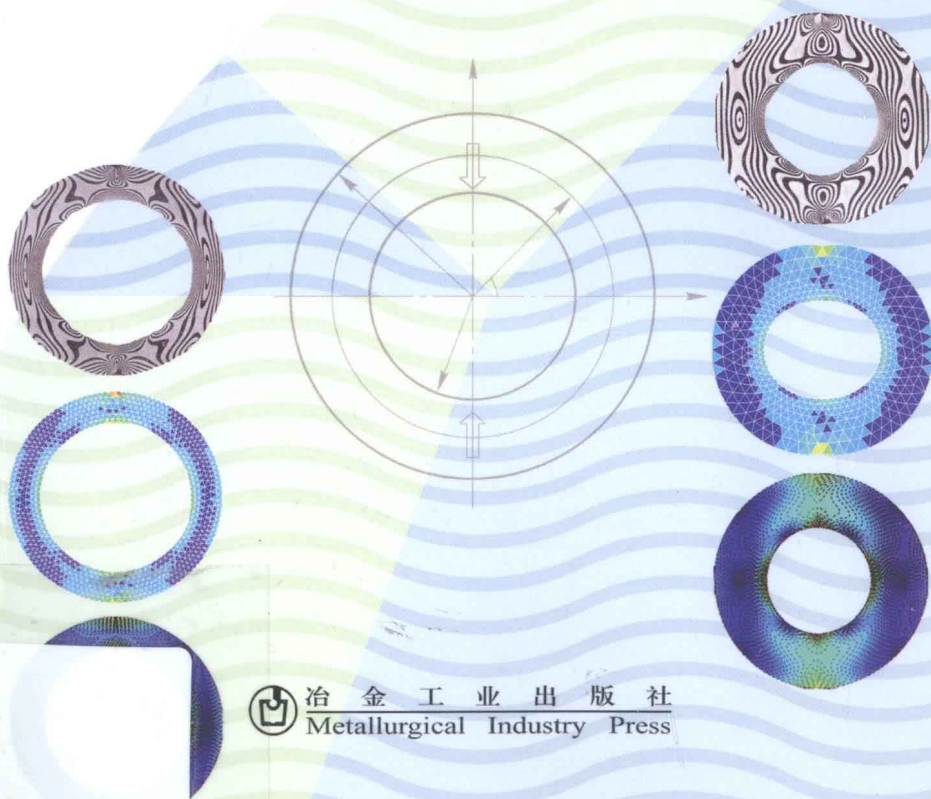


力学中的哥德巴赫猜想

——受径向力圆环中应力计算与应用

孙以材 孟庆浩 汪鹏 王如 著



冶金工业出版社
Metallurgical Industry Press

力学中的哥德巴赫猜想

——受径向力圆环中应力计算与应用

孙以材 孟庆浩 汪 鹏 王 如 著

北 京
冶金工业出版社
2012

内 容 提 要

本书的写作目的是攀登世界力学高峰——得到含义清晰又简练的理论计算公式，并绘制出与光测弹性力学试验相一致、示于封面的图案。本书从弹性力学基础出发，介绍了莫尔圆和最大切应力、Airy 双调和方程的建立和应力函数的概念以及方程的通解和特解。本书还对受径向力圆环进行了 X 射线分析。测定了受力圆环中的应力、应变，得到了不同晶向各向异性的应变的重要结果，又对各向异性的应变及刚度作了机理分析。最后介绍了力学中的有限元方法及受径向力圆环作为测力计的应用。

本书适合作为大学及同等学力力学专业的教材，也可供广大科技工作者和工程技术人员阅读、参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

力学中的哥德巴赫猜想：受径向力圆环中应力计算与应用/孙以材等著. —北京：冶金工业出版社，2012. 8

ISBN 978-7-5024-5958-1

I. ①力… II. ①孙… III. ①径向应力—研究
IV. ①O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 166964 号

出 版 人 曹胜利

地 址 北京北河沿大街嵩祝院北巷 39 号，邮编 100009

电 话 (010)64027926 电子信箱 yjchs@cnmip.com.cn

责任编辑 于昕蕾 美术编辑 李 新 版式设计 孙跃红

责任校对 王永欣 责任印制 张祺鑫

ISBN 978-7-5024-5958-1

三河市双峰印刷装订有限公司印刷；冶金工业出版社出版发行；各地新华书店经销

2012 年 8 月第 1 版，2012 年 8 月第 1 次印刷

850mm × 1168mm 1/32；7.5 印张；199 千字；224 页

28.00 元

冶金工业出版社投稿电话：(010)64027932 投稿信箱：tougao@cnmip.com.cn

冶金工业出版社发行部 电话：(010)64044283 传真：(010)64027893

冶金书店 地址：北京东四西大街 46 号 (100010) 电话：(010)65289081 (兼传真)

(本书如有印装质量问题，本社发行部负责退换)

前 言

本书是作者历经近十年进行深入思索写成的。全书共9章，围绕一个目的和一个展望而展开，前3章是后几章的基础。各章是作为有机整体的一部分而独立撰写的。贯穿全书的纽带是得到受径向力圆环中的应力分布的公式。此问题百年来受到各国科学家的关注，但始终未得到一个简单又物理含义清晰的公式。这正是本书写作的目的。理论要由实验来检验，1946年，伟大力学家 Frocht 已将这一实验成果公布于世，但并没有与实验配套的相应理论公式。只有一位科学家于20世纪末得到与光测弹性力学实验一致的理论的图案，但所得公式复杂。其余十多位各国科学家不仅所得公式复杂，而且未能得到与实验一致的理论的图案。由此看来，“受径向力圆环中的应力分布的公式”是百年来世界性的难题，因此作者借用数学上的难题“哥德巴赫猜想问题”冠名此书，不妥之处敬请专家和读者批评指正。

本书第1章是引子，介绍“受径向力圆环中的应力分布”有关科学家及其公式，阐述了力学中的“哥德巴赫猜想”的特点。第2章讲坐标变换，因为应力与应变都离不开坐标系，第4章和第6章中就有相关的内容。第3章讲格林定理的应

用。因为格林定理在电学和力学问题中占有重要地位，而且电学和力学中许多问题相互联系，例如，前者有拉氏方程，后者有双调和方程，双调和方程又可转化变换成拉氏方程。第3章以较多篇幅涉及电学问题，以引起力学工作者注意。电学和力学中把能量与泛函相联系，泛函的变分即极小值问题便是能谷态做最小功问题，这与格林定理密切相关。于是电学中才能得到满足拉普拉斯或泊松方程及其各种边界条件的解，力学中可得到能谷态做最小功的实际真实应力解，从而满足正应力的周向约束条件。当然这是必要条件而不是充分条件。力学中的充分条件便是力和力矩平衡条件，第4章正是讨论这一问题。该章从弹性力学基础出发，重点放在平面应力场，介绍了莫尔圆和最大切应力及主应力，又介绍了Airy双调和方程的建立和应力函数的概念以及方程的通解和特解。这些都是经典问题，本书将其编入在内。Airy方程在受径向力圆环中的特解是本书作者得到的。但这一特解不满足由格林定理所推出的正应力的周向约束条件，因此不是实际真实应力解。第4章将这一特解作了改进后得到了受径向力圆环中的应力分布解，并证明满足正应力的周向约束条件和内、外壁边界条件以及力和力矩平衡条件。也就是说，既满足必要条件也满足充分条件，因此是实际真实应力解。同时，绘出了与光测弹性力学试验一致的等最大切应力条纹图案，说明理论与实际一致。本书的最终目的在第4章基本达

到。但我们并不仅仅停留于此，还对受径向力圆环进行了 X 射线分析。这不仅验证了理论，更重要的是有助于理论的发展。随后，第 5 章介绍了 X 射线的产生、测试原理和衍射理论、衍射方法。这一章是为力学工作者打物理基础的，篇幅稍有扩大。其后，用 X 射线测定了各种薄膜的晶体结构和对受径向力圆环进行了应力、应变的测定，得到了不同晶向各向异性的应变的重要结果。第 6 章针对各向异性的应变作了机理分析，解释多晶和单晶应变具有较大差别的原因、两者刚度之间的关系，展示了不同晶向各向异性应变之间的坐标变换。第 7 章是受径向力圆环作为测力计的应用，特别是在轿车开门二限位器疲劳试验平台上的应用，验证了理论与实际的一致性。本章中也对相关电路及单片机作了简单介绍。作者对本书的核心问题感兴趣的起因也在于此，这一疲劳试验平台已在相关生产厂家使用。第 8 章是力学中的有限元方法的应用，得到了与理论一致的等最大切应力条纹图案。这样，本书所示出的理论计算、有限元方法绘制的与 1946 年 Frocht 所测得的光测弹性力学实验图案三者一致。本章也介绍了 Marc 软件在力学传感器中的应用，以引起读者兴趣。最后，第 9 章是受多重对称性力的圆环中的应力计算。很少有科学家涉及这一问题。因为解决此问题需要两把钥匙：其一是能谷定理；其二是 Airy 方程适合圆环的特解。人们往往忽视能谷定理，这样本章的重点是讲能谷定理在受力薄、厚圆

IV || 前 言

环中的应用，这将对力学产生深远的影响。

在此，向梁家昌、张志刚、孙钟林、牛文成、王化祥、王江、杨保和、於定华诸位教授对本书所得的核心公式和等最大切应力条纹图的肯定表示感谢。作者曾有幸聆听已故中国原子能之父、河北工业大学校友卢鹤绂先生的名言“物理学家追求以简单的语言或公式来表达复杂的物理现象”，此名言对作者产生深刻的影响，在此表示感谢。本书追求的就是这一目标。对曾有不同意见的专家教授也表示感谢，他们使事物总是不断从否定之否定，得到螺旋式的上升。

由于作者主要从事半导体工作，对力学理论了解肤浅，不妥之处在所难免，请广大读者批评指正。

作 者
2011 年 9 月

目 录

1 绪论	1
1.1 数学中的“哥德巴赫猜想”	1
1.1.1 “哥德巴赫猜想”命题的由来	1
1.1.2 “哥德巴赫猜想”问题的历史进程	1
1.1.3 “哥德巴赫猜想”问题的特点	2
1.1.4 解决“哥德巴赫猜想”问题的意义	2
1.2 力学中的“哥德巴赫猜想”——受径向力圆环中 应力计算	3
1.2.1 跨越的时间长度	3
1.2.2 涉及的科学家及题目	3
1.2.3 涉及的力学原理	5
1.2.4 计算公式的复杂性	6
1.2.5 力学中的“哥德巴赫猜想”的特点	10
1.2.6 两种计算的等最大切应力条纹图	13
1.2.7 今后的展望	16
2 固体的物质常数及物理量的坐标变换	17
2.1 固体中的坐标系	17
2.2 固体中的坐标系的变换	19
2.3 晶体的物质常数及其坐标变换	21
2.3.1 二阶电导率张量	21
2.3.2 压电系数三阶张量	24
2.3.3 压阻系数四阶张量	26

2.4 各向同性情况下的坐标变换	30
3 格林定理及其推导与应用	33
3.1 高等数学中的高斯定理和格林定理	33
3.1.1 高斯定理	33
3.1.2 格林定理	33
3.1.3 静电场能量	33
3.2 变分与微分	35
3.3 格林定理在静电场中的应用	35
3.3.1 场域中不存在电荷时的泛函 $L(\phi)$	35
3.3.2 场域中存在电荷时泛函 $L(\phi)$	36
3.4 格林定理在应力场中的应用	37
3.4.1 由格林定理推导实际正应力的周向分布规律的 第一种方法	37
3.4.2 由格林定理推导实际正应力的周向分布规律的 第二种方法	40
3.5 自然界中最小功法则	42
3.5.1 电流场	42
3.5.2 有限元理论推导范德堡方程	42
3.5.3 改进的范德堡法的推导	46
4 弹性力学基础与平面应变场的 Airy 方程	59
4.1 弹性力学基础	59
4.1.1 固体的形变	59
4.1.2 应力场	61
4.1.3 力平衡方程式	62
4.1.4 应力-应变相互关系	63
4.1.5 位移协调方程	65

4.2 平面应力场问题	66
4.2.1 莫尔圆与最大切应力	66
4.2.2 在平面应力场中的胡克定律	69
4.2.3 力平衡微分方程	70
4.2.4 极坐标的平衡微分方程	71
4.3 平面应变场中 Airy 方程的推导	73
4.3.1 平面应变场中的力平衡方程	73
4.3.2 平面应变场中的位移协调、应变兼容性方程	74
4.3.3 Airy 方程	74
4.3.4 在极坐标下的 Airy 方程的通解	74
4.3.5 在极坐标下的 Airy 方程的一个特解	75
4.4 受力圆环在极坐标下的 Airy 方程的解	75
4.4.1 受力圆环在极坐标下的 Airy 方程的一个特解	75
4.4.2 实际真实应力的能谷态解	77
4.4.3 内外壁径向正应力和切向应力的边界条件	79
4.4.4 力的宏观平衡条件	79
4.4.5 力矩的宏观平衡条件	79
4.4.6 $\phi_c = \sigma_{\theta\theta}^0 + \sigma_r^0$ 的起因	80
4.4.7 证明满足周向约束条件	82
4.4.8 圆环中最终应力解	83
4.4.9 环中存在的附加压缩和无膨胀点的位移	88
4.4.10 计算结果	89
4.4.11 小结	91
5 X 射线技术在晶体结构及应力、应变分析中的应用	93
5.1 X 射线的性质及其产生	93
5.1.1 X 射线的性质	93

5.1.2	X射线的产生	94
5.2	X射线在晶体中的衍射现象	97
5.2.1	X射线衍射理论基础	97
5.2.2	强衍射条件与布喇格定律	101
5.2.3	爱瓦尔德图	102
5.2.4	电磁波在周期结构晶体中的传播和电子运动 方程式	103
5.2.5	X射线衍射方法	105
5.3	X射线衍射法测定半导体单晶的取向	106
5.3.1	定向仪简介	107
5.3.2	测量原理	108
5.3.3	测试步骤	112
5.3.4	测量精度	113
5.4	X射线显微术的应用	114
5.4.1	位错的观察	114
5.4.2	X射线形貌术观察硅单晶的微缺陷	117
5.4.3	观察晶体中的沉淀	120
5.4.4	跟踪晶体缺陷在加热过程中的变化	121
5.5	X射线在薄膜晶体结构分析中的应用	122
5.5.1	X射线在气敏传感器薄膜晶体结构分析 中的应用	122
5.5.2	Al诱导纳米多晶硅-氮化铝隔膜薄膜 XRD分析	135
5.5.3	小结	138
5.6	用X射线测定多晶体中的各向异性正应变	139
5.6.1	引言	139
5.6.2	在单轴应力下,进行X射线衍射 实验测量	140

6 各向异性情况下的应变	144
6.1 各向同性情况下的应变的坐标变换	144
6.2 各向异性情况下的应变机理分析	147
6.2.1 晶面膨胀和键变形的关系	148
6.2.2 各向异性刚度 E_{hkl} 与各向同性刚度 E 之间的关系	151
6.3 各向异性情况下的应变的计算	153
6.3.1 各向同性材料和各向异性材料中胡克定律 之间的差别	153
6.3.2 各向同性材料和各向异性材料中胡克定律 之间的关系	156
6.4 面心立方单晶各向异性晶体正应变的坐标变换	157
7 弹性圆环力传感器的制造与实际应用	161
7.1 拉、压力传感器及其电路系统	161
7.1.1 引言	161
7.1.2 弹性元件的制作	162
7.1.3 电路设计	166
7.1.4 实际应用	169
7.2 计数器测力计打印记录系统软硬件设计	169
7.2.1 引言	169
7.2.2 系统结构与硬件设计	170
7.2.3 软件设计	174
7.2.4 力传感器的制作	174
7.2.5 夏利车开门力疲劳实验结果	175
7.3 靠弹簧压紧的滑动体牵引力与摩擦面形状 关系研究	175

7.3.1	牵引力公式	176
7.3.2	实例	178
7.3.3	试验	180
7.3.4	小结	182
7.4	轿车门二限位器疲劳试验平台	182
7.4.1	引言	182
7.4.2	疲劳实验平台机械结构	184
7.5	一种扭矩传感器的无线数据传输系统	186
7.5.1	引言	186
7.5.2	系统设计方案	186
7.5.3	发射电路及软件流程图	187
7.5.4	接收电路及软件流程图设计	190
7.5.5	结束语	190
8	应力场数值计算有限元方法	192
8.1	有限元应力分析概述	192
8.1.1	原理	192
8.1.2	FEA 的输入信息	193
8.1.3	应力分析的输出信息	194
8.1.4	图形输出	194
8.1.5	总评	195
8.1.6	有限元的分析例子	195
8.2	Marc 软件在多晶硅压力传感器设计中的应用	198
8.2.1	力学分析步骤	199
8.2.2	多晶硅压力传感器有限元分析	199
8.2.3	压力传感器膜厚与应力的关系	199
8.2.4	力敏电阻条的布置	201
8.2.5	多晶硅压力传感器的基本结构及工艺	207

8.3 高温压力传感器热模拟	208
8.3.1 概述	208
8.3.2 AlN、SiO ₂ 、Al ₂ O ₃ 作为绝缘层时的比较	209
8.3.3 散热层不同厚度时衬底温度的比较	211
8.3.4 散热层不同厚度时电阻中心点温度的比较	214
9 受多重对称性力圆环中的应力分析	215
9.1 薄圆环中应力及弯矩分析计算	215
9.1.1 受二重对称性径向力圆环中的弯矩 M 和 应力分布公式计算	215
9.1.2 受三重对称性径向力圆环中的弯矩 M 和 应力分布公式计算	216
9.1.3 受四重对称性径向力圆环中的弯矩 M 分布 公式计算	217
9.2 厚圆环中应力计算	217
参考文献	220

1 || 绪 论

1.1 数学中的“哥德巴赫猜想”

1.1.1 “哥德巴赫猜想”命题的由来

著名的“哥德巴赫猜想”为：“任何一个不小于6的偶数都可以写成两个奇素数（素数又叫质数）之和。”如 $6=3+3$ ， $8=5+3$ ， $10=5+5$ ， $12=7+5$ 等，这个命题简称为“ $1+1$ ”。1742年德国数学家哥德巴赫，在给当时正在德国的瑞士数学家欧拉（1707~1783年）的一封信中提到了这个猜想，请赫赫有名的大数学家欧拉帮忙证明。然而，欧拉直到死也没能证明它，从此它就成了了一道世界难题，吸引了成千上万人的注意。

1.1.2 “哥德巴赫猜想”问题的历史进程

人们还根据“哥德巴赫猜想”原始命题，得到了一个推论：每个不小于9的奇数都是3个奇素数的和。例如， $9=3+3+3$ ， $11=5+3+3$ ， $13=5+5+3$ ， $15=7+5+3$ 。哥德巴赫猜想提出后，许多著名数学家把精力投入到攻克这个世界难题上来。可是整个18世纪、19世纪都没有人能够证明它，也没有取得任何进展。直到进入20世纪，数学家们采取分步推进，先证明“任何一个不小于6的偶数都等于1个奇素数与 n 个奇素数积的和”，简称为“ $1+n$ ”，再逐步逼近“ $1+1$ ”的策略后，才取得了一个又一个的进展。1920年，挪威数学家布朗首先用“筛法”证明了 $9+9$ 。20世纪20年代，英国著名数学家哈代等人提出用“圆法”来解决猜想。在此基础上，数学家维诺格拉陀夫于1937年用他创造的“三角和方法”基本上证明了哥德巴赫猜想的推论。因直接证明这一猜想困难重重，所以人们就先证明关于猜想的一

个弱命题：每个大偶数可以表示为一个素因子个数不超过 a 的数和一个素因子个数不超过 b 的数之和，这个命题就记作 $a + b$ ，然后步步推进，最后证明 $1 + 1$ 的正确性。此后又经过许多数学家（包括中国的王元等人）的努力，到 1965 年，苏联的数学家又证明了 $1 + 3$ 。1966 年，中国数学家陈景润宣布他证明了 $1 + 2$ ，并于 1973 年发表了论文《大偶数表为一个素数与不超过两个素数乘积之和》，在国际数学界引起强烈反响，被认为是迄今为止最好的求证结果，国际上称为“陈氏定理”。我国数学家陈景润在这个问题的研究上居世界领先地位。但是，要想证明 $1 + 1$ ，摘取这颗数学皇冠上的明珠，还有许多路要走。

1.1.3 “哥德巴赫猜想”问题的特点

“哥德巴赫猜想”问题持续了近三个世纪，时间跨度很长。涉及的都是世界顶级科学家，共有十多位。虽然命题简单，但问题尚未彻底解决，可见攻克难度之大。所以科学上的许多难题试图与数学上的“哥德巴赫猜想”问题相提并论。

1.1.4 解决“哥德巴赫猜想”问题的意义

从哥德巴赫提出猜想到今天，吸引了世界上很多著名的数学家来研究它，取得了不少很好的成果。在论证“哥德巴赫猜想”的过程中，必须引进新的方法，研究新的规律，由此产生的研究方法，不仅对数论有广泛的应用，而且也可以用到不少其他数学分支中去，推动了整个数论和其他数学分支的发展。

哥德巴赫是在观察了一些具体式子的规律后，才提出“ $1 + 1$ ”猜想的。这种由特殊事例归纳得出一般结论的推理方法叫做归纳法。归纳法是人们认识客观世界，发现客观规律的重要方法之一，有必要深入研究。目前函数或信号反演问题，是系统工程中经常遇见的问题。人们提出的许多解决办法或算法，例如穷举法、蒙特卡罗法、神经网络法、遗传算法、模拟退火算法、蚁群算法、量子粒子算法、归十算法，虽然是仿生与仿某种物理现

象，但归根结蒂起源于归纳法。

1.2 力学中的“哥德巴赫猜想”——受径向力圆环中应力计算

数学中的哥德巴赫猜想有历史典故。争鸣跨越的时间长达3个世纪，命题之简单，涉及的科学家之多，攻克难度之大，备受世人之瞩目。同样，受力圆环（图1-1）是最简单的机械零件，比螺钉还简单，但其应用却十分广泛。受径向力时圆环中应力计算之难，涉及的科学家之多，称得上是力学中的哥德巴赫猜想。只不过无人提出这一命题。下面作一比较便可知。

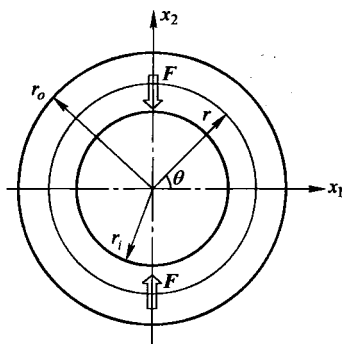


图 1-1 受径向力圆环

1.2.1 跨越的时间长度

受径向力圆环中应力计算的研究跨越20~21世纪，长达1个世纪，见1.2.2节。加上涉及的理论或学科，如Castigliano's theorem, 平面应力场的Airy方程(Airy G. B., Br. Assoc. Adv. Sci. Rep., 1862)要追溯到19世纪。

1.2.2 涉及的科学家及题目

具体如下：

(1) Timoshenko S. On the distribution of stress in a circular ring compressed by two forces along a diameter. Phil. Mag., 1922, 44: 1014.

(2) Timoshenko S. Strength of Material. Part 1, Elementary, Third edition, 1955 (Van Nostrand Reinhold Company, New York), 380. 有周向应力经典公式，这一公式满足能量极小值原