与 B 中所有元素构成的新集合为 A 与 B 的并集(或和集)，记为 $A\cup B$；称由 A,B 的所有公共元素构成的新集合为 A 与 B 的交集，记为 $A\cap B$(见图 1.1)，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\},\qquad A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$



(a) $A\cup B$



(b) $A\cap B$

图 1.1　集合并、交运算示意图

定义 1.1.4 设 A,B 是两个集合，称由属于 A 不属于 B 的所有元素构成的新集合为 A 与 B 的差集，记为 $A-B$(或 $A\backslash B$)，即

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$$

特别地，若 $B\subset A$，则称 $A-B$ 为 B 关于 A 的余集，记为 B_A^C；若 $A=\mathbb{R}$ 或在不引起混淆的情况下，可简记为 B^C。(见图 1.2)

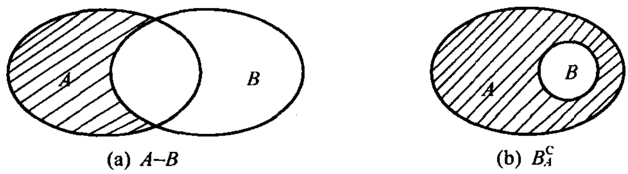


图 1.2 集合差集、余集示意图

集合并、交、差的运算具有下列性质。

定理 1.1.5 假设 A,B,C 是三个集合，则

(1) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;

　　$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(2) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(3) $(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C)$;

(4) $(C-A)-B=C-(A\cup B)$;

(5) $A\cup B=(A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B)$;

(6) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$;

(7) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$。

对集合而言，其元素的“多少”是集合最基本的表征之一，但如何定义一般集合元素的多少呢？进一步，又如何比较两个集合元素的多少呢？

定义 1.1.6 设 A,B 是两个集合，如果在 A 和 B 之间存在一一对应关系，则称集合 A 与集合 B 对等，记作 $A\sim B$。如果集合 $A\sim B$，则称 A 与 B 具有相同的基数或势，记作 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$。

基数概念是有限集元素个数概念的推广，它反映了一切对等集所仅有的共性。

显然，$A\sim A$；若 $A\sim B$，则 $B\sim A$；若 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$。

例 1.1.7 证明集合 $(a,b)(a<b)$ 与 $(-\infty,\infty)$ 对等。

证明

$$y=\tan\left(\frac{x-b}{b-a}+\frac{1}{2}\right)\pi,\qquad x\in(a,b)$$

就定义了 (a,b) 与 $(-\infty,\infty)$ 之间的一一对应关系。

定义 1.1.8 设 A 是一个集合，如果存在自然数 n_0，使得 A 与 $\{1,2,\cdots,n_0\}$ 对等，则称集合 A 为有限集，否则称 A 为无限集。

定义 1.1.9 设 A 是无限集，$\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\}$ 是自然数集，若 $A\sim\mathbb{N}$，则称 A 为可列集，否则称 A 为不可列集。有限集与可列集统称可数集。

有两种常见的势，一种是自然数集 $\mathbb{N}$ 的势，记为 $\aleph_0$；另一种是实数集 $\mathbb{R}$ 的势，称为连续势，记为 $\aleph$。可以证明 $\aleph=2^{\aleph_0}$，但不存在势介于 $\aleph_0$ 和 $\aleph$ 之间的无穷集合，并且不存在最大势的集合，感兴趣的读者请参阅参考文献[1]。

定理 1.1.10 任何无限集合都包含可列子集。

由此定理可知，可列集是势最小的无限集合，其势为$\aleph_0$。进一步，可以证明无限集合可与其真子集对等，而这正是无限集的一个特征。

定理 1.1.11 有限或可列个可列集的并仍是可列集。

例 1.1.12 全体有理数集合是可列集。

证明 令$\mathbb{Q}_+=\{x\in\mathbb{Q}\mid x>0\}$，$\mathbb{Q}_-=\{x\in\mathbb{Q}\mid x<0\}$，$A_n=\left\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{i}{n},\cdots\right\}$，$n\in\mathbb{N}$。显然 A_n 为可列集。而$\mathbb{Q}_+=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，所以$\mathbb{Q}_+$为可列集。同理，$\mathbb{Q}_-$为可列集，将$\mathbb{Q}_+$，$\mathbb{Q}_-$的元素分别排列为

$$\mathbb{Q}_+:\quad a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$$
$$\mathbb{Q}_-:\quad b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n,\cdots$$

则$\mathbb{Q}$中元素可以排列为

$$\mathbb{Q}:\quad 0,a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,b_n,\cdots$$

可见$\mathbb{Q}$是可列集。

下面给出实直线$\mathbb{R}$上点集的概念。除非特别指出，本章后面讨论的集合均为$\mathbb{R}$的子集。

定义 1.1.13 假设 x_0 是一实数，$\delta>0$，称开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$是 x_0 点的 δ 邻域，记为$B(x_0,\delta)$。

定义 1.1.14 设 $A\subset\mathbb{R}$ 是一个非空集合，$x_0\in A$，如果存在 $B(x_0,\delta)\subset A$，则称 x_0 是 A 的一个内点；A 的全体内点称为 A 的内部，并记为 A°；如果 $A=A^\circ$，则称 A 为开集。

定理 1.1.15 开集的运算性质：

(1) 任意多个开集的并是开集；

(2) 有限多个开集的交是开集。

定理 1.1.16 实直线上任何非空的开集 G 都可以表示为至多可列个互不相交的开区间(包括$(-\infty,a)$，$(b,+\infty)$以及$(-\infty,+\infty)$)的并，这些开区间称为 G 的构成区间。

证明 对于任意的 $a\in G$，由 G 是开集，可知存在 $\delta>0$，使得$(a-\delta,a+\delta)\subset G$。令

$$a'=\inf\{x\,|\,(x,a)\subset G\},\qquad a''=\sup\{x\,|\,(a,x)\subset G\}$$

显然，$a'<a<a''$，$a'\notin G$，$a''\notin G$ 且$(a',a'')\subset G$。我们称这样的开区间(a',a'')为 G 关于点 a 的**构成区间** I_a。

设 $I_a=(a',a'')$，$I_b=(b',b'')$均为 G 的构成区间。不妨设 $a<b$，若 $I_a\cap I_b\neq\varnothing$，则有 $b'<a''$。令 $\min\{a',b'\}=c$，$\max\{a'',b''\}=d$，则有$(c,d)=(a',a'')\cup(b',b'')$。取 $x\in I_a\cap I_b$，则 I_x 是构成区间且$(c,d)=(a',a'')=(b',b'')$，说明构成区间要么重合，要么互不相交。

最后，在$\mathbb{R}$中互不相交的区间族内每个区间中都取一个有理点，则可以建立区间族与有理点子集间的对应关系。可见，$\mathbb{R}$中互不相交的区间族是至多可列的。

定义 1.1.17 如果对任意的 $\delta>0$，$B(x_0,\delta)$中都含有 A 中除 x_0 以外的点 x，则称 x_0 为 A 的聚点(极限点)；集合 A 的聚点的全体称为 A 的导集，记为 A'；$A\cup A'$称为 A 的闭包，记为$\overline{A}$。如果 $A=\overline{A}$，则称 A 为闭集。

定理 1.1.18 闭集的运算性质：

(1) 任意多个闭集的交是闭集；

(2) 有限个闭集的并是闭集。

无限个闭集的并未必是闭集。比如:设 $F_k=\left[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right]$,则 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k=(0,1]$不是闭集,此例同时表明对无限个集合而言,关系式 $\overline{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\overline{F_k}$未必成立。

开集与闭集之间具有如下关系。

定理 1.1.19 假设 $F\subset\mathbb{R}$,F 是闭集,当且仅当 $F^{C}=\mathbb{R}-F$ 是开集。

定理 1.1.20 若 G 是开集,F 是闭集,则 $F_G^{C}=G-F$ 是开集,$G_F^{C}=F-G$ 是闭集。

例 1.1.21 Cantor 三分集是不可列闭集。

将区间$[0,1]$三等分,挖去中间的三分开区间$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$。将剩下的两个闭区间 $F_{1,1}=\left[0,\frac{1}{3}\right]$,$F_{1,2}=\left[\frac{2}{3},1\right]$再分别三等分,挖去各自中间的三分开区间$\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$,$\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$。再将剩余的四个闭区间 $F_{2,1}=\left[0,\frac{1}{9}\right]$,$F_{2,2}=\left[\frac{2}{9},\frac{3}{9}\right]$,$F_{2,3}=\left[\frac{6}{9},\frac{7}{9}\right]$,$F_{2,4}=\left[\frac{8}{9},1\right]$分别三等分,再挖去各自中间的三分开区间。如此继续下去,最终$[0,1]$中剩余的点所构成的集合称为 Cantor 三分集,简称 Cantor 集,记为 K。

证明 首先证 K 为闭集。事实上,挖去的集合为

$$G_0=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2}\right)\cup\left(\frac{7}{3^2},\frac{8}{3^2}\right)\cup\left(\frac{1}{3^3},\frac{2}{3^3}\right)\cup\cdots$$

显然 G_0 是一个开集,所以 $K=[0,1]-G_0$ 是个闭集。

也可以采用下面的方法证明 K 为闭集。

记 $F_n=\bigcup\limits_{k=1}^{2^n} F_{n,k}$,$n\in\mathbb{N}$,易见 F_n 为闭集,且 $K=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$,可见 K 为闭集。

假设 K 是可列集,则 K 中的数可以排成一列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$,那么在区间$\left[0,\frac{1}{3}\right]$和$\left[\frac{2}{3},1\right]$中总有一个不含 x_1,设它为$[a_1,b_1]$。将$[a_1,b_1]$三等分,则其左右两个闭区间内至少有一个不含 x_2,设为$[a_2,b_2]$。以此类推,可得闭区间列$[a_n,b_n]$,满足

(1) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$;

(2) $b_n-a_n=\frac{1}{3^n}\to 0,n\to\infty$;

(3) $x_n\notin[a_n,b_n]$,$n\in\mathbb{N}$。

由闭区间套定理,存在唯一点 $c\in[a_n,b_n]$,$n\in\mathbb{N}$,但 $c\neq x_n$,$n\in\mathbb{N}$,且 $c=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$,故 c 是 K 的聚点。又因为 K 是闭集,故 $c\in K$。与假设矛盾。

作为一个构思巧妙的特殊点集,Cantor 集常常是构造重要特例的基础。

1.2 Lebesgue 测度

前面我们已经提到,Lebesgue 积分比 Riemann 积分适用范围更广,对于“不基本连续”的

函数，仍可以进行 Lebesgue 积分。但此时分割区间已没有通常意义下的“长度”，为此，我们必须扩展“长度”，建立测度的概念。

定义 1.2.1　(有界开集的测度)：

(1) 规定空集$\varnothing$的测度 $m(\varnothing)=0$；

(2) 设 G 是$\mathbb{R}$中的非空有界开集，则定义 G 的测度 $m(G)$为 G 的所有构成区间的长度之和，即若 $G=\bigcup\limits_i(\alpha_i,\beta_i)$，则

$$m(G)=\sum_i(\beta_i-\alpha_i)$$

可见：$0\leqslant m(G)\leqslant+\infty$。

定理 1.2.2　有界开集的测度具有如下性质：

(1) 若 $G_1,G_2\subset\mathbb{R}$ 为有界开集，且 $G_1\subset G_2$，则 $m(G_1)\leqslant m(G_2)$；(单调性)

(2) $G_1,G_2\subset\mathbb{R}$ 为有界开集，则 $m(G_1\cup G_2)\leqslant m(G_1)+m(G_2)$；(次可加性)

(3) 设 $G=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}G_i$，且 $G_i\cap G_j=\varnothing,i\neq j$，则 $m(G)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}m(G_i)$。(可数可加性)

定义 1.2.3　(非空有界闭集的测度)：

设 $F\subset\mathbb{R}$ 是非空有界闭集，则定义 F 的测度 $m(F)$为

$$m(F)=(b-a)-m((a,b)-F)$$

其中，(a,b)是包含 F 的任何开区间。

可以证明，F 的测度与(a,b)的选取无关。事实上，若 F 为单点集，则显然有此结论。若 F 不是单点集，令 $\alpha=\inf\{x\mid x\in F\}$，$\beta=\sup\{x\mid x\in F\}$，则 α,β 为相异实数且均属于 F。容易证明，对任意的包含 F 的开区间(a,b)，有

$$(a,b)-F=(a,\alpha)\cup(\beta,b)\cup((\alpha,\beta)-F)$$

且右边三个开集互不相交，据开集的测度的定义，有

$$m((a,b)-F)=\alpha-a+b-\beta+m((\alpha,\beta)-F)$$

或

$$b-a-m((a,b)-F)=\beta-\alpha-m((\alpha,\beta)-F)$$

可见 $m(F)$与 a,b 的取法无关。

例 1.2.4　求 Cantor 集 K 的测度。

解　因为 Cantor 集是有界闭集，选取$(a,b)=(-1,2)\supset K$，则$(a,b)-K=G_0\cup(-1,0)\cup(1,2)$，而 $m(G_0)=\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3^2}+\cdots+2^n\cdot\frac{1}{3^{n+1}}+\cdots=1$，所以 $m((a,b)-K)=3$，而 $m(a,b)=3$，所以 $m(K)=0$。

Cantor 集是一个测度为零的不可列集的重要实例。

与开集相似，闭集的测度也具有单调性与次可加性。此外，具有一定关系的开集和闭集的测度之间有如下性质。

定理 1.2.5　设 $F\subset\mathbb{R}$ 为有界闭集，$G\subset\mathbb{R}$ 为有界开集，$F\subset G$，则 $m(F)\leqslant m(G)$。

证明　因 G 是有界开集，存在开区间$(a,b)\supset G\supset F$，这时 $m(F)=b-a-m((a,b)-F)$。又因为$(a,b)=((a,b)-G)\cup G\subset((a,b)-F)\cup G$，由开集测度的单调性与次可加性，得 $b-a\leqslant m((a,b)-F)+m(G)$，即 $m(F)\leqslant m(G)$。

至此，利用开集、闭集的测度以及微积分中求曲边梯形面积的思想，可以定义任意非空有界集的测度。

定义 1.2.6 设 $E\subset\mathbb{R}$ 非空有界，称所有包含 E 的有界开集的测度的下确界为 E 的外测度，记为 $m^*(E)$，即

$$m^*(E)=\inf\{m(G)\mid G\text{ 为有界开集},E\subset G\}$$

定义 1.2.7 设 $E\subset\mathbb{R}$ 非空有界，称所有包含于 E 的有界闭集的测度的上确界为 E 的内测度，记为 $m_*(E)$，即

$$m_*(E)=\sup\{m(F)\mid F\text{ 为有界闭集},F\subset E\}$$

显然，对任何集合 E，$m_*(E)\leqslant m^*(E)$。

定义 1.2.8 设 $E\subset\mathbb{R}$ 非空有界，如果 $m_*(E)=m^*(E)$，则称 E 是 Lebesgue 可测集(简称可测集)。此时，称 $m^*(E)$ 为 E 的测度，记为 $m(E)$。

可以证明，有界开集、有界闭集都是可测集。若 $m^*(E)=0$，则 E 是可测集且测度为零，这样的集合称为零测度集。单点集、有理数集、Cantor 集都是零测度集。

有界集的测度具有如下性质。

定理 1.2.9 (1) 设 E_1,E_2 是有界可测集，$E_1\subset E_2$，则 $m(E_1)\leqslant m(E_2)$；(单调性)

(2) 设 E_k 是有界可测集，$E_i\cap E_j=\varnothing,i\neq j$，且 $E=\bigcup\limits_k E_k$ 有界，则 E 可测，且 $m(E)=\sum\limits_k m(E_k)$。(可加性)

除定义外，如何判定一个有界集合可测呢？

定理 1.2.10 设 $E\subset\mathbb{R}$ 是一个有界集，则 E 可测的充分必要条件是对任意的 $\varepsilon>0$，存在满足 $F\subset E\subset G$ 的有界开集 G 与闭集 F，使得 $m(G-F)<\varepsilon$。

证明 必要性。设 E 可测，则 $m^*(E)=m_*(E)$。由内外测度的定义，对任意的 $\varepsilon>0$，存在有界开集 $G\supset E$ 与有界闭集 $F\subset E$，使得

$$m(G)<m^*(E)+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$m(F)>m_*(E)-\frac{\varepsilon}{2}$$

由于 $m^*(E)=m_*(E)$，故 $m(G)-m(F)<\varepsilon$。又 $G=(G-F)\cup F$，且 $G-F$ 与 F 不相交，由定理 1.2.9 中的测度的可加性，有

$$m(G-F)=m(G)-m(F)<\varepsilon$$

充分性。假设对任意的 $\varepsilon>0$，存在满足 $F\subset E\subset G$ 的有界开集 G 与闭集 F，使得 $m(G-F)<\varepsilon$，则

$$m_*(E)\leqslant m^*(E)\leqslant m(G)=m(F)+m(G-F)<m(F)+\varepsilon\leqslant m_*(E)+\varepsilon$$

由 ε 的任意性，得 $m_*(E)=m^*(E)$，所以 E 是可测集。

利用上面的定理可以证明可测集对于并、交、差三种运算封闭。

定理 1.2.11 (1) 设 $(a,b)\subset\mathbb{R}$ 是有界开集，$E\subset(a,b)$ 是可测集，则 E 在 (a,b) 中的余集也是可测集；

(2) 设 E_1,E_2 可测，则 $E_1\cup E_2,E_1\cap E_2,E_1-E_2$ 均可测。

证明请参阅参考文献[2]。

定理的结论(2) 可以推广到可列情形，且利用此结果可得证。

例 1.2.12　设 E 是可测集，$m(E)=1$，$\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 E 的一列可测子集，且对任意的 $\varepsilon>0$，有这个集列中的一个集 E_i，使 $m(E_i)>1-\varepsilon$，证明

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)=1$$

证明　因为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i\subset E$，所以

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)\leqslant m(E)=1$$

对任意的 $\varepsilon>0$，选取 i，使得 $m(E_i)>1-\varepsilon$，所以

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)\geqslant m(E_i)>1-\varepsilon$$

由 ε 的任意性，结论得证。

下面给出无界可测集的定义。

定义 1.2.13　设 $E\subset\mathbb{R}$ 为无界集，若对任何的自然数 n，$E_n=E\cap(-n,n)$ 为可测集，则称 E 为可测集，并称极限 $\lim\limits_{n\to\infty} m(E_n)$ 为 E 的测度，记为 $m(E)$。

此极限值可能是有限值，也可能是 $+\infty$。若此极限值是有限值，则 E 的测度定义为此极限值；否则，E 的测度定义为 $+\infty$。

注记 1.2.14　对于无界集，定理 1.2.11 的结论仍成立。

尽管我们在数学应用中遇见的集合基本上都是可测集，但$\mathbb{R}$ 中的不可测集确实是存在的。第一个不可测集的实例是由意大利数学家 Voltera 给出的，由于在其构造过程中要用到1.5 节中的选择公理，故在此不再详述。

最后，再介绍两个常用的概念。

定义 1.2.15　由$\mathbb{R}$ 中的所有可测集组成的集合称为可测集类，记为 L。

从开集、闭集出发，经过并、交、差、可列并、可列交运算后，得到的集合称为 Borel(波雷尔)集，由 Borel 集组成的集类称为 Borel 集类，记为 B，显然 $B\subset L$。

1.3　可测函数

Lebesgue 积分采用的是对值域进行划分的方法，因而要求集合 $E_i=\{x\in E\mid y_{i-1}\leqslant f(x)<y_i\}$ 具有某种长度意义，即应为可测集。而集合 E_i 是否可测与函数 f 有着密切的关系，因此，我们要给出可测函数的定义。

定义 1.3.1　假设 $f(x)$是定义在可测集 E 上的广义实值函数(即允许取值为$\pm\infty$)，若对任意的 $a\in\mathbb{R}$，E 的子集

$$E(f>a)=\{x\in E\mid f(x)>a\}$$

都是可测集，则称 f 是 E 上的 Lebesgue 可测函数。

注记 1.3.2　定义中要求是对任意的 $a\in\mathbb{R}$，$E(f>a)$是可测集，但实际只需对$\mathbb{R}$ 中的一个稠密集(见定义 2.2.16)中的元 r，证明 $E(f>r)$是可测集即可。

定理 1.3.3 设有界实值函数 $f(x)$ 是可测集 E 上的可测函数，则对任意的 $a,b\in\mathbb{R}$，$a<b$，集合

$$E(f\geqslant a)=\{x\in E\mid f(x)\geqslant a\},\qquad E(f<a)=\{x\in E\mid f(x)<a\}$$
$$E(f\leqslant a)=\{x\in E\mid f(x)\leqslant a\},\qquad E(f=a)=\{x\in E\mid f(x)=a\}$$
$$E(a\leqslant f\leqslant b)=\{x\in E\mid a\leqslant f(x)\leqslant b\}$$

都是可测集。

证明 因为

$$E(f\geqslant a)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E\left(f>a-\frac{1}{n}\right)$$
$$E(f<a)=E-E(f\geqslant a)$$
$$E(f\leqslant a)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E\left(f<a+\frac{1}{n}\right)$$
$$E(f=a)=E(f\geqslant a)-E(f>a)$$
$$E(a\leqslant f\leqslant b)=E(f\geqslant a)\cap E(f\leqslant b)$$

所以上述集合均是可测集。

例 1.3.4 定义在零测度集上的函数是可测函数。

证明 假设 f 是定义在可测集 E 上的函数，对任意的 $a\in\mathbb{R}$，$E(f>a)\subset E$，则

$$0\leqslant m^*(E(f>a))\leqslant m(E)$$

当 $m(E)=0$ 时，有 $m^*(E(f>a))=0$，从而 $E(f>a)$ 是可测集。

例 1.3.5 可测集上的连续函数为可测函数。

证明 任取 $x\in E(f>a)$，$f(x)>a$。由 f 在 E 上连续可知，存在 $\delta_x>0$，当 $x_1\in E\cap B(x,\delta_x)$ 时，有 $f(x_1)>a$，故 $E\cap B(x,\delta_x)\subset E(f>a)$。作开集 $G_a=\bigcup\limits_{x\in E(f>a)}B(x,\delta_x)$，则 $E\cap G_a\subset E(f>a)$。又明显有 $E\cap G_a\supset E(f>a)$，所以 $E(f>a)=E\cap G_a$。因为 G_a 是开集，可测，故 $E(f>a)$ 是可测集，f 是 E 上的可测函数。

例 1.3.6 设 E_i，$i=1,2,\cdots,n$，是可测集，且 E_i 互不相交，$E=\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$，$f$ 是定义于 E 上，且在 E_i 上分别取值为 c_i，$i=1,2,\cdots,n$ 的函数（称为简单函数），则 $f(x)$ 是可测函数。

证明 不妨设 $c_1<c_2<\cdots<c_n$，因为对任意的 $a\in\mathbb{R}$，有

$$E(f>a)=\begin{cases}\varnothing, & a\geqslant c_n\\ E_n, & c_{n-1}\leqslant a<c_n\\ \vdots & \\ \bigcup\limits_{i=2}^{n}E_i, & c_1\leqslant a<c_2\\ E, & a<c_1\end{cases}$$

故 $E(f>a)$ 是可测集，$f(x)$ 是可测函数。

简单函数是可测函数类中结构比较简明的一种函数，稍后我们将给出它与一般可测函数之间的某种关系。

下面讨论可测函数的性质。

定理 1.3.7　设 f 定义在可测集 $E_i, i=1,2$ 的并集 $E=E_1\cup E_2$ 上，则 f 在 E 上可测的充分必要条件是 f 在 $E_i, i=1,2$ 上均可测。

证明　必要性。对任意的实数 a，因为 $E_i(f>a)=E_i\cap E(f>a)$，又 f 在 E 上可测，$E(f>a)$ 是可测集，从而 $E_i(f>a)$ 是可测集，所以 f 在 $E_i, i=1,2$ 上可测。

充分性。对任意的实数 a，因为 $E(f>a)=E_1(f>a)\cup E_2(f>a)$，所以 f 在 E 上可测。

推论 1.3.8　f 在可测集 E 上可测的充分必要条件是 f 在 $E-E_1$ 上可测，其中 E_1 是 E 的零测度子集。

从上面的定理及推论可以看出，函数的可测性与其在零测度集上的取值无关，因而有如下定义。

定义 1.3.9　若 f 在 E 上可测，g 在 E 上有定义，且 $m(E(f\neq g))=0$，则称函数 g 与 f 在 E 上几乎处处相等，记为 $f=g$，a.e. 于 E。此时，g 在 E 上也可测。

设 f 在 E 上可测，若有 $m(\{x\in E \mid |f(x)|=+\infty\})=0$，则称 f 在 E 上几乎处处有限，记为 $|f(x)|<+\infty$，a.e. 于 E。

定理 1.3.10　设 $f(x), g(x)$ 都是可测集 E 上的可测函数，则函数 $kf(k\in\mathbb{R})$，$f\pm g$，$f\cdot g$，$f/g(g\neq 0)$，都是 E 上的可测函数。

证明　(1) kf

因为 $k=0$ 时，$kf\equiv 0$，故 kf 在 E 上可测。当 $k>0$ 时，$\forall a\in\mathbb{R}$，$E(kf\geqslant a)=E\left(f\geqslant\dfrac{a}{k}\right)$，所以由 f 在 E 上可测，可知 kf 在 E 上可测。同理，当 $k<0$ 时，kf 也在 E 上可测。

(2) $f\pm g$

因为

$$E(f+g>a)=\bigcup_{i=1}^{\infty}[E(f>r_i)\cap E(g>a-r_i)]$$

$$E(f-g>a)=\bigcup_{i=1}^{\infty}[E(f>r_i)\cap E(g<r_i-a)]$$

其中，$\{r_i\}$ 是全体有理数，所以 $f\pm g$ 是可测函数。

(3) $f\cdot g$

先证当 f 可测时，f^2 可测。事实上，对任意的 $a\in\mathbb{R}$，有

$$E(f^2>a)=\begin{cases}E, & a<0\\ E(f>\sqrt{a})\cup E(f<-\sqrt{a}), & a\geqslant 0\end{cases}$$

所以 f^2 可测。

再由 $f\cdot g=\dfrac{1}{4}[(f+g)^2-(f-g)^2]$，可知 $f\cdot g$ 是可测函数。

(4) f/g

因为 $f/g=f\cdot 1/g$，所以只需考虑 $1/g$ 的可测性。而

$$E(1/g>a)=\begin{cases}E(g>0)\cap E(g<1/a), & a>0\\ E(g>0), & a=0\\ E(g>0)\cup E(g<1/a), & a<0\end{cases}$$

所以 $1/g$ 是可测函数，进而 f/g 是可测函数。

例 1.3.11 设 f,g 是 E 上的可测函数，讨论 $E(f>g)$ 的可测性。

解 设 $x\in E(f>g)$，则存在有理数 r，使 $f(x)>r>g(x)$，因此 $x\in E(f>r)\cap E(g<r)$。所以

$$E(f>g)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}[E(f>r_i)\cap E(g<r_i)]$$

这里 $\{r_i\}$ 是所有有理数。

反过来，设 $x\in\bigcup_{i=1}^{\infty}[E(f>r_i)\cap E(g<r_i)]$，则存在 r_i，使得 $x\in E(f>r_i)$ 且 $x\in E(g<r_i)$，即 $x\in E(f>g)$。因此

$$E(f>g)\supset\bigcup_{i=1}^{\infty}[E(f>r_i)\cap E(g<r_i)]$$

总之

$$E(f>g)=\bigcup_{i=1}^{\infty}[E(f>r_i)\cap E(g<r_i)]$$

所以 $E(f>g)$ 是可测集。

与连续函数不同，可测函数在极限运算下是封闭的，这就保证了建立的积分在理论上使用起来更加便利。为此，我们先引入函数列收敛的概念。

定义 1.3.12 设 $f,f_n,n\in\mathbb{N}$ 都是 E 上的广义实值函数。

(1) $\forall\varepsilon>0,\forall x\in E,\exists N$(与 ε,x 有关)，当 $n>N$ 时，有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，称 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 E 上处处收敛于 f，记为

$$f_n\longrightarrow f,\qquad n\longrightarrow\infty$$

(2) $\forall\varepsilon>0,\exists N$(仅与 ε 有关)，$\forall x\in E$，当 $n>N$ 时，都有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，称 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 E 上一致收敛于 f，记为

$$f_n\xrightarrow{\text{一致}}f,\qquad n\longrightarrow\infty$$

(3) 如果 $\exists E_0\subset E,m(E_0)=0$，且对 $\forall x\in E-E_0,f_n(x)\to f(x)$，称 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f，记为 $f_n\to f$，a. e. 于 E。

注记 1.3.13 上述收敛概念有如下蕴含关系：(2) ⇒(1)⇒(3) ，但反之不成立。

例 1.3.14 设函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，其中 $f_n(x)=x^n$，定义函数 f 如下：

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

则 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上处处收敛于 f，但不一致收敛于 f。而在去掉一个测度可任意小的正测集后，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在余下点集上一致收敛于 f。

此例也可用于说明连续函数在极限运算下的不封闭性。

那么，什么条件下处处收敛、甚至几乎处处收敛的函数列一致收敛呢？

定理 1.3.15(Egoroff 定理) 设 E 是可测集，且 $m(E)<+\infty$，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 E 上的几乎处处有限的可测函数序列，f 是 E 上几乎处处有限的可测函数，则下列陈述等价：

(1) $f_n\to f$，a. e. 于 E；

(2) 对任意的 $\delta>0$，存在可测子集 $E_\delta\subset E$，使得 $m(E-E_\delta)<\delta$，而在 E_δ 上 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收