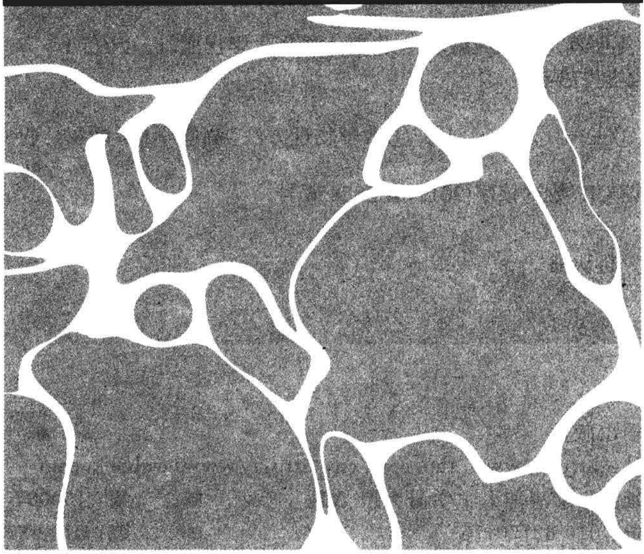
王明新 石佩虎 编著

数学物理方法

清华大学出版社

王明新 石佩虎 编著

数学物理方法



安徽大学图书馆
藏书
www.lib.ahu.edu.cn

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书紧密结合工科数学教学实际，系统介绍了偏微分方程模型的建立、求解三类典型方程的几种常用方法、特殊函数、线性偏微分方程定解问题的几种简单的特殊解法和一些简单的非线性偏微分方程的特殊解．本书叙述简明，条理清晰，强调数学概念和数学方法的实际背景，在注意介绍必要的理论的同时，突出解题方法．书中内容深入浅出，方法多样，文字通俗易懂，并配有大量难易兼顾的例题与习题．

本书可作为物理、力学及工科类本科生和研究生教材，也可作为信息和计算数学专业本科生教材和教学参考书．此外，也可供数学工作者、物理工作者和工程技术人员参考．

版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989　13701121933

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/王明新，石佩虎编著. --北京：清华大学出版社，2013.1
ISBN 978-7-302-30773-0

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①王…　②石…　Ⅲ. ①数学物理方法-高等学校-教材　Ⅳ.①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 285856 号

责任编辑：佟丽霞　赵从棉
封面设计：何凤霞
责任校对：刘玉霞
责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　　　邮　　编：100084
　　社 总 机：010-62770175　　　　邮　　购：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京富博印刷有限公司
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　**印　　张**：10.75　　**字　　数**：218 千字
版　　次：2013 年 2 月第 1 版　　**印　　次**：2013 年 2 月第 1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：20.00 元

产品编号：035474-01

前　言

随着科学技术的进步和计算手段的提高，用数学方法研究自然科学和工程技术中的具体问题的领域越来越广. 用数学方法研究实际问题的第一步，是建立关于所考查的对象的数学模型，从数量上刻画各物理量之间的关系. 含有未知函数的偏导数的数学模型，在工程技术等问题的理论研究中有广泛应用. 这类模型就是数学物理方程，这门课程就是解决数学物理方程的求解方法.

数学物理方法是高等院校理科中的物理和力学专业，工科中的土木、电子、信息、自动控制等专业的一门基础课. 国内早在20世纪六七十年代就出版了很多优秀的数学物理方法教材. 近年来，国内高等教育迅速发展，在校学生人数急剧增加，教学规划和教材内容多次调整. 为了适应新的形势，近期出现了许多新的改编教材和新出版的教材. 由于不同院校之间高等数学的教学内容和深度存在较大的差别，这些教材都难免或多或少地存在一些不足. 作者在为东南大学的强化班和电类专业本科生授课的过程中，吸收已出版的教材的优点，编写了这本教材.

在编写本教材的过程中，我们始终遵循以下原则：紧密结合工科数学教学实际，叙述简明，内容、深度和篇幅适当，强调数学概念和方法的实际背景，在注意介绍必要的理论的同时，突出解题方法. 考虑到许多院校已经把复变函数的教学纳入高等数学，所以本教材没有详细介绍复变函数，仅在第5章作为一节介绍了保角变换以及在求解拉普拉斯方程中的应用.

本书主要介绍三类典型方程（波动方程、泊松方程、热传导方程）的导出（偏微分方程模型的建立）、定解问题的解法、特殊函数、线性偏微分方程定解问题的几种简单的特殊解法、一些简单的非线性偏微分方程的求解方法和特殊解. 只要有较好的高等数学基础就可以阅读和学习本教材.

全书共分 7 章. 第 1 章从几个典型的物理问题出发，建立描述物理现象的偏微分方程模型，以及如何根据物理背景确定定解条件.

第 2 章介绍特征（函数）展开法和分离变量法. 因为特征展开法和分离变量法实质上是一回事，学生在该课程的先修课程“微积分”和“常微分方程”中已经掌握了幂级数展开和幂级数解法，因此，特征展开法和分离变量法相比较，在理论上前者更系统、直观，学生容易接受，在计算方面前者更简单、直接，所以，本教材打破已往惯例，把特征展开法放在分离变量法之前.

求解非齐次偏微分方程的一个重要方法是齐次化原理(杜阿梅尔原理)，求解非齐次常微分方程的一个重要方法是常数变易法(公式). 但是，常微分方程的常数变易法实质上是齐次化原理. 为了让读者更容易理解偏微分方程中的齐次化原理思想，多掌握一种常微分方程的求解方法，我们在第2章的预备知识部分，利用齐次化原理重新推导了常微分方程的常数变易公式.

第3章介绍积分变换法——傅里叶变换和拉普拉斯变换方法.

第4章介绍双曲型方程的初值问题的求解方法——行波法、球面平均法和降维法.

第5章介绍求解拉普拉斯方程的格林函数方法，同时还介绍了保角变换理论及其在求格林函数和求解拉普拉斯方程边值问题中的应用.

第6章介绍两类重要的特殊函数——贝塞尔函数和勒让德函数，以及它们在求解偏微分方程的定解问题中的应用.

考虑到非数学专业的学生学习偏微分方程的主要目的是掌握求解方法，在第7章中，首先介绍了线性偏微分方程的几种非常简单的特殊解法，接着介绍了一些简单的非线性偏微分方程的求解方法和两类特殊解——自相似解和行波解.

本书各章的内容基本上都是彼此独立，前6章是最基本的，第7章可作为学有余力的同学和研究生的学习内容. 使用本书，大约需44教学学时(不包括习题课课时)可以学完前6章的全部内容，各章的学时数可参考下表：

章　数	1	2	3	4	5	6
学时数	3~5	8~9	6~8	4	7~8	10~12

教师可以根据需要和学时数(例如，一学期32学时)，对各章内容任意取舍，组织教学.

本书的部分内容参考了国内出版的一些教材，见本书所附的参考文献. 同时，在编写讲义和成书的过程中，得到了许多同志的帮助与支持. 东南大学的王元明教授和罗庆来教授对于本书的内容安排提出了许多建设性的建议. 东南大学的陈文彦博士、杨明博士和李慧玲博士，对于本书的部分内容提出了修改建议并改正了一些版式错误. 在此一并致谢. 由于作者学识所限，错误和不足之处在所难免，还望读者予以批评指正.

作　者

2012年10月

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目　录

第 1 章　典型方程的导出和定解问题

本章首先从几个物理模型出发，利用守恒律和微元法，导出数学物理方程中的三类典型方程，并根据物理现象，给出定解条件的数学表达式.

在微积分中，通常把直线上的点记为 x，把平面上的点记为 (x, y)，把空间（三维）中的点记为 (x, y, z). 利用数学语言，通常把直线 $(-\infty, \infty)$ 记为 $\mathbb{R}^1$ 或者 $\mathbb{R}$，把平面记为 $\mathbb{R}^2$，把空间（三维）记为 $\mathbb{R}^3$. 为了书写方便，我们有时又把平面上的点记为 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$，把空间中的点记为 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$. 实际上还有维数更高的空间，例如四维时–空空间. 作为推广，对于正整数 n，我们用 $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间，把 $\mathbb{R}^n$ 中的点记为 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的区域 Ω（连通开集称为区域），用 $\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界，用 $\displaystyle\int_\Omega f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 表示函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上的积分

$$\underbrace{\int \cdots \int}_{n} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n,$$

用 $\displaystyle\int_{\partial\Omega} g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}S$ 表示函数 $g(\boldsymbol{x})$ 沿封闭曲面 $\partial\Omega$ 的曲面积分 $\displaystyle\oint_{\partial\Omega} g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}S$. 当 $n = 1, 2, 3$ 时，我们在微积分中已经熟悉了这些记号和意义. 当 n 大于 3 时，它们是 $n = 1, 2, 3$ 的情形的推广.

分部积分公式（也称散度定理，或者斯托克斯（Stokes）公式） 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界的光滑区域，对于一阶连续可微的 n 维向量值函数 $\boldsymbol{v}$，下面的积分等式成立：

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{v} \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量，$\mathrm{d}S$ 是 $\partial\Omega$ 上的面积元素. 当 n 分别等于 1, 2, 3 时，该公式分别是牛顿-莱布尼茨公式、格林公式和奥-高公式.

1.1　典型方程的导出

本节的内容实际上是物理定律的数学表达式. 这里所用到的物理定律是守恒律（质量守恒、能量守恒、动量守恒），所用到的数学方法是微元法.

1.1.1 弦振动方程

振动是最普遍的物理现象，研究拉紧弦的振动是一个古典问题，早在18世纪时达朗贝尔（d'Alembert）就研究了弦的振动问题.

模型一 设有一根拉紧的柔软细弦，假定在外力的作用下，弦在平面上作微小横振动（振动发生在同一个平面内，且振动方向与弦的平衡位置垂直）. 研究弦的振动规律.

建立坐标系：以弦的平衡位置为 x 轴，在弦作振动的平面上取与 x 轴垂直的方向为 u 轴，弦的一端为原点，弦长为 l，见图 1.1.

分析：(1) 细：横截面的直径 $d \ll l$（表示 d 远远小于 l），运动状态在同一横截面上处处相同，即弦可以看成无粗细的线.

(2) 拉紧：指的是平衡位置时弦的张力 $T_0 > 0$，弦在弹性范围内振动，因此胡克(Hooke)定律成立，张力与弦线的相对伸长成正比.

(3) 柔软：弦在每一点处，该点两端的部分之间有相互作用力. 这个力的分量一般来讲有切向力和法向力. 柔软是指没有抗弯曲的张力，张力只是沿切线方向.

(4) 横振动：只有沿 u 方向的位移.

(5) 微小位移：弦的位置只作了微小变化，即 $|u_x| \ll 1$.

我们利用动量守恒来导出 $u(x,t)$ 的变化规律. 任取一小段弦 $[a,b]$，小时段 $[t_1,t_2]$，在 $[a,b]\times[t_1,t_2]$ 上研究弦的变化情况. 用 $\rho=\rho(x)$ 表示弦在平衡位置时的线密度，f_0 表示沿 u 的正方向、单位长度的弦受到的外力（即外力密度），$T=T(x,t)$ 表示 t 时刻在点 x 处弦的张力的大小，T_0 表示平衡位置时弦的张力的大小.

在 t 时刻，弦的位移为 u，则弦长 $\hat{s}=\displaystyle\int_a^b \sqrt{1+u_x^2}\,\mathrm{d}x \approx b-a$，即弦的相对伸长量约等于 0. 在区间 $[a,b]$ 上，由胡克定律知，$T(x,t)-T(x,t_1)=k\times$ 弦长的相对伸长量 ≈ 0，所以 T 与时间 t 无关.

沿水平方向，由于弦没有位移，所以速度为零，从而动量为零，冲量也为零. 由此知，弦线在水平方向未受外力作用，即

$$T_b\cos\alpha_b = T_a\cos\alpha_a.$$

由 a,b 的任意性知，$T\cos\alpha$ 与 x 无关. 又因为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}}=1-\frac{1}{2}u_x^2+\frac{3}{8}u_x^4+\cdots\approx 1,$$

所以 T 与 x 无关，即 $T=T_0$. 又由 $\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=u_x\cos\alpha\approx u_x$，得

$$T\sin\alpha = T_0u_x.$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

因为弦在平面上作横振动，小段弦 $\mathrm{d}s$ 的质量等于其对应平衡位置小段 $\mathrm{d}x$ 的质量 $\rho\mathrm{d}x$，如图 1.1 所示，所以小段弦 $\mathrm{d}s$ 沿垂直方向的动量微元是 $\rho u_t\mathrm{d}x$，外力的冲量微元是 $f_0\mathrm{d}x\mathrm{d}t$，两端张力的冲量微元是 $(T_b\sin\alpha_b-T_a\sin\alpha_a)\mathrm{d}t$. 利用动量守恒定律

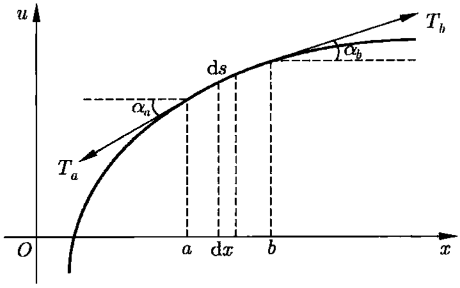


图　1.1

$$\boxed{\begin{array}{c}t=t_2\\ \text{时的动量}\end{array}}-\boxed{\begin{array}{c}t=t_1\\ \text{时的动量}\end{array}}=\boxed{\begin{array}{c}\text{外力在}[a,b]\times[t_1,t_2]\\ \text{内产生的冲量}\end{array}}+\boxed{\begin{array}{c}[t_1,t_2]\text{内张力在垂}\\ \text{直方向产生的冲量}\end{array}}$$

可得

$$\begin{aligned}\int_a^b \rho u_t|_{t=t_2}\mathrm{d}x-\int_a^b \rho u_t|_{t=t_1}\mathrm{d}x&=\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b f_0\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}(T_b\sin\alpha_b-T_a\sin\alpha_a)\,\mathrm{d}t\\&=\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b f_0\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}T_0[u_x(b,t)-u_x(a,t)]\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

假设 u_{tt},u_{xx} 连续，则上式又可写成

$$\int_a^b\int_{t_1}^{t_2}\rho(x)u_{tt}\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b f_0\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b T_0u_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

交换积分次序后再由 a, b, t_1, t_2 的任意性，可得

$$\rho(x)u_{tt}=T_0u_{xx}+f_0(x,t).$$

如果弦是均匀的，则 $\rho=$ 常数，上式可改写成

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0,\tag{1.1.1}$$

其中 $a=\sqrt{T_0/\rho}$, $f=f_0/\rho$. 此时 $f(x,t)$ 表示在 u 的正方向、单位质量的弦所受到的外力. 不论弦的初始状态和弦在两端的位置如何，弦的振动规律都满足方程 (1.1.1). 方程 (1.1.1) 称为**一维弦振动方程**.

在平面上放置一个框架，对于固定在该框架上作横振动的薄膜，类似的方法可导出膜的振动方程为

$$u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy})=f(x,y,t),\quad (x,y)\in\Omega\subset\mathbb{R}^2,\quad t>0,$$

通常称为*二维波动方程*. 弹性体振动、声波、电磁波满足方程

$$u_{tt}-a^2(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+u_{x_3x_3})=f(\boldsymbol{x},t),\quad \boldsymbol{x}\in\Omega\subset\mathbb{R}^3,\quad t>0,$$

通常称为*三维波动方程*.

注 1.1.1　通常说的弦和膜都有一个共同特点，就是充分柔软、只抗伸长、不抗弯曲. 也就是当它们变形时，反抗弯曲所产生的力矩可以忽略不计. 如果研究的对象没有这种特点，力学上就把它们改称为梁和板. 梁和板的振动方程及平衡方程与弦和膜不同，一般来说会出现未知函数的四阶微商.

模型二　杆在外力作用下沿杆的方向作微小纵振动. 试导出每一截面离开平衡位置所满足的方程（图 1.2）.

我们利用动量守恒来导出位移 u 的变化规律. 杆密度是位置的函数，记为 $\rho(x,t)$. 杆的横截面积亦是位置的函数，记为 $S(x)$，杆上任一截面的弹性模量记为 $E(x,t)$. 那么杆在振动时任一截面所受到的张力为

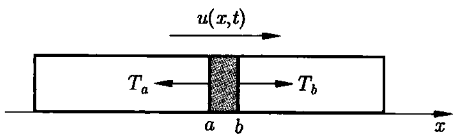


图　1.2

$$T(x,t)=E(x,t)S(x)u_x(x,t).$$

因为杆作微小纵振动，可以认为杆的密度与时间 t 无关，即 $\rho(x,t)=\rho(x)$. 在 u 的正方向、单位长度上的外力密度记为 $f_0(x,t)$. 我们在 $[a,b]\times[t_1,\,t_2]$ 上研究杆的振动情况. 杆的动量的增量为

$$\Delta p=\int_a^b \rho(x)S(x)\left[u_t(x,t_2)-u_t(x,t_1)\right]\mathrm{d}x=\int_a^b \rho(x)S(x)\left(\int_{t_1}^{t_2} u_{tt}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$$

冲量包括两部分：张力在 u 方向产生的冲量 I_1 和外力在 u 方向产生的冲量 I_2：

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{t_1}^{t_2} \left(ES(x)u_x|_{x=b}-ES(x)u_x|_{x=a}\right)\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b (ES(x)u_x)_x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\\ I_2 &= \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b f_0(x,t)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

根据动量守恒得 $\Delta p=I_1+I_2$，即

$$\int_a^b \rho(x)S(x)\left(\int_{t_1}^{t_2} u_{tt}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b (ES(x)u_x)_x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b f_0(x,t)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

再利用 a,b,t_1,t_2 的任意性，便可推出

$$\rho(x)S(x)u_{tt}=(ES(x)u_x)_x+f_0(x,t). \tag{1.1.2}$$

如果杆是均匀细杆，那么 $\rho(x)=\rho$（常数），$S(x)=S_0$（常数）. 将它们代入式 (1.1.2)，可得均匀细杆的微小纵振动方程

$$\rho u_{tt}=(Eu_x)_x+f(x,t).$$

1.1.2 热传导方程

当导热材料体内温度分布不均匀时，热量总是由温度较高的区域流向温度较低的区域，这种现象就是热传导. 解决一个空间物体的热传导问题，就是要确定温度关于时间和空间的变化规律.

设有一各向同性的导热体 Ω，内部有热源，瞬时温度分布记为 $u(x,y,z,t)$. 为了建立温度 u 所满足的方程，我们需要利用热传导所遵循的两个物理定律.

能量守恒定律 任取一部分 $V\subset\Omega$（图 1.3），取任意时段 $[t_1, t_2]$，则能量守恒定律可表示为

$$\boxed{\begin{array}{c}[t_1,t_2]\text{时段内}V\\ \text{中增加的热量}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}[t_1,t_2]\text{时段内通过边}\\ \text{界}\,\partial V=S\text{流入的热量}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}[t_1,t_2]\text{时段内由内}\\ \text{部热源产生的热量}\end{array}}$$

傅里叶（Fourier）热力学定律 热流密度 $\boldsymbol{q}=-k\nabla u$，即热流量的大小与温度的梯度成正比、方向相反，$k$ 是热传导系数.

用 ρ 表示物体的密度，c 表示比热容，$f_0(\boldsymbol{x},t)$ 表示热源强度. 假设物体的密度不随时间而变化. 因为物体是各向同性的，所以 $c(\boldsymbol{x},t)=c$ 为常数.

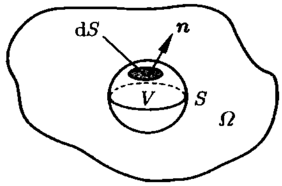


图 1.3

在 $[t_1,t_2]$ 时段内 V 中温度升高增加的热量为

$$Q=\int_V c\rho(u|_{t=t_2}-u|_{t=t_1})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_V\left(\int_{t_1}^{t_2}u_t\mathrm{d}t\right)c\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

通过边界 $\partial V=S$ 流入 V 的热量为

$$Q_1=-\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_S\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\right)\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_S k\nabla u\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\right)\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_S k\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S\right)\mathrm{d}t,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是边界 S 上的单位外法向量；内部热源产生的热量为

$$Q_2=\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_V\rho f_0(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}t.$$

假设 u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz} 连续，利用奥–高公式便推出

$$Q_1=\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_V\nabla\cdot(k\nabla u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}t.$$

由能量守恒定律，得 $Q=Q_1+Q_2$，即

$$\int_V\left(\int_{t_1}^{t_2}u_t\mathrm{d}t\right)c\rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_V\nabla\cdot(k\nabla u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_V\rho f_0(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}t.$$

根据 V 和 t_1, t_2 的任意性，得

$$c\rho u_t - \nabla \cdot (k\nabla u) = \rho f_0(\boldsymbol{x}, t).$$

上式称为*三维热传导方程*. 如果物体是均匀的，则 c, ρ 和 k 都是常数，上式又可以写成

$$u_t - a^2\Delta u = f(\boldsymbol{x}, t), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad t > 0, \tag{1.1.3}$$

其中 $a^2 = k/(c\rho) > 0$, $f = f_0/c$.

如果物体是一根细杆（或一块薄板），或者虽然不是细杆（或薄板）但是其中的温度 u 只与 x, t（或 x, y, t）有关，则方程 (1.1.3) 变为*一维热传导方程*

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t),$$

或*二维热传导方程*

$$u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = f(x, y, t).$$

热传导继续下去，当温度达到稳恒状态，即温度分布不再随时间而变化时，$u_t = 0$. 所以稳恒温度场的温度分布满足*泊松*（Poisson）*方程*（又称*位势方程*）

$$-\Delta u = \frac{f(\boldsymbol{x})}{a^2},$$

如果 Ω 内无热源，上式成为*拉普拉斯*（Laplace）*方程*

$$-\Delta u = 0.$$

1.1.3　传输线方程

在两条平行传输线（或同轴电缆）的输入端加上交变电源时，线间电压和线间电流的分布可由图 1.4 所示的等效电路表示，其中 R, L, C, G 分别为往返线路每单位长度的串联电阻、串联电感、静电电容和漏电电导的值. 假设传输线是均匀的，那么这些值都是常数.

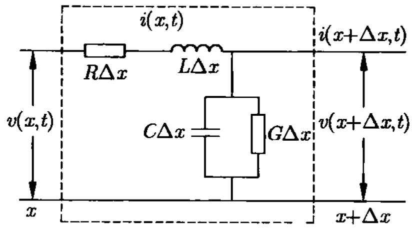


图　1.4

因为输入端是交变电源（或交变信号），所以电压 v 和电流强度 i 沿传输线方向是位置 x 和时间 t 的函数，分别记为 $v(x,t)$ 和 $i(x,t)$. 根据基尔霍夫第二定律，在长度为 Δx 的传输线中，电压降等于电动势之和，即

$$v(x, t) - v(x + \Delta x, t) = (Ri + Li_t)\Delta x,$$

上式两边同除以 Δx，再令 $\Delta x \to 0$，得

$$v_x + Li_t + Ri = 0. \tag{1.1.4}$$

另外，根据基尔霍夫第一定律（流入节点 x 的电流等于流出该节点的电流），

$$i(x,t) = \left[(C\Delta x)v_t + (G\Delta x)v\right] + i(x+\Delta x, t).$$

由此得

$$i_x + Cv_t + Gv = 0. \tag{1.1.5}$$

将方程 (1.1.4) 对 x 微分、方程 (1.1.5) 对 t 微分，再消去 i_{xt} 项，得

$$v_{xx} = LCv_{tt} + (RC+GL)v_t + GRv. \tag{1.1.6}$$

同理可得

$$i_{xx} = LCi_{tt} + (RC+GL)i_t + GRi. \tag{1.1.7}$$

方程 (1.1.6) 或 (1.1.7) 称为*传输线方程*或*电报方程*.

对于高频传输的情形，电阻和电导所产生的效应可以忽略不计，即 $R \approx 0$, $G \approx 0$，此时方程 (1.1.6) 和 (1.1.7) 可简化为

$$v_{xx} = LCv_{tt}, \quad i_{xx} = LCi_{tt}.$$

这两个方程称为*高频传输线方程*.

对于同轴电缆的情形，电导和电感所产生的效应可以忽略不计，即 $G \approx 0$, $L \approx 0$，此时方程 (1.1.6) 和 (1.1.7) 可简化为

$$v_{xx} = RCv_t, \quad i_{xx} = RCi_t.$$

1.1.4 电磁场方程

根据物理学中的电场理论我们知道，电场和磁场的变化规律可以利用磁场强度 $\boldsymbol{H}$、电感应强度 $\boldsymbol{D}$、电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 来描述. 联系这些量的*麦克斯韦*（Maxwell）*方程组*为

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} \text{——广义安培电路定律},\\
&\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \text{——法拉第电磁感应定律},\\
&\mathrm{div}\boldsymbol{D} = 4\pi\rho \text{——库仑定律},\\
&\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \text{——磁场的高斯定律},
\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{J}$ 是电流密度，c 是真空中的光速，ρ 是电荷密度. 利用场的物质方程

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H},\quad \boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E},$$

其中 ε 是介质的介电常数，μ 是磁导率，σ 是电导率，麦克斯韦方程组可以写成

$$\begin{cases}\mathrm{rot}\boldsymbol{H}=\dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\dfrac{4\pi\sigma}{c}\boldsymbol{E},\\ \mathrm{rot}\boldsymbol{E}=-\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t},\\ \mathrm{div}\boldsymbol{E}=\dfrac{4\pi}{\varepsilon}\rho,\\ \mathrm{div}\boldsymbol{H}=0.\end{cases}$$

如果电场是静电场，则 $\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=\dfrac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=\boldsymbol{0}$，即无旋场. 因为无旋场是有势场，故存在一个势函数 $u(x,y,z)$（称为电位，或电势）使得 $\boldsymbol{E}=-\nabla u$. 所以

$$-\Delta u=\mathrm{div}\boldsymbol{E}=\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho,$$

即电位满足泊松方程.

1.2　定解条件和定解问题

含有未知函数的偏导数的方程叫*偏微分方程*，常微分方程可以看成是特殊的偏微分方程. 方程的个数是1的称为*方程式*，个数多于1的叫做*方程组*. 方程（组）中出现的未知函数的最高阶偏导数的阶数称为方程（组）的*阶数*. 如果方程（组）中的项关于未知函数及其各阶偏导数的整体来讲是线性的，就称方程（组）为*线性的*，否则就称为*非线性的*. 非线性又分为*半线性*、*拟线性*和*完全非线性*.

1.2.1　定解条件

给定一个常微分方程，有通解和特解的概念. 通解只要求满足方程，即满足某种物理定律，而不能完全确定一个物理状态. 特解除了要求满足方程还要满足给定的外加（特殊）条件. 对偏微分方程也是如此，换句话说，只有偏微分方程还不足以确定一个物理量随空间和时间的变化规律，因为在特定情况下这个物理量还与它的初始状态和它在边界受到的约束有关. 描述初始时刻的物理状态和边界的约束情况，在数学上分别称为*初始条件*（或*初值条件*）和*边界条件*（或*边值条件*），它们统称为*定解条件*.

1. 弦振动方程　$(u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),\ 0<x<l,\ t>0)$

初始条件是指初始时刻 $(t=0)$ 弦的位移和速度. 若以 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 分别表示弦上任意

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com