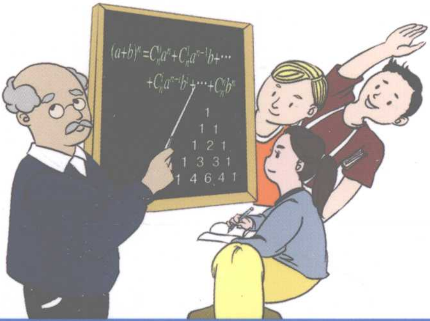


数林外传系列

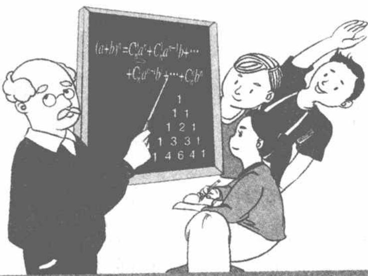
跟大学名师学中学数学

反射与反演

第2版

◎严镇军　编著

中国科学技术大学出版社



数林外传系列

跟大学名师学中学数学

反射与反演

第2版

严镇军　编著

中国科学技术大学出版社

内容简介

本书从平面几何对称的知识出发，介绍反射变换的概念、性质和它在几何极值问题、等周问题、光的传播原理等方面的有趣应用；在此基础上引出一般平面变换的概念，介绍平移变换、旋转变换和相似变换在证明几何题方面的应用；然后介绍一种反演变换及其应用；最后把代数和几何联系起来，介绍平面几何和复数的关系，利用复数作出各种平面变换的表达式，并介绍更为一般的平面变换. 书中还配备少量的习题和解答概要，供选用. 本书有助于读者更好地理解、掌握平面几何的某些知识和它的应用.

图书在版编目(CIP)数据

反射与反演/严镇军编著. —2 版. —合肥：中国科学技术大学出版社，2013. 1

(数林外传系列：跟大学名师学中学数学)

ISBN 978-7-312-03111-3

Ⅰ. 反…　Ⅱ. 严…　Ⅲ. 平面几何—高中—教学参考资料

Ⅳ. G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 238148 号

中国科学技术大学出版社出版发行

安徽省合肥市金寨路 96 号，230026

http://press. ustc. edu. cn

中国科学技术大学印刷厂

全国新华书店经销

*

开本：880 mm×1230 mm　1/32　印张：3. 875　字数：77 千

1991 年 9 月第 1 版　2013 年 1 月第 2 版

2013 年 1 月第 1 次印刷

定价：11. 00 元

目　　次

1 反射变换的概念和性质

我们在日常生活和实际生产中，常会遇到各种轴对称的图形，如等腰三角形、等腰梯形、六角螺帽及七星瓢虫等(图1.1). 这些图形都有这么一个特点，如果沿着某条直线(对称

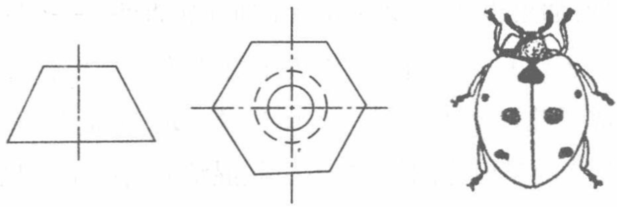


图 1.1

轴)把图形对折，在直线两侧的图形是完全重合的. 利用这种沿某条直线把平面对折的方法，可以得到一种平面上的点的对应关系. 如图 1.2 所示，设 l 是平面上的一条定直线，如果绕 l 把此平面在空中旋转 180°，这时平面上位于 l 一侧的任一点 A，将变换成此平面上位于 l 另一侧的点 A_1；l 上的任一点 O，则变成自己；平面上任一图形 F，也随之变成此

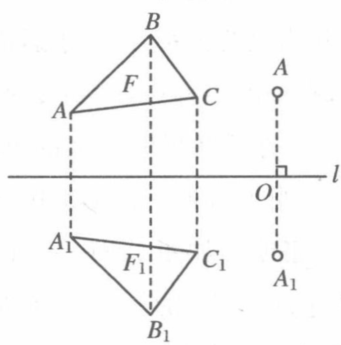


图 1.2

平面上的另一图形 F_1. 具体地说,设 A 是平面上的任一点,过点 A 作 l 的垂线,交 l 于点 O,并延长 AO 至 A_1,使 $AO=A_1O$,我们把点 A_1 叫做点 A 关于直线 l 的**反射像**,而点 A 叫做点 A_1 的**原像**. 同时,我们规定 l 上任一点 A 的反射像就是自己. 这里原像 A 和反射像 A_1 的关系,就好比是读者所熟悉的函数概念中的自变量 x 和函数 y 的关系. 按照上述方式将平面上一像点 A 作关于直线 l 的反射像点 A_1 的变换,叫做关于直线 l 的**反射变换**或**对称变换**,而直线 l 叫做**反射轴**或**对称轴**. 如果设 F 是某个平面图形(如直线、多边形及圆,等等),将 F 上的每一个点,作关于直线 l 的反射像点,这些像点组成了此平面上的另一个图形 F_1,F_1 叫做平面图形 F 关于直线 l 的反射像图形. 在不引起混淆的情况下,以后也简称之为**反射像**.

大家都知道,当我们要证明某些稍微复杂一点的几何题时,往往要添辅助线才能解决. 添辅助线的主要方法是将某些图形位置进行适当的变换,使已知条件和要证明的结论建立起明显的关系,以便于运用定理、公理,经过逻辑推理去解决. 在证题过程中,反射变换是一种常用的证明方法. 这里,先举一个简单的问题来说明.

例如,证明三角形大边上的高小于小边上的高.

证明 如图 1.3(a)、(b)所示,在$\triangle ABC$ 中,$CD\perp AB$,$BE\perp AC$,且 $AB>AC$. 分别作点 B 和点 C 关于直线 AC 和 AB 的反射像点 B_1 和点 C_1,则

$$BC = B_1C,\quad BC = BC_1. \tag{1}$$

(按通常的说法就是,分别延长 BE 和 CD 到点 B_1 和点 C_1,使 $BE = B_1E$, $CD = C_1D$. 易见 $\triangle BCE \cong \triangle B_1CE$, $\triangle BCD \cong \triangle BC_1D$,因而有 $BC = B_1C$, $BC = BC_1$.)

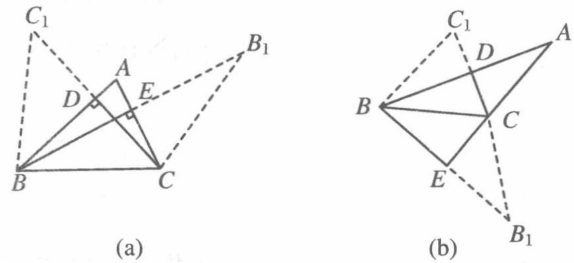


图 1.3

如图 1.3(a)的情形,在$\triangle ABC$ 中,因为 $AB>AC$,所以

$$\angle ACB > \angle ABC,$$

因此

$$\angle BCB_1 > \angle CBC_1. \tag{2}$$

又如图 1.3(b)的情形,由于$\angle BCE>\angle ABC$,所以不等式(2)仍成立. 因此,不论哪种情形,由式(1)知,$\triangle BCB_1$ 和 $\triangle CBC_1$ 都是等腰三角形,且它们的腰相等. 而由不等式(2)知,$\triangle BCB_1$ 的顶角大于$\triangle CBC_1$ 的顶角,所以前者的底边大于后者的底边,即 $BB_1>CC_1$,所以

$$BE > CD.$$

为了后面叙述的需要,现将反射变换的几何性质列出,证明是比较容易的,这里从略,请读者自己完成.

1. 设 A,B 是平面上的任意两点,它们关于直线 l 的反射像分别是 A_1 和 B_1,那么线段 AB 的反射像是线段 A_1B_1

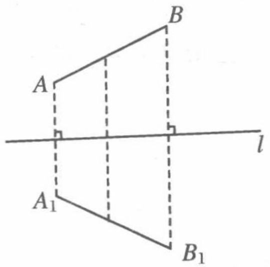


图 1.4

(图1.4),并且

$$AB = A_1B_1.$$

简单地说就是,反射变换把线段变成等长的线段.特别地,由反射轴上任一点到任何两个互为对称的点的距离相等.

2. 任一直线 m 经反射变换变成直线 m_1,并且:

(1) 若 m 平行于反射轴 l,则 m_1 也平行于 l,并且直线 m 和直线 l 的距离等于直线 m_1 和直线 l 的距离.

(2) 若 m 垂直于反射轴 l,则 m_1 就是原来的直线 m,但方向相反.这里所谓方向相反,是指 m 上的任意两点 A,B,从 A 到 B 的方向,而它们相应的像点是从 A_1 到 B_1 的方向,所以方向相反(图 1.5),同样从 C 到 D 的方向与它们的像点从 C_1 到 D_1 的方向也相反.

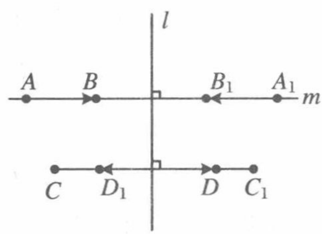


图 1.5

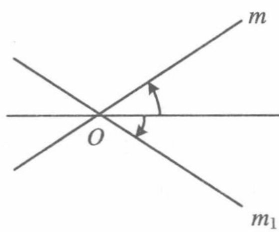


图 1.6

(3) 若直线 m 与反射轴 l 相交于点 O(图 1.6),则 m_1 与 l 也相交于点 O,并且 l 与 m 的夹角(以后我们约定相交两直线的夹角是指较小的那个角)等于 l 与 m_1 的夹角,但这两个角的

方向相反. 这里所说的方向,是指相应的方向,即从 l 到 m 的方向和从 l 到 m_1 的方向.

3. 任一圆周经反射变换变成另一个圆周,并且这两个圆周的半径相同,像圆周的圆心就是原像圆周圆心的像点,即两圆心对称于反射轴.

4. 设 m,n 是两条相交于点 O 的直线,经反射变换变成两条相交于反射像点 O_1 的直线 m_1,n_1,且 m,n 的交角和 m_1,n_1 的交角大小相等,但方向相反(图 1.7).

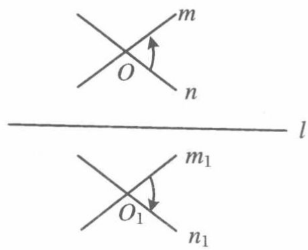


图 1.7

设一直线和一圆周相交,我们规定它们的夹角是指这条直线和圆周在交点处的切线的夹角[图 1.8(a)];若两圆周相交,它们的夹角是指在交点处切线的夹角[1.8(b)]. 显然,一直

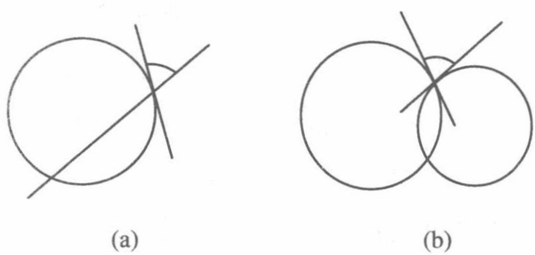


图 1.8

线和圆相切时,或者两圆相切时,它们的夹角都为零. 如果一直线和圆周的夹角为直角,则称直线和圆周直交或正交. 由

平面几何知道，通过圆心的直线而且也只有通过圆心的直线和该圆周直交．同样，如果两圆周的夹角是直角，则称这两圆周直交或正交．

5．设直线 m 和圆周 K 相交，经反射变换后，m 的像直线 m_1 和 K 的像圆周 K_1 仍相交，而且 m 与 K 的夹角和 m_1 与 K_1 的夹角相等，但方向相反．

6．设两圆周相交，经反射变换后，它们的像圆周仍然相交，而且夹角相等，但方向相反．

以后我们把性质 4 至性质 6 统称为反射变换的反向保角性．

7．任一图形 F，经反射变换后，其像图形 F_1 是图形 F 关于反射轴的对称图形，所以两图形全等，但 F，F_1 周界的环绕方向相反．如图 1.2 中，原像$\triangle ABC$ 的周界依字母 A，B，C 的顺序为顺时针方向，而像图形$\triangle A_1B_1C_1$ 的周界依字母 A_1，B_1，C_1 的顺序为逆时针方向．这个情况与你自己在镜子里的像有点相似，当你举起右手时，在镜子里的像则是举起左手，当你用右手在空中按顺时针方向画一圈，你的像就相应地用左手在空中按逆时针方向画一圈，所以反射变换也叫**镜像反射**．

上述性质为我们提供了作已知平面图形——直线形和圆关于直线 l 的反射像的方法．这就使我们在证明几何题时，可把一些添辅助线的过程说得更简单明了．例如，过已知圆的圆心 O 作直线 l 的垂线，交 l 于点 A，并延长使 $OA=O_1A$，再以 O_1 为圆心，作与已知圆同样大小的圆．这一段叙

述现在可以简单地说成，作$\odot O$关于直线l的反射像$\odot O_1$.

【例 1】(蝴蝶定理) 如图 1.9，过$\odot O$一弦AB的中点P，任作两弦CD和EF，连接DE，CF分别交AB于点M，N，求证：点P是线段MN的中点.

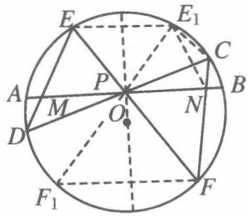


图 1.9

分析 要证明线段PM和PN相等，从图 1.9 中的实线部分看不出有直接的关系，为此必须将图形进行适当的变换. 现在假设$PM = PN$成立，那么点M和点N关于直线OP对称. 如果作出点E关于直线OP的反射像点E_1，由反射性质，应有

$$\triangle EMP \cong E_1NP.$$

这就提供了解题的途径：作出点E_1，再设法证明$\triangle EMP$与$\triangle E_1NP$全等.

证明 作线段EF关于直线OP的反射像E_1F_1，显然E_1和F_1都在$\odot O$上，并且

$$EP = E_1P, \quad \angle EPM = \angle E_1PN.$$

连接CE_1，因为C，E_1，F_1，F四点共圆，所以

$$\angle FCE_1 + \angle E_1F_1F = 180^\circ.$$

又因为

$$F_1F \mathbin{/\!/} AB,$$

所以

$$\angle E_1F_1F = \angle E_1PN.$$

从而

$$\angle E_1PN + \angle NCE_1 = 180^\circ.$$

由此可知 N, C, E_1, P 四点共圆,所以

$$\angle NCP = \angle NE_1P.$$

又因为$\angle FCD = \angle DEF$,即$\angle NCP = \angle MEP$,所以

$$\angle MEP = \angle NE_1P,$$

即

$$\triangle MEP \cong \triangle NE_1P,$$

因此

$$PM = PN.$$

【例 2】 如图 1.10,设定直线 AB 的同侧有两个不与 AB 相交的定圆 O_1, O_2,在直线 AB 上求一点 C,使得由点 C 向这两圆所作的切线中各有一条与 AB 成相等的角.

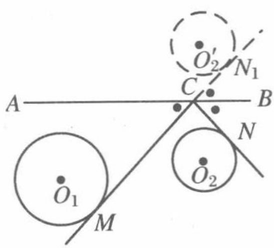


图 1.10

分析 假设点 C 已作出,CM,CN 分别是$\odot O_1$,$\odot O_2$ 的切线,那么$\angle ACM = \angle BCN$.

要使 $\angle ACM = \angle BCN$,作$\odot O_2$ 关于直线 AB 的反射像$\odot O_2'$,$\odot O_2$ 的切线 CN 相应地反射成$\odot O_2'$的切线 CN_1,由反射变换的性质 2(3)可知

$$\angle NCB = \angle N_1CB,$$

所以

$$\angle N_1CB = \angle ACM.$$

由此 M, C, N_1 三点必须共线,并且 MN_1 是$\odot O_1$,$\odot O_2'$的公

切线，所以点 C 必是公切线 MN_1 与直线 AB 的交点.

作法 (1) 作$\odot O_2$ 关于直线 AB 的反射像$\odot O_2'$；

(2) 作$\odot O_1$ 及$\odot O_2'$的公切线 MN_1，MN_1 与 AB 相交于点 C，则点 C 即为所求.

证明请读者自己写出.

本例由于$\odot O_1$ 和$\odot O_2'$的公切线有四条，所以有四个解.

【例 3】 在平行线 AB 和 CD 的外侧有两定点 P，Q，试在 AB 和 CD 之间作一垂线 EF，使得 $PE = QF$（图 1.11）.

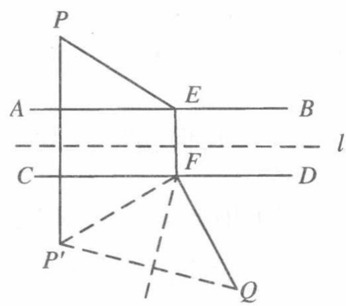


图 1.11

分析 假设垂线 EF 已作出，那么 $PE = QF$. 如果在平行线 AB 与 CD 之间作直线 l 平行于 AB，CD 且与 AB，CD 等距离，那么点 E 和点 F 关于直线 l 成反射像点，要使 $PE = QF$，可以作出点 P 关于直线 l 的反射像点 P'. 由反射变换的性质知 $PE = P'F$. 又因为 $PE = QF$，所以

$$P'F = QF.$$

由此可知，点 F 就是线段 $P'Q$ 的中垂线和直线 CD 的交点.

作法和证明都留给读者自己完成.

本例当点 Q 位于直线 PP' 上，而且不与点 P' 重合时无解；当点 Q 与点 P' 重合时，有无穷多解；其他情形都只有唯一解.

2 反射变换的应用

第1章介绍了反射变换的概念和它的一些性质，并且举例说明了反射变换对几何证题和几何作图的应用. 本章继续讲反射变换对其他问题的有趣应用.

2.1 几何极值问题

我们知道，求出或证明适合某种条件的一切几何图形中，使某个确定的几何量（如长度、面积等）达到最大值或最小值的问题，叫做几何极值问题.

在讨论几何极值问题时，常用到以下两条定理：

(1) 两点间的线以直线的长度为最短.

(2) 从一点到一直线所引的直线中，以垂线的长度为最短.

下面我们应用反射变换来研究几个几何极值问题.

1. 三角形周长问题

设 A，B 是不在直线 l 上的两定点，在 l 上求一点 C，使 $\triangle ABC$ 的周长最短.

分析 由于点 A，B 可能位于直线 l 的同侧，也可能位于 l 的两侧，所以应分两种情形考虑.

(1) 设 A，B 位于直线 l 的同侧，而点 C 已经求出. 由于线段 AB 为定长，要使 $\triangle ABC$ 的周长最短，只要 $AC+BC$ 最

短(图2.1).

要使 $AC+BC$ 为最短,只要将 BC 变成 B_1C 的位置,使 ACB_1 成一直线,并且使 $B_1C=BC$.要使 $BC=B_1C$,只要作 B 点关于直线 l 的反射像点 B_1 就可以了.

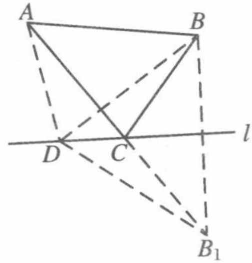


图 2.1

作法　作点 B 关于直线 l 的反射像点 B_1,连接 AB_1 交直线 l 于点 C,则点 C 就是所求的点.

证明　因为点 A,点 B 在直线 l 的同一侧,点 B_1 是点 B 关于直线 l 的反射像.所以 A,B_1 位于直线 l 的两侧.线段 AB_1 必与 l 相交.设 D 是 l 上异于 C 的任一点,由反射的性质,有

$$BD=B_1D,$$

因为

$$AD+BD=AD+B_1D,$$

而

$$AD+B_1D>AB_1=AC+B_1C=AC+BC,$$

所以

$$AD+BD>AC+BC.$$

即证得$\triangle ABC$ 的周长最短.

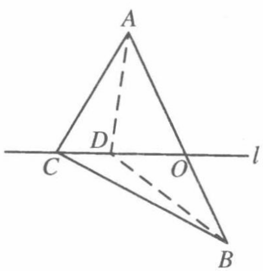


图 2.2

(2) 设 A,B 位于直线 l 的两侧(图 2.2),连接 AB 与 l 相交于 O,因 AOB 不能构成三角形,所以点 O 不是所求的点.如果设点 C 为所求的

点,它使$\triangle ABC$的周长最短,即$AC+BC$有最小值.现在线段CO上任取一点D,则不难证明

$$AD+BD<AC+BC,$$

这样与假设矛盾.也就是说,在这种情形下,本题无解.

2. 波利亚(G. Polya)问题

试证明:两端点在定圆周上,并且将这个圆分成面积相等的两块的曲线中,以该圆的直径长最短(图 2.3).

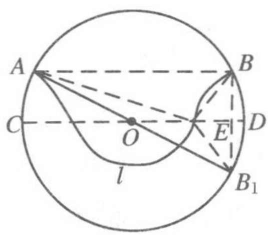


图 2.3

证明 分两种情况讨论:

(1) 设AB是$\odot O$的直径,因为两定点A,B的连线中以直线段AB为最短,所以曲线l的长度必大于直径.

(2) 设AB不是$\odot O$的直径.作直径$CD\parallel AB$,由于l把圆分成面积相等的两块,则直径CD必与曲线l相交,且至少有两个交点.设交点之一为E,而且E不是圆心O,作点B关于直径CD的反射像点B_1,因为

$$BB_1\perp CD,\quad B_1B\perp AB,$$

所以AB_1为直径.

在$\triangle AEB_1$中

$$AE+EB_1>AB_1.$$

又因为$BE=B_1E$,所以

$$AE+BE>AB_1.$$

又由于