江苏省中学试用课本

数学

高中第三册

毛 主 席 语 录

领导我们事业的核心力量是中国共产党。

指导我们思想的理论基础是马克思列宁主义。

思想上政治上的路线正确与否是决定一切的。

认真看书学习，弄通马克思主义。

备战、备荒、为人民。

团结起来，争取更大的胜利！

毛主席语录

教育必须为无产阶级政治服务，必须同生产劳动相结合。

我们的教育方针，应该使受教育者在德育、智育、体育几方面都得到发展，成为有社会主义觉悟的有文化的劳动者。

学生也是这样，以学为主，兼学别样，即不但学文，也要学工、学农、学军，也要批判资产阶级。学制要缩短，教育要革命，资产阶级知识分子统治我们学校的现象，再也不能继续下去了。

目　　录

第七章　数列与极限

第一节　数　　列

一　数　　列

在三大革命运动中，我们经常遇到按照某种规律排列着的一列数．例如，细胞分裂总是一个分成两个，两个分成四个，……．从一个细胞开始，分裂 10 次，逐次分裂后的细胞个数就是：

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots\cdots,\ 1024; \tag{1}$$

从小到大排列着的自然数是：

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots; \tag{2}$$

$\frac{1}{2}$的 1 次幂，2 次幂，3 次幂，4 次幂，……依次排列成的一列数是：

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots\cdots. \tag{3}$$

象这样按照某种规律排列着的一列数叫做数列．下面我们再举一些数列的例子．

$\sqrt{2}$ 的精确到 1，0.1，0.01，0.001，…… 的不足

近似值组成数列：

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ \cdots\cdots; \qquad (4)$$

在函数 $y=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ 中，自变量 n 依次取1，2，3，4，……所得的函数值组成数列：

$$-\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ -\frac{1}{27},\ \frac{1}{81},\ \cdots\cdots. \qquad (5)$$

数列里的每一个数都叫做数列的一项．在第 1 个位置上的数叫做第 1 项，在第 2 个位置上的数叫做第 2 项，一般地，在第 n 个位置上的数叫做第 n 项．数列的第 n 项通常用 a_n 表示，例如，在数列（3）里，

$$a_1=\frac{1}{2},\ a_2=\frac{1}{4},\ a_3=\frac{1}{8},\ a_4=\frac{1}{16}.$$

在一个数列中，对于一个确定的项数 n，都有一个确定的数 a_n 和它对应，因此，a_n 是项数 n 的函数，自变量是 n，项数 n 的取值范围是自然数1，2，3，…….有的数列，a_n 与 n 间的函数关系可以用公式表示出来，这个公式叫做这个数列的通项公式．例如，数列（1）的通项公式是 $a_n=2^n$；数列（2）的通项公式是 $a_n=n$；数列（3）的通项公式是 $a_n=\dfrac{1}{2^n}$；数列（5）的通项公式是 $a_n=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$．应当注意，并不是所有的数列都容易

写出通项公式的，例如数列(4)。

用某一个自然数代入数列的通项公式，就可算出数列里相应一项的数值。

例1 根据以下数列的通项公式，写出各数列的前5项：

(1) $a_n=3n-1$；

(2) $a_n=\dfrac{n}{n+1}$；

(3) $a_n=(-1)^n n(n-1)$；

(4) $a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}+1}{2}$。

解：依次用项数1，2，3，4，5代替通项公式中的n，得

(1) 2，5，8，11，14；

(2) $\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$，$\frac{5}{6}$；

(3) 0，2，-6，12，-20；

(4) 1，0，1，0，1。

例2 写出以下各数列的通项公式：

(1) 1，3，5，7，……；

(2) 1，2，4，8，……；

(3) $\frac{1}{1\times2}$，$\frac{1}{2\times3}$，$\frac{1}{3\times4}$，$\frac{1}{4\times5}$，……；

(4) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\cdots$。

解：(1) $a_n = 2n-1$；

(2) $a_n = 2^{n-1}$；

(3) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$；

(4) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$。

练　　习

1．根据以下条件，把各数列的前 5 项写出来：

(1) 从小到大排列着的所有正的偶数；

(2) 从小到大排列着的所有正的奇数；

(3) $\sqrt{3}$的精确到 1，0.1，0.01，……的不足近似值；

(4) $\sqrt{2}$的精确到 1，0.1，0.01，……的过剩近似值。

2．根据以下数列的通项公式，写出各数列的前 5 项：

(1) $a_n = 4-3n$；　　(2) $a_n = (-3)^n$；

(3) $a_n = \frac{3n}{n+4}$；　　(4) $a_n = \frac{n-1}{2n+1}$。

3．写出以下各数列的通项公式：

(1) 5，10，15，20，……；

(2) 1，8，27，64，……；

(3) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\cdots$；

(4) $5-1, 5-\frac{1}{2}, 5-\frac{1}{3}, 5-\frac{1}{4}, \cdots\cdots$。

二 等差数列

一批空油桶堆放成如图 7-1 的形状，这堆油桶共有 6 层，从上到下各层油桶个数组成数列：

$$5, 6, 7, 8, 9, 10.$$

容易看出，这个数列有一个特点：从第二项起，每一项减去它的前面一项所得的差都等于 1.

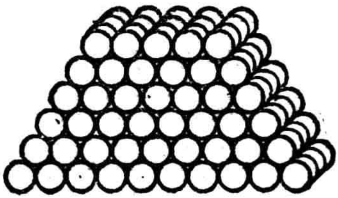

图 7-1

一般地，如果一个数列从第二项起，每一项减去它的前面一项所得的差都等于同一个常数，那么这个数列叫做等差数列，这个常数叫做这个等差数列的公差。例如，

$$1, 3, 5, 7, \cdots\cdots;$$

$$10, 20, 30, 40, \cdots\cdots;$$

$$8, 4, 0, -4, \cdots\cdots$$

等都是等差数列，它们的公差分别是 2，10，－4.

等差数列 a_1，a_2，……的公差通常用字母 d 表示.

因此 $$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

由此可知，等差数列的通项公式是

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

在实际工作中常常要求等差数列前 n 项的和．现在我们就来研究它的求法．堆放成图 7-1 形状的油桶总数，就是等差数列 5，6，7，8，9，10 各项的和：

$$5+6+7+8+9+10.$$

可以逐次相加计算出这个总数，但是当项数较多时计算就比较麻烦．我们设想，在这堆油桶的一侧还放着另一堆油桶（图 7-2），两堆油桶并在一起，仍然是 6 层，这时每一层的个数都是 $5+10=15$．6 层一共有油

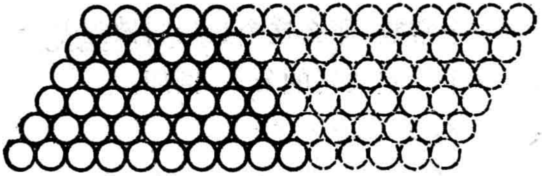

图 7-2

桶 $6\times(5+10)$ 个，所以原来一堆油桶的个数是

$$\frac{6\times(5+10)}{2}=45.$$

“普遍性即存在于特殊性之中”．一般地，我们可以用类似上面的方法，推导出等差数列前 n 项和的公式．

设等差数列 $a_1, a_2, \cdots\cdots$ 前 n 项的和为 S_n，那么

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n.$$

根据等差数列的性质有

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + \cdots\cdots + [a_1 + (n-1)d] \quad (1)$$

把各项的次序倒过来，还可以写成：

$$S_n = a_n + (a_n - d) + \cdots\cdots + [a_n - (n-1)d] \quad (2)$$

（1）+（2）：

$$\begin{array}{rl} S_n = & a_1 + (a_1 + d) + \cdots\cdots + [a_1 + (n-1)d] \\ +)\ S_n = & a_n + (a_n - d) + \cdots\cdots + [a_n - (n-1)d] \\ \hline 2S_n = & \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots\cdots + (a_1 + a_n)}_{n\text{ 个}} \end{array}$$

由此可得等差数列前 n 项的和的公式：

$$\boxed{S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}}$$

例1　计算：

（1）$1 + 2 + \cdots\cdots + 100 = ?$

（2）$1 + 3 + 5 + \cdots\cdots + (2n-1) = ?$

解：（1）$1, 2, 3, \cdots\cdots, 100$ 是等差数列。

$a_1 = 1$，$a_n = 100$，$n = 100$。

$$\therefore S_{100} = \frac{100 \times (1 + 100)}{2} = 5050.$$

即　$1 + 2 + \cdots\cdots + 100 = 5050$。

（2）$1, 3, 5, \cdots\cdots, 2n-1$ 是等差数列。

$$a_1 = 1,\ a_n = 2n - 1.$$

$$\therefore\quad S_n = \frac{n[1+(2n-1)]}{2} = n^2.$$

即 $1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$。

例 2 有一屋顶，它的某一斜面成等腰梯形，最上面一层铺的瓦片有 21 块，每下一层就多铺一块，斜面上铺有瓦片 19 层，问共铺瓦片多少块？

解：根据题意，这斜面上从上到下逐层瓦片的块数组成一个等差数列．它的首项 $a_1 = 21$，公差 $d = 1$，第 19 层瓦片数 $a_{19} = 21 + (19-1)\cdot 1 = 39$。

$$\therefore\quad S_{19} = \frac{19\times(21+39)}{2} = 570\ (\text{块}).$$

答：这个斜面上共铺瓦片 570 块。

练　　习

1．求以下等差数列的第 7 项、第 10 项：

(1) 3, 7, 11, 15, ……；

(2) 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, ……；

(3) 8, 6, 4, 2, ……；

(4) 4, 2.5, 1, −0.5, ……。

2．在等差数列里

(1) $a_1 = 12$，$a_6 = 27$，求 d；

(2) $a_1=3$, $a_5=11$, 求 a_2, a_3, a_4.

3. 某车床变速箱中，有 8 个齿轮的齿数成等差数列，其中首末两个齿轮的齿数分别为 24和45，求其余各齿轮的齿数.

4. 求以下各等差数列的 S_n:

(1) $a_1=5$, $a_n=105$, $n=26$;

(2) $a_1=\frac{2}{3}$, $a_n=-\frac{3}{2}$, $n=14$;

(3) $a_1=5.2$, $d=0.4$, $n=43$.

5. 一堆木料堆成 7 层，最上面一层有 12 根，每下一层多 1 根，问这堆木料共有多少根?

6. 向阳大队在山坡植树，第一行植 100 棵，以后每下一行多植 2 棵，共有 45 行，问植树多少棵?

三 等比数列

我们观察数列

$$2, 4, 8, 16, 32, \cdots\cdots.$$

它有个规律：从第二项起，每一项与它前面一项的比都是 2 .

一般地，如果一个数列，从第二项起，每一项与它前面一项的比都等于同一个常数，那么这个数列叫做等比数列，这个常数叫做这个等比数列的公比. 例如，

$$1, 5, 25, 125, \cdots\cdots, 5^{n-1}, \cdots\cdots;$$

$$6, 18, 54, 162, \cdots\cdots, 2\times3^n, \cdots\cdots;$$

$$-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots\cdots,\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\cdots\cdots$$

等都是等比数列，它们的公比分别是 5，3，$-\frac{1}{2}$.

等比数列 a_1，a_2，……的公比通常用字母 q 表示.

因此 $a_2=a_1q$,

$a_3=a_2q=a_1q^2$,

$a_4=a_3q=a_1q^3$,

…………………….

由此可知，等比数列的通项公式是

$$\boxed{a_n=a_1q^{n-1}}$$

例 1 在"农业学大寨"的伟大号召下，红旗公社广大贫下中农决心改造荒山，修造"大寨田".他们计划第一年造田 80 亩，以后每年比前一年多造 20%，问第 5 年造田多少亩？

解：因为每年造田数是上一年的(1+20%)倍，所以逐年造田面积组成一个等比数列，其中

$a_1=80$，$q=1+20\%$，$n=5$.

$\therefore\quad a_5=a_1q^4=80(1+20\%)^4=80\times1.2^4\approx166$(亩).

答：红旗公社第 5 年造田 166 亩.

设等比数列 a_1，a_2，……前 n 项的和为 S_n，那么

$S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$.

根据等比数列的性质有

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots\cdots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}. \quad (1)$$

将（1）式两边同乘以公比 q，得

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + \cdots\cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n. \quad (2)$$

（1）－（2）：

$$\begin{array}{rl} S_n = & a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots\cdots + a_1 q^{n-1} \\ -)\ qS_n = & \qquad a_1 q + a_1 q^2 + \cdots\cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \\ \hline (1-q)S_n = & a_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - a_1 q^n \end{array}$$

当 $q \neq 1$ 时，可得等比数列前 n 项和的公式：

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}}$$

例 2 求等比数列 2，1，$\frac{1}{2}$，…… 的前 10 项的和。

解： $\because$ $a_1 = 2$，$q = \frac{1}{2}$，$n = 10$，

$$\therefore\ S_{10} = \frac{2 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1 - \frac{1}{2}} = 3\frac{255}{256}.$$

例 3 红光农业机械厂某生产小组计划每季度产量平均比前一季度增加 10%，现在第一季度已生产了某种机器零件 400 个，问计划全年一共生产机器零件

多少个？

解：根据题意，每一季度的产量是上季度的$(1+10\%)$倍，所以逐季度的产量组成一个等比数列。在这个数列里

$$a_1=400,\ q=1+10\%=\frac{11}{10},\ n=4.$$

$$\therefore\quad S_4=\frac{400\times\left[1-\left(\frac{11}{10}\right)^4\right]}{1-\frac{11}{10}}\approx 1856(\text{个}).$$

答：计划全年一共生产机器零件 1856 个。

练　　习

1. 求以下等比数列的第 5 项和第 6 项：

(1) 6, 12, 24, ……；

(2) 2.3, 4.6, 9.2, ……；

(3) 9, -3, 1, ……；

(4) $5\frac{5}{8}$, $-3\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{2}$, …….

2. 团结生产队在插秧前25天有绿萍1.8亩。在20°C到25°C的良好条件下，每 5 天绿萍能增长一倍。若在插秧前每天均能保持这良好条件，问到插秧时这生产队有绿萍多少亩？