● 名校应试精品 ●●

"3+2" 高考复习精编

数学

北大附中 董世奎

科大附中 王建民

北大附中 邓 均 编

首师大附中 黄建生

新世界出版社

“3+2”高考复习精编

数　　学

北大附中　董世奎
科大附中　王建民
北大附中　邓　均
首师大附中　黄建生
编

新世界出版社
·北　京·

新登字（京）136 号

图书在版编目（CIP）数据
“3+2”高考复习精编：数学
董世奎等编
－北京：新世界出版社，1995.10
ISBN 7－80005－237－0
Ⅰ.3…　　Ⅱ.“…
Ⅲ.数学－高中－升学参考资料
Ⅳ.G634.6

“3+2”高考复习精编：数学
董世奎等 编
新世界出版社出版
（北京市百万庄路 24 号　邮政编码 100037）
新华书店总店北京发行所发行
北京市昌平第二印刷厂印刷
开本 32　字数 296 千　印张 13.25　印数 35001－65000 册
1994 年第一版　1996 年修订版
ISBN 7－80005－237－0/G.024
定价：13.60 元

如发现印、装错误，可以调换。请与　100037　北京百万庄路 24 号　新世界出版社　国内业务部　联系。
电话：(010) 68326646

前　　言

《“3＋2”高考复习精编》包括《语文》、《英语》、《数学》、《物理》、《化学》五个学科。是根据现行统编教材和国家教委颁发的新教学大纲、最新《考试说明》编写的。

本书由北京大学附属中学、北京实验中学等北京市属重点中学中具有丰富教学经验的资深特、高级教师编写。其中《语文》由张玳老师执笔；《英语》由沈信予、韩纪娴、穆丽萍老师执笔；《数学》由董世奎、王建民、邓均、黄建生老师执笔；《物理》由陈育林、迟永昌老师执笔；《化学》由刘石文老师执笔。

本书的编写贯穿了一种全新的思维。其特点是，一、以《考试说明》为核心；二、充分注意到近年高考题型新趋向（知识覆盖面广，注重能力考查等）；三、针对学科特点，区别对待。本书在编写中抛弃了以往复习资料的“重点、难点”“题海战术”等老套子，直接从《考试说明》和“题型”切入，围绕《考试说明》中所列各条要求，即知识点，紧扣统编教材，结合例题对各知识点逐条进行分析和讲解，并对每个知识点所覆盖的具体内容有重点地给与补充和引伸、归纳和提高，又结合每个知识点配以相应的练习，使学生在全面、系统掌握基础知识的前提下，有针对性地熟悉《考试说明》和“题型”，明确高考要求，增强应试能力，收到事半功倍的复习效果。

本书《数学》共分二十三章。每章由知识要点、例题选析、习题及答案提示四部分组成。复习中特别注重数学学科所特有的思想方法和技能、技巧的训练（如配方法、换元法、待定系数法、教学归纳法、反证法；方程思想、函数思想、等价变换思想、分类

讨论思想等)。

本书可用为 1997 年高考应试师生的辅导材料,亦可作为其他年级同学的课外读物。

编者的话

为帮助同学们加深理解高中数学的教学内容，掌握高中数学的基础知识及内在联系，以及高中数学中常用的五种方法，即配方法、换元法、待定系数法、数学归纳法和反正法；进一步体会方程思想、函数思想、数形结合思想、等价变换思想和分类讨论思想的重要性，提高同学们的分析问题和解决问题的技能、技巧和能力。我们根据新的教学大纲编写了此书。

我们将高中的代数、三角、解析几何、立体几何的重点、难点归纳成23章。每章的内容都在教材的基础上做了较大的补充和引伸、归纳和提高，对概念的讲解力求准确、透彻，并精选了一定数量的例题。对于重点例题，先作了简明的分析，接着介绍了灵活多变的解法，并有较详细的说明，从而揭示一些解题规律和技巧，以使在数学方法、分析能力上给读者以启迪。每章又配备了练习题并有答案及提示。

本书可作高三同学的复习教材，也是高一、高二同学的同步课外读物和练习。本书又可供教师教学时参考。

本书一至五章由北大附中董世奎老师执笔，六至十一章、十八章、十九章由北大附中邓均老师执笔；十二～十七章由首都师大附中黄建生老师执笔；二十至二十三章由科大附中王建民老师执笔。由于水平有限，编写时间仓促，书中的缺点、错误在所难免，欢迎读者批评指正。

编　者

1996年5月于北大附中

目　　录

第一章　函数基础知识

知　识　要　点

集合、映射、函数定义、复合函数、反函数

内容精讲、例题选析

一、集合、映射

1. 集合是数学中的一个原始概念，只描述，不定义。它是指：按着一定标准划分出来的事物的整体，其中每一个事物称为集合的元素。应特别注意集合的四性：确定性、互异性、无序性、任意性。

2. 集合的表示方法有

列举法：就是将集合中的元素一一写在大括号中，例如$\{1,2,3\}$。

描述法：就是将集合中的元素所共有的特征属性写在大括号中的表示方法。其中分为语言描述和数学解析式描述两种，在解析式描述中分为代表元素和刻划本质属性的解析式前后两部分。

专用字母法：如 N、Z、Q、R、C、Φ 分别表示什么集合？

3. 元素与集合间的关系：分为属于“$\in$”；不属于“$\notin$”。集合与集合间的关系分为：包含于“$\subseteq$”，不包含于“$\nsubseteq$”.

4. 集合的相等：$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$. 欲证 $A=B\Leftrightarrow$ 证

“若 $x\in A$,则 $x\in B$”且“若 $x\in B$,则 $x\in A$”

5. 集合的运算

交集:$A\cap B=\{x|x\in A,x\in B\}$.

并集:$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

补集:$\overline{A}=\{x|x\in I,x\notin A\}$.

易知:$A\cap A=A,A\cap\Phi=\Phi,A\cup A=A,A\cup\Phi=A$

$A\cap\overline{A}=\Phi,A\cup\overline{A}=I$

$A\subseteq A\cup B$(当且仅当 $B\subseteq A$ 时等号成立)

$A\supseteq A\cap B$(当且仅当 $A\subseteq B$ 时等号成立)

6. 映射:对于给定的两个集合 A 和 B,在某种对应法则“f”作用下,对于集合 A 的每一个个元素 a_i,在集合 B 中都有唯一确定的元素 b_i 与之对应,这样的对应法则 f。A、B 就叫做从集合 A 到集合 B 的映射。记作:$f:A\to B$.

7. 一一映射:$f:A\to B$ 是从集合 A 到集合 B 的映射,如果对于集合 A 中的不同元素在集合 B 中有不同的象;且集合 B 中的每一个元素在集合 A 中均有原象,那么就称映射 $f:A\to B$ 是从集合 A 到集合 B 上的一一映射。

8. 逆映射:如果 $f:A\to B$ 是从集合 A 到集合 B 上的一个一一映射,那么就可以得到一个新的映射,即对于集合 B 中的每一个元素 b,在法则“f”的逆法则“f^{-1}”的作用下在集合 A 中就有 b 的原象 a 与之对应,这样一个新映射就叫做映射 $f:A\to B$ 的逆映射,记作 $f^{-1}:B\to A$.

例 1 满足$\{a,b\}\subset A\subseteq\{a,b,c,d,e\}$的集合 A 的个数为(　　)

(A)9 个　(B)8 个　(C)7 个　(D)6 个

解 由已知集合 A 是至少含有三个元素且一定有 a,b 两个元素所组成的$\{a,b,c,d,e\}$的子集．其个数$\Leftrightarrow\{c,d,e\}$的非空子集个数 $2^3-1=7$ 个．

例 2　已知集合 $A=\{x|x^2-2x-8<0\}$，$B=\{x|x<a\}$

(1)若 $A\cap B=\Phi$，求 a 的取值范围；

(2)若 $A\subset B$，求实数 a 的取值范围．

解　$\because A=\{x|-2<x<4\}$，$B=\{x|x<a\}$.

在数轴上把 A 表示出来(如图 1—1)

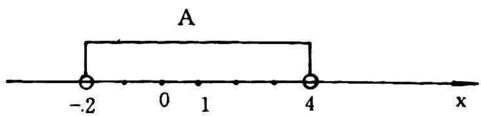

图 1—1

(1)若 $A\cap B=\Phi$，则 $a\leqslant -2$；

(2)若 $A\subset B$，则 $a\geqslant 4$.

例 3. 设 1 的 6 次方根，2 次方根的集合分别是 A 和 B，求证 B 是 A 的真子集

分析:欲证 $B\subset A$，需且仅需证明①B 的任一元素都属于 A，②在 A 中至少有一个元素不属于 B.

证明:由已知 $A=\{x|x^6=1\}$，$B=\{x|x^2=1\}$.

任取 $x\in B$，则 $x^2=1$，

$\therefore x^6=1$，$\therefore x\in A$.

$\therefore B\subseteq A$.

又 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$　$\omega^6=1$，$\therefore \omega\in A$，

$\omega^2\neq 1$，$\therefore \omega\notin B$.

$\therefore B\subset A$.

例 4. 设 $I=\{(x,y)|x,y\in R\}$，集合 $M=\{(x,y)|\frac{y-3}{x-2}=1\}$ 集合 $N=\{(x,y)|y\neq x+1\}$，则 $\overline{M\cup N}$ 等于(　)

(A)Φ　　　　(B)$\{(2,3)\}$

(C)(2,3)　　(D)$\{x|y=x+1\}$

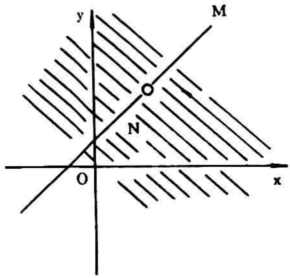

图 1—2

解　集合 M 是直线 $y=x+1$ 上除点(2,3)的所有点的集合。而集合 N 是直线 $y=x+1$ 外的所有点的集合，所以 $M\cup N$ 表示整个直角坐标平面上除点(2,3)外的所有点集。所以 $\overline{M\cup N}=\{(2,3)\}$.

练习 1·1

1. 在横线上填上确切的符号

(1)a ____ $\{a\}$　(2)Φ ____ $\{0\}$　(3)Φ ____ $\{\Phi\}$

(4)$\{(x,y)|2x-3y=0\}$ ____ $\{(x,y)|(2x-3y)(5x+2y)=0\}$

(5)$A=\{1,2\}$，$B=\{x|x\subseteq A\}$，则 A ____ B

2. 设全集 $I=R$，$A=\{y|y=1-x^2,x\in R\}$，$B=\{y|y=\frac{1}{x},x\neq 0\}$，$C=\{y|y=2|x|-1,x\in R\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\cap C$，$\overline{A}\cup\overline{B}$，与 $\overline{(A\cup B)\cup C}$.

3. 写出集合 $A=\{1,2,3,4\}$ 的所有子集．由 n 个元素所组成的集合 B 的子集个数为________个．

4. 已知全集是 I，A，B 是非空集合，且 $A\subset B$，则下列集合中必为空集的是(　　)

(A)$A\cup B$　(B)$A\cap\overline{B}$　(C)$\overline{A}\cap B$　(D)$\overline{A}\cap\overline{B}$

5. 已知非空集合 M 与 N 满足 $M\cap N=N$，则下面的关系式总能成立的是(　　)

(A)$M\supset N$　(B)$M=N$　(C)$M\subset N$　(D)$M\cup N=M$

6. 设 S、T 是两个非空集合，且 $S \not\subseteq T$，$T \not\subseteq S$，令 $X=S\cap T$，那么 $S\cup X$ 等于(　　)

(A)X　　(B)T　　(C)Φ　　(D)S

7. 图中 I 为全集，试用集合 A，B 或 A、B、C 表示，图中各阴影部分：

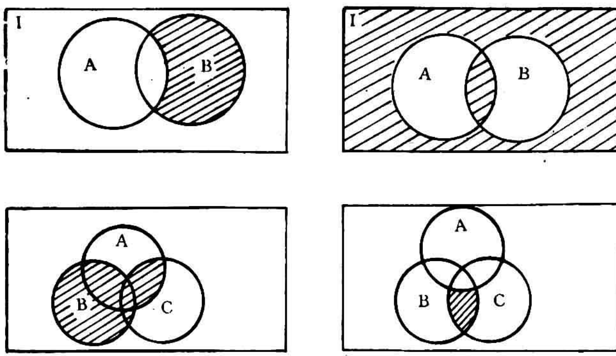

图 1-3

8. 求 200 以内既不是 2 的倍数，又不是 3 的倍数，也不是 5 的倍数的自然数共有多少个

答案与提示

1. (1)$\in$　(2)$\subset$　(3)$\in$　(4)$\subset$　(5)$\in$

2. $A\cup B=R$，$A\cap B=(-\infty,0)\cup(0,1]$，$A\cap C=[-1,1]$，$\overline{A}\cup\overline{B}=(1,+\infty)\cup\{0\}$，$\overline{(A\cup B)\cup C}=\Phi$.

3. Φ，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{1,4\}$，$\{2,3\}$，$\{2,4\}$，$\{3,4\}$，$\{2,3,4\}$，$\{1,3,4\}$，$\{1,2,4\}$，$\{1,2,3\}$，$\{1,2,3,4\}$，2^n，

4. B　5. D　6. D

7. (1)$\overline{A}\cap B$　(2)$(A\cap B)\cup\overline{A\cup B}$　(3)$B\cup(A\cap C)$　(4)$(B\cap C)\cap\overline{A}$

8. 54 个 .

二、函数定义

函数是指从非空集合 A 到非集合 B 上的一种映射 $f: A \to B$. 这里"上"是指集合 B 中的元素在集合 A 中都有原象，也就是说 A 中所有元素的象要充满集合 B. 这里应深刻理解函数就是揭示了两个非空集合元素间的一种特殊的对应关系，即对于集合 A 中的每一个元素 x，在对应法则 f 的作用下，在集合 B 中都有唯一确定的元素 y 与之对应. 这种集合 A 到集合 B 的特殊对应关系"f"，就叫做定义在 A 上的变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 其中原象集 A 叫做函数的定义域，象集 B 叫做函数的值域.

从定义可知，对于一个函数，定义域和对应规律"f"一旦确定了，这个函数也就唯一的被确定了，同时，这个函数的值域也就被确定了，所以我们通常把函数的定义域和对应规律叫做函数的两大要素. 从而得出，若比较两个函数是否相同，那就看这两个函数的定义域和对应规律是否相同，如果两个函数的定义域和对应规律均相同，那么这两个函数就是同一函数；否则，两个函数就不是同一个函数。例如，在 $f(x)=\frac{x^2}{x}$ 和 $g(x)=x$ 中，$f(x)$ 可化为 $f(x)=x$，($x \in R$ 且 $x \neq 0$)。由此可以看出，$f(x)$ 和 $g(x)$ 的对应规律是相同的，但由于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域不同，所以 $f(x)$、$g(x)$ 仍表示两个不同的函数。

由于函数的值域在函数及其应用中占有重要地位，所以通常我们又把函数的定义域，对应规律和值域称为函数的三大要素。

在函数 $y=f(x)$ 中，"f"的含义是作用于小括号中变量 x 的对应规律，其表示形式有三种，即(1)图象；(2)表格；(3)解析

式。这样就引出了函数的三种表达形式，特别是当“f”表示施加于 x 上的运算及其运算规律时，这里的 x 是代表了小括号()这个整体，有时这个整个就是一个简单的字母 x，有时这个整体是一个较复杂的函数式，也就是说“f”是施加于小括号里整个数学表达式的运算及运算规律，如 $f(u)=u^2+1$，则 $f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})^2+1$.

我们经常碰到已知 $f(u)=g(x)$，其中 $u=\Phi(x)$，求 $f(x)$ 的问题.

例 5　已知 $f(\frac{x+1}{x})=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x}$，求 $f(x)$.

分析　“f”是施加于$\frac{x+1}{x}$的运算及其规律，求 f 的关键就是把$\frac{x^2+1}{x^2}+1$ 写成关于$\frac{x+1}{x}$的表达式.

解一　$\because f(\frac{x+1}{x})=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x^2+2x+1-2x}{x^2}+\frac{1}{x}=(\frac{x+1}{x})^2-\frac{1}{x}=(\frac{x+1}{x})^2-\frac{x+1-x}{x}=(\frac{x+1}{x})^2-\frac{x+1}{x}+1$

$\therefore f(x)=x^2-x+1$.

说明　以上方法是根据定义观察出对应规律“f”，称之为观察法．通常，使用换元法是发现“f”的常用方法．

解二　令 $u=\frac{x+1}{x}$，解得 $x=\frac{1}{u-1}$，代入原式

$$f(u)=\frac{\frac{1}{(u-1)^2}+1}{\frac{1}{(u-1)^2}}+u-1$$

整理得　$f(u)=u^2-u+1$

所以 $f(x)=x^2-x+1$

例 6　已知 $f(10^x)=2x-3$，求 $f(x)$.

解 令 $10^x=u$，则 $x=\lg u$，代入原式

$f(u)=2\lg u-3$

所以 $f(x)=2\lg x-3$

例 7 已知 $3f(x)+f(\frac{1}{x})=3x$，求 $f(x)$.

解 由已知可知 $x\neq 0$，把原式中的 x 换成 $\frac{1}{x}$ 得

$$\begin{cases}3f(\frac{1}{x})+f(x)=\frac{3}{x}\\3f(x)+f(\frac{1}{x})=3x\end{cases}$$ 解得 $f(x)=\frac{3(3x^2-1)}{8x}$.

例 8 求实系数一次函数 $f(x)$，使 $f[f[f(x)]]=8x+7$.

解 设 $f(x)=ax+b(a,b\in R.$ 且 $a\neq 0)$，代入 $f[f[f(x)]]=8x+7$.

$a^3x+a^2b+ab+b=8x+7$

$\therefore\begin{cases}a^3=8\\a^2b+ab+b=7\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$

所求函数是：$f(x)=2x+1$.

例 9 已知 $f(x)$ 定义域为 R，$f(0)=1$，$f(a-b)=f(a)-b(2a-b+1)$，求 $f(x)$.

解 令 $a=0$，代入原式

$f(-b)=f(0)-b(-b+1)=b^2-b+1$

令 $-b=x$、$f(x)=x^2+x+1$

说明 求 $f(x)$ 就是求对应规律"f"，常用的方法有：(1)观察法；(2)换元法；(3)代换消元法(如例 3)；(4)待定系数法。

布列函数式是巩固函数概念的很好的练习，而且是应用函数解决实际问题的关键性的一步，必须熟练掌握。

例 10 甲以每小时 6 公里的速度用两小时由 A 城到达 B 城，在 B 城休息 1 小时后再以每小时 4 公里的速度返回到 A