北京市高等教育精品教材立项项目

实变函数论讲义

王昆扬 著

4

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

北京市高等教育精品教材立项项目

实变函数论讲义

Shibian Hanshulun Jiangyi

王昆扬　著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书共分两部分。第一部分包括前三章，是为不曾学习过 Lebesgue 积分的学生设计的。重点是第三章测度与积分，完整地讲述$\mathbb{R}^n$上的 Lebesgue 积分论；第一章实数的十进表示和第二章 Euclid 空间($\mathbb{R}^n$),则是对必要的预备知识进行复习。

第二部分包括后三章，是为在数学分析课程中已经学过 Lebesgue 积分的学生设计的。其中,第四章根据单变元函数随自变量而变化的性态进行分类研究;第五章对$\mathbb{R}^n$上的函数按可积性进行分类研究;第六章讨论函数到函数的变换——算子,介绍最简单的一些算子。第二部分的内容充分展现 Lebesgue 积分理论对研究函数的巨大作用,是本科学生继续进入研究生阶段学习的良好准备。

本书可作为高等学校数学类专业实变函数课程的教材或教学参考书，还可供科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

实变函数论讲义/王昆扬著．--北京：高等教育出版社，2011.12

ISBN 978-7-04-033794-5

Ⅰ.①实…　Ⅱ.①王…　Ⅲ.①实变函数论-高等学校-教材　Ⅳ.①O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 248946 号

策划编辑　兰莹莹　　责任编辑　田　玲　　封面设计　于文燕　　版式设计　王艳红

插图绘制　黄建英　　责任校对　殷　然　　责任印制　张泽业

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	三河市华润印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	16.5	版　　次	2011年12月第1版
字　　数	300千字	印　　次	2011年12月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	26.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　33794-00

前言

本讲义是以作者在北京师范大学数学科学学院讲授本科实变函数论课程的讲稿为基础写成的。

讲义共六章，分成两部分，每部分包含三章。

第一部分的重点是第三章测度与积分，其完整详细地讲述了 $\mathbb{R}^n$ 上的现代测度理论和积分理论，即 Lebesgue 积分论。而第一章实数的十进表示和第二章 Euclid 空间是学习第三章必不可少的预备知识。从教学的实践来看，尽管前两章的基本内容在数学分析课程 (以及高等代数课程) 中可能已经学过，但作为进一步学习的准备，学生进行认真的复习和梳理还是很有必要的。

对于还不曾学习 Lebesgue 积分的学生，可在 72 学时内学完第一部分。如果还有富余课时，可酌情学习第二部分第四章的部分内容。

对于已经学过 Lebesgue 积分的学生，应该把重点放在第二部分，即第四、五、六章。第一部分的内容可以作为备查资料使用，其中第一章应该扼要复习一下。

在第二部分中，第四章是针对单变元函数的，着眼于根据函数随自变量而变化的不同性质进行分类。第五章把 $\mathbb{R}^n$ 上的函数按可积性分类，讨论 L^p 空间 $(1 \leqslant p < \infty)$ 和 C_c 空间的基本结构及其中函数的连续性，并证明 C_c 在 L^p 中稠密。另外，还分别讨论了 $L^2_{2\pi}$ 空间和 $C_{2\pi}$ 空间上三角 Fourier 级数的收敛性质。第六章讨论函数到函数的变换——算子在研究函数的理论中所起的重要作用。其中介绍了最简单的一些算子，例如著名的 Landau 算子，Bernstein 算子，以及适用于周期函数的 Fejér 算子。它们都具有很好的性质，可以用来证明 Weierstrass 一致逼近定理。另外还顺带介绍了 $C[0,1]$ 和 $L^p(0,1)$ 中的函数用代数多项式最佳逼近的内容，同时介绍了对于研究函数具有重要作用的 Hardy-Littlewood 极大算子，以及卷积型逼近恒同算子的概念和它们的应用。

第二部分的内容充分展现了 Lebesgue 积分理论对于研究函数以及函数的级数展开的巨大作用。学习这部分内容能为学习和研究实变函数更深入的理论打下良好的基础，这是学生继续进入研究生阶段学习的很好准备。

由于讲义的第一部分和第二部分分别服务于基础知识不同的两类学生，所以两部分的内容必定有个别的地方是重复的。其实，重要内容的重复，对于学生的学习有好处。

本讲义在编写中参考了多本国内外流行的实变函数论的教科书和专著,并从中选择了例题、习题。列举几本主要的参考书如下:

[1] 王昆扬. 简明数学分析. 北京: 高等教育出版社, 2001. (以及郇中丹, 刘永平, 王昆扬. 简明数学分析. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2009.)

[2] Wheeden R L, Zygmund A. Measure and Integral. Marcel Dekker, Inc., New York, 1977.

[3] 周民强. 实变函数论. 北京: 北京大学出版社,2001.

[4] Royden H L. Real Analysis. 3rd ed. 北京: 机械工业出版社, 2004.

[5] 托德. 函数构造论导引. 冯慈璜, 译, 谢庭藩, 校. 上海: 上海科学技术出版社, 1980.

[6] 谢庭藩, 周颂平. 实函数逼近论. 杭州: 杭州大学出版社, 1998.

[7] 陆善镇, 王昆扬. 实分析. 2 版. 北京: 北京师范大学出版社, 2006.

编写和讲授本讲义, 是北京师范大学分析类课程国家教学团队的一项任务。本团队在数学分析课程的教学中, 编写和使用教材 [1](2001 年第一版,2009 年第二版), 已经完全地把 Lebesgue 积分的理论纳入数学分析课程中, 取得了预期的效果。而本讲义在为 2009 级非师范班学生讲授之后, 进行了大幅度的修订, 必定还将在今后进一步的教学实践中不断改进和完善。

教学内容的不断深化是科学发展的必然, 教学内容的改革是教育工作者长期的艰巨任务。希望本讲义真能起到抛砖引玉的作用。恳请读者指正本书的不妥之处, 将意见发至 wangkunyang1943@yahoo.cn。

王昆扬

2011 年夏于北京师范大学

关于编号的说明

1. 节的标号是“§a.b”，其中数字 a 代表章次,b 代表节次, 即“第 a 章第 b 节”. 3 个数字的编号“a.b.c”则代表“第 a 章第 b 节第 c 子节”; 各节后面的习题在目录中类似地编号为“习题 a.b”, 代表“第 a 章第 b 节的习题”(各子节不单设习题); 第一章后面的习题在目录中编为“习题 1”.
2. “定理”、“引理”、“命题”、“推论”组成一个编号系列, “定义”自成一个编号系列. 这些编号不显示章次, 例如在同一章中, “定理 a.b”代表该章的“第 a 节的第 b 个定理”. 公式的编号同此, 不显示章次. “例”（例子）自成一个编号系列, 与上类似. “注” (注释) 也自成一个编号系列, 与上类似.
3. 只针对某具体命题的注, 通常不予编号而写明所注的对象. 对于标明了某某定理的推论, 也不加编号.

关于符号的说明

我们使用常用的记号“:=”和“=:”. 式子 $a := b$ 和 $b =: a$ 都表示“a”是用“b”定义的, 也就是说, 挨着冒号的符号是用挨着等号的表达式来定义的.

记号 $\{x:\ x$ 满足的条件$\}$ 表示一个集合, 该集合的元素用字母 x(当然也可换用别的字母或符号) 表示, 冒号后面的语句确定 x 的属性. 也就是说, 这个集合就是具有所述属性的元素的全体.

本书使用以下符合国家标准的通用数学记号:

$\mathbb{N}_+$: 正整数集. $\mathbb{Z}$: 整数集. $\mathbb{Q}$: 有理数 (rational numbers) 集.

$\mathbb{R}$: 实数集, 一维 Euclid 空间 (拓扑及代数说法), 实直线 (几何说法).

另外的一些通用的数学记号是:

card(A): 集合 A 的基数. $\mathbb{R}^n$: n 维 Euclid 空间.

若 $E \subset \mathbb{R}^n$, 则 $|E|$ 表示 E 的 Lebesgue 测度.

若 E 是集合, 则 $\chi_{_E}$ 代表 E 的特征函数, 即

$$\chi_{_E}(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

目　　录

第一部分　预备知识及积分论

第一部分

预备知识及积分论

第一章　实数的十进表示

本章的基本目的是通过实数的十进表示,严格地建立实数集的算术结构,以使其构成 Euclid 空间,对于它的完备性给予严格的逻辑证明.

有理数的分数表示形式及算术运算知识是预先承认的,且关于“无理数”的表示形式尚无任何知识.

§1.1　实数的十进表示的定义

在过去的中学课本中,实数的概念是在初中二年级引入的.

在大学课本中,谈及什么是“数”、“有理数”、“实数”,有下面的一些说法.

曹之江等在他们编著的《微积分学简明教程》(上册)(高等教育出版社,2004 年,第 2 版) 第 1 页谈及自然数和有理数时说:“数是人类在争取生存、进行生产和交换中所创造的一种特殊语言,是量的描述及运算的手段.”接着在第 2 页,在“无理数和微积分的危机”的小标题下又说:“在相当长的一段历史时期,人们只能认识经验所及的自然数以及由它所衍生的有理数.同时人们也自然想象,那些像单位正方形的对角线那样的与单位长不可公度的几何量,应当与那些可公度的长度一样,有‘数’加以表示.…… 这些数从哪里来?它们将怎样表示和运算?”

俄罗斯的卓里奇 (B.A.Зорич) 在《数学分析》 (第一卷)(第 4 版) (高等教育出版社,2006 年) 第 29 页中说:“数学中的数,就像物理中的时间,人人都知道,唯独专家们不这样理解它.”

俄罗斯的阿黑波夫 (Г.И.Архипов) 等在《数学分析讲义》 (第 3 版)(高等教育出版社,2006 年) 第 13 页中说:“实数,无论是有理数还是无理数,它们是人类理智为了实际需要而作出的抽象发明.”又说:“实数乃是带‘正’号或‘负’号的无限十进小数.”

卓里奇说得对,“数学中的数,就像物理中的时间,人人都知道”.这是常识.实数是表示宇宙中“量”的符号.任何一条现实中的绳子 (或抽象成线段) 都有长度,表达长度的符号就是 (正的) 实数.人的体温、地球的质量、银行中存

款多少、鸡蛋的价格等, 都必须用记号表达, 这记号就是实数. 这不是给实数作定义, 只是描述而已. 把实数理解成符号, 使用怎样的符号比较合适? 这就是实数的表示的含义. 例如, 阿拉伯字符 100(十进制)、英文 "a hundred"、俄文 "CTo"、中文 "一百" 或 "壹佰" 表达了同一个实数 (同在十进制下). 阿拉伯字符 12(十进制)、英文 "a dozen"、中文 "一打" 表达了同一个实数 (以不同的进位制). 这是在整数范围内. 在分数范围内, 同用阿拉伯符号, 同用十进制,$\frac{1}{4}$,$\frac{2}{8}$, $\frac{25}{100}$ 等与 0.25 表示的是同一个实数. 特殊的符号 $\sqrt{2}$ 表示的实数是边长为 1 的正方形的对角线的长度, 谁能说这条对角线没有长度呢? 类似地,$\sqrt{3}$ 表示的实数是 60° 角的正切, 即直角三角形中 60° 的锐角所对的直角边的长度与所邻的直角边的长度的比值, 谁能说这个比值不存在呢?

无论如何, 这些都不是实数的哲学定义. 上面说到的各种符号 "就是实数", 其实确切地说应该是 "实数的表示形式". 实数的哲学定义, 留给哲学家去谈论吧. 这里关注的, 是实数的符号表示. 任何数学概念只有在恰当的表示形式之下才能被应用和研究. 数学分析课本 [1] 讲述了实数的一种最实际的表示方法, 即十进表示. 这种表示非常有用, 非常自然, 实际上已经成为人们的常识. 但是, 当人们中学毕业的时候, 对于实数的十进表示这种 "常识" 的认识, 还是肤浅的、直觉的, 缺乏严格的逻辑理解. 本章所要做的, 就是把人们对于实数的十进表示的认识提高到严格的理性高度.

当然, 实数的十进表示, 只是实数的一种特定的表示方式. 毫无疑问, 同一自然事物的概念可以有许多不同的表述形式, 但它们必定在逻辑上是等价的.

谈及实数的十进表示, 要有一个逻辑基础. 这里 "以有理数 (rational numbers) 为起点". 也就是说, 承认我们从小学和初中学来的正整数、零、负整数、分数这些概念, 统称这些数为有理数. 我们已经习惯于用 "阿拉伯数字" 在十进制之下表示正整数及负整数以及零. 如果用 m 代表一个整数, 可以是正的、负的或者是零,用 n 代表一个正整数, 那么称商 $\frac{m}{n}$ 为分数或商数 (quotient), 叫做有理数 (或者说表示有理数). 这里,m 和 n 本身都用十进制表示. 把全体正整数的集合记作 $\mathbb{N}_+$, 全体正整数以及零 (记作 0) 的集合记作 $\mathbb{N}$, 其中 $\mathbb{N}$ 暗指 natural(自然的). 把全体有理数的集合记作 $\mathbb{Q}$, 其中 $\mathbb{Q}$ 暗指 quotient. 那么,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}: \quad m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_+ \right\}.$$

显然, 每个有理数都有无限多个分数 $\frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_+$) 为其表示. 暂且称这种表示为有理数的**本原表示**.也把以 $10^k = 1\overbrace{0\cdots0}^{k个}$ 为分母的有理数写成小数点后有 k 位的 "有限小数". 所以, "有限小数" 也是有理数的本原表示. 有理数

集合 $\mathbb{Q}$ 的元素之间定义了加、减、乘、除四则运算 (在这个语句中, 我们使用了正整数 4 的中文表示“四”).$\mathbb{Q}$ 中的数都具有“绝对值”, 彼此之间可比较大小. 其实我们的小学算术, 初中代数所做的事情, 基本上就是学习 $\mathbb{Q}$.

但是, 不是有理数的实数还有很多 (稍后会看到, 它们比有理数多得多, 多一个数量级). 除了上面提到的 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 之外, 圆周率 (圆的周长与直径的比, 记作 π), 也不是有理数. 这些数叫做**无理数** (irrational numbers).如何表示这些数呢? 中学课本作出了明确的

规定: *循环小数叫做有理数, 不循环小数叫做无理数, 统称为实数.*

事实上, 这个规定就是**实数的十进表示**. 但是, 中学生对这一规定的理解, 只能停留在“直觉”的水平上.

这里, 自然产生了两个问题.

第一个问题: 本来有理数已经有了分数表示, 即本原表示, 现在又用“循环小数”来表示, 两种不同形式的表示的关系如何?

第二个问题: 用循环小数和不循环小数表示的“实数”之间, 怎样进行加、减、乘、除? 实数有没有绝对值? 怎样比较实数的大小?

本章的目的是回答这两个问题, 对中学课本中的这个规定进行严格的理性的阐述. 重复一遍, 全部讨论都以关于有理数的知识为逻辑出发点. 须知, 为获取这些知识, 人们已经花费了小学和初中几乎 9 年的宝贵童年 (不计幼稚园时期). 在对于有理数的全部知识的基础之上, 严格地定义实数的十进表示是本章的任务.

下面把中学课本中的定义重新叙述一下, 排除以 9 为循环节的情形, 使得每个实数有唯一一个十进数为其表示.

定义 1.1 设 $a_k \in \{0, 1, \cdots, 9\}$, $k \in \mathbb{N}_+$, 并且不管 N 多大, 都存在 $k > N$ 使得 $a_k < 9$. 设 $p \in \mathbb{Z}$,p 用十进制表示. 称记号

$$p + 0.a_1a_2a_3\cdots \tag{1.1}$$

为**十进数**, 叫做实数的十进表示, 简称为**实数**. 称 p 为它的整部. 全体十进数的集合记作 $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ 中的不循环小数, 简称为不循环数. 不循环数所表示的实数叫做**无理数**, 也直接简称不循环数为无理数. 当 $p = 0$ 时, 简记 $0 + 0.a_1a_2a_3\cdots$ 为 $0.a_1a_2a_3\cdots$.

这里, 我们规定了不循环数表示的实数叫做无理数. 至于有理数, 由于已明确地知道它们的本原表示. 所以, “循环数也表示有理数”这个语句, 应该是一个需要证明的命题. 初中课本中因为缺少“极限”概念, 无法证明, 就把它硬性地作为“定义”了.

注意, 当前我们没有对于“十进数”作任何进一步的说明, 式 (1.1) 只是一个记号, 其中的加号 +, 没有任何含义. 我们把实数的十进表示简称为实数, 就像把中文字曹操叫做名字为“曹操”的人一样, 当然这个人还有别的名字, 例如“曹孟德”、“曹阿瞒”. 所以, 我们说, 定义 1.1 只是实数的十进表示的定义, 而不是“实数”的定义, 称符号 (1.1) 为实数, 只不过是对于实数的呼叫, 就像呼叫人的名字一样. 也好像说现在的时间是 9 点半, 根本不涉及“什么是时间”这样一个常人不必探讨 (似乎也探讨不清) 的问题.

当然, 记号 (1.1) 的重要性在于它不仅是个记号, 而且具有记号之外的重要的数学含义, 这就不是简单的“人名”之类的记号可以相比的. 下面我们要做的就是阐述记号 (1.1) 的这些数学含义, 包括: 实数之间的加、减、乘、除运算, 实数的绝对值, 实数之间的大小关系, 实数之间的“距离”, 以及实数序列的极限, 等等. 正是具备了这样丰富的数学结构, 实数的全体才有资格叫做 (一维的) “欧几里得 (Euclid) 空间”. 可以毫不夸张地说, 不懂得 Euclid 空间就不懂得现代数学. 而“十进数” (即记号 (1.1)), 正是表示 Euclid 空间中元素的最常用的得力工具.

对于十进数中的循环数, 也重新写一下定义.

定义 1.2 设 $m \in \mathbb{N}_+$, $a_1, \cdots, a_m$ 是 m 个不全为 9 的取值于 $\{0, 1, \cdots, 9\}$ 的数字. 设 $p \in \mathbb{Z}$. 把十进数

$$p + 0.a_1 \cdots a_m a_1 \cdots a_m \cdots \tag{1.2}$$

叫做以 $a_1 \cdots a_m$ 为循环节的 (十进)**循环数**, 简记之为

$$p + 0.\dot{a}_1 \cdots \dot{a}_m.$$

如果 $b_1, \cdots, b_\mu \in \{0, 1, \cdots, 9\}$ $(\mu \in \mathbb{N}_+)$, 则也把十进数

$$p + 0.b_1 \cdots b_\mu a_1 \cdots a_m a_1 \cdots a_m \cdots \tag{1.3}$$

叫做以 $a_1 \cdots a_m$ 为循环节的 (十进)**循环数**, 简记之为

$$p + 0.b_1 \cdots b_\mu \dot{a}_1 \cdots \dot{a}_m.$$

注 1.1 按定义 1.2, 同一个循环数可以有不同的记法 (和不同的循环节). 例如十进数

$$0.01010101 \cdots$$

既可以写成 $0.\dot{0}\dot{1}$, 也可以写成 $0.0\dot{1}\dot{0}$. 而且, $0.\dot{2}$ 和 $0.\dot{2}\dot{2}$ 表示同一个数. 但无论如何, 单个数字 9 不可以是循环节 (我们用定义的形式排除了以 9 为循环节的情形).

如果对于符号 (1.1)(包括 (1.2), (1.3)) 的理解只停留在符号的本身, 那是很不方便的. 所以我们引入一个和它地位相同但便于处理的概念.

定义 1.3 把 (1.1) 中的十进数 $p+0.a_1a_2a_3\cdots$ 简记为 A. 令

$$A_n = p + 0.a_1\cdots a_n = p + \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{10^k},\quad n\in\mathbb{N}_+.$$

称有理数列

$$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \tag{1.4}$$

为**与十进数 A 对等的数列**. 与一个十进数对等的数列称为**标准列**.

定义 1.3 实际上规定了 (1.1) 的另一种写法, 它把 (用十进制表示的) 实数, 表示成特定的有理数列——标准列. 在标准列中, 每一项都是本原表示的有理数. 下面将看到, 这种写法在定义实数的算术运算时起到了关键性的作用.

注意, 定义 1.3 中, 等式 $A_n = p + 0.a_1\cdots a_n$ 的右端明确表示两个本原表示的 (十进制) 有理数 p 和 $0.a_1\cdots a_n$ 的算术和, 其中的加号 "+" 确切表示加法,A_n 是一个本原表示的有理数.

理解 (1.1) 中的实数 A 的关键在于把它看成是与它对等的标准列 (1.4).

§1.2 有理数的十进表示与本原表示的关系

现在回答上节提出的第一个问题. 定义 1.1 规定了不循环数叫做无理数, 言外之意是熟知的有理数应该用循环数来表示. 我们来建立有理数的十进表示与本原表示的联系. 这不可避免地用到数列的极限的概念.

由于我们对于极限概念 (暂且局限在有理数范围内) 已经很熟悉了, 所以不必从头叙述, 只扼要地复习一下相关的概念就可以了.

第一个要复习的是**基本列**的概念. 设给定一个有理数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. 如果不管正整数 k 多大, 都找得到相应的正整数 $N=N(k)$, 使得只要 $m,n>N$, 就有 $|a_m-a_n|<k^{-1}$, 那么就说 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是**基本列**. 基本列也叫做 Cauchy 列. 基本列一定是有界的 (见习题 1 第 2 题). 称数列有界, 指的是数列的一切项所成的集合有界.

第二个要复习的是**收敛**的概念. 对于有理数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 如果存在一个有理数 ℓ, 使得不管正整数 k 多大, 都找得到相应的正整数 $N=N(k)$, 使得只要 $n>N$, 就有 $|a_n-\ell|<k^{-1}$, 那么就称 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **收敛到** ℓ.

第三个要复习的是数列**等价**的概念. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是两个有理数列. 如果数列 $\{a_n-b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到零, 就说数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ **等价**.数列的等价是针对收敛性而言的 (见习题 1 第 3 题).

第四个要复习的是数列的**子列**的概念. 直白地说, 一个数列 $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个子列, 指的是从这个数列中保持原顺序随意 (不重复地) 挑出无限多项所成的数列, 可记作 $\{f(n(k))\}_{k=1}^{\infty}$ 或 $\{f(n_k)\}_{k=1}^{\infty}$, 其中 $\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}$ 或 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是一个取值为正整数 (即对于一切 $k \in \mathbb{N}_+, n(k) = n_k \in \mathbb{N}_+$) 的严格增 (即对于一切 $k \in \mathbb{N}_+$, $n(k+1) = n_{k+1} > n(k) = n_k$) 的数列.

基本列与它的任何子列都等价 (见习题 1 第 5 题).

设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ (依照定义 1.3) 是与循环数 (1.2) 对等的数列. 那么这个数列的第 mn (m 乘以 n) 项是

$$A_{(mn)} = p + 0.a_1 \cdots a_m \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{10^{mk}} \right),$$

它是本原表示的有理数. 令 $q = \dfrac{1}{10^m}$,

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

那么, 数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 $\dfrac{1}{1-q}$. 因此

$$\lim_{n\to\infty} A_{(mn)} = p + \frac{0.a_1 \cdots a_m}{1 - \frac{1}{10^m}}.$$

记

$$r = p + \frac{0.a_1 \cdots a_m}{1 - \frac{1}{10^m}}.$$

这是一个本原表示的有理数. 由于数列 $\{A_{(mn)}\}_{n=1}^{\infty}$ 是标准列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列, 所以有理数列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到同一极限, 即

$$\lim_{n\to\infty} A_n = r. \tag{2.1}$$

同理, 与十进数 (1.3) 对等的数列收敛到

$$p + 0.b_1 \cdots b_\mu + \frac{0.a_1 \cdots a_m}{(1 - \frac{1}{10^m})10^\mu} \in \mathbb{Q}. \tag{2.2}$$

根据上述事实作出下述定义.

定义 2.1 把循环数 (1.2) 和 (1.3) 分别称为它们所对等的有理数列 (标准列) 的极限 (2.1) 和 (2.2) 的十进表示.