

积分几何 讲座

主讲人

国防科技大学

孫本旺 教授

湖南省数学会印

一九七九年六月

目 录

第一部分 平面内的积分几何

第1章	平面内的凸集	{ 5 }
1.	引言	{ 5 }
2.	一直线族的色络	{ 5 }
3.	Minkowski的混合面积	{ 7 }
4.	某些特殊的凸集	{ 9 }
5.	单位球的面积与单位球体的体积	{ }
第2章	平面内的点集与Poisson过程	{ 15 }
1.	关于点集的密度	{ 15 }
2.	初步积分公式	{ 16 }
3.	三重点的集	{ 19 }
4.	齐性平面的Poisson点过程	{ 20 }
第3章	平面内的直线集	{ 24 }
1.	关于直线集的密度	{ 24 }
2.	与一凸集或一曲线相交的直线	{ 28 }
3.	割断或分开两个凸集的直线	{ 31 }
4.	几何应用	{ 34 }
第4章	点的对偶与直线的对偶	{ 38 }
1.	关于点对偶的密度	{ 38 }
2.	关于一凸集的弦的 μ 的积分	{ 39 }
3.	关于直线对偶的密度	{ 43 }

4. 平凸被随机直线的分割	{46}
第5章 平面内的带形的集	{56}
1. 关于带形的集的密度	{56}
2. Buffon's 抛针问题	{60}
3. 吴盖线与带形的集	{62}
4. 某些中值	{65}
第6章 平面内运动群: 动力密度	{68}
1. 平凸内的运动群	{68}
2. 在 \mathcal{M} 上的微分式	{71}
3. 动力密度	{74}
4. 线段的集	{79}
5. 交另一凸集的凸集	{84}
6. 某些积分公式	{87}
7. 一个中值, 伏盖问题	{90}
第7章 Poincaré' 与 Blaschke 的基本公式	{95}
1. 关于动力密度的一个新的表达式	{95}
2. Poincaré' 的公式	{97}
3. 一闭曲线与一平凸域的全曲率	{98}
4. Blaschke 的基本公式	{100}
5. 同周不等式	{107}
6. 为了一域能够包含另一个域的 Hadwiger 的条件	{110}
第8章 图形格子	{113}
1. 定义与基本公式	{113}
2. 域的格子	{116}
3. 曲线的格子	{119}

4. 莫的格子 ———— (121)

第二部分 一般积分几何

第9章 微分式与李群 ———— (127)

1. 微分式 ———— (127)

2. Pfaffian 微分系统 ———— (131)

3. 微分流形的映射 ———— (134)

4. 李群: 左与右平移 ———— (136)

5. 左不变微分式 ———— (138)

6. Maurer - Cartan 方程 ———— (140)

7. 一群的不变体积元素, 单模群 ———— (147)

第10章 齐性空间内的密度与测度 ———— (153)

1. 引言 ———— (153)

2. 不变子群与商群 ———— (158)

3. 在齐性空间上存在一密度的其它条件 ———— (159)

4. 举例 ———— (161)

5. 李变换群 ———— (163)

第11章 仿射群 ———— (168)

1. 仿射变换群 ———— (168)

2. 对于特殊齐次仿射变换的线性空间的密度 ———— (172)

3. 对于特殊的非齐次仿射变换群的线性子空间的
密度 ———— (178)

第12章 在 E_n 内的运动群 ———— (183)

1. 引言 ———— (183)

2. 关于 E_n 内线性空间的密度 ———— (187)

3. 一个微分公式 — — — — — (188)
4. 关于围绕一固定的 q -平面的 r -平面的密度 — — (191)
5. 关于 E_n 内 r -平面的密度的另一形式 — — — (194)
6. 线性空间对偶的集 — — — — — (195)

第二部分 在 E_n 内的积分几何

第13章 E_n 内的凸集 — — — — — (201)

1. 凸集与 *quevmass integrale* — — — — — (201)
2. 哥西公式 — — — — — (204)
3. 平行凸集, Steiner's 公式 — — — — — (207)
4. 关于一凸集在线性子空间上投影的积分公式 — — (209)
5. 平均曲率的积分 — — — — — (210)
6. 平均曲率的积分与 *quevmass integrale* — — — (212)
7. 一个锤平的凸体的平均曲率的积分 — — — — (216)

第14章 线性子空间, 凸集与紧緻流形 — — — — — (220)

1. 一凸集的 r -平面的集 — — — — — (220)
2. 几何概率 — — — — — (222)
3. E_n 内 Crofton's 公式 — — — — — (225)
4. 在线性子空间的密度之间的某些关系式 — — — (229)
5. 一一流形的线性子空间 — — — — — (234)
6. 超曲面与线性空间 — — — — — (240)

第15章 E_n 内的动力密度 — — — — — (243)

1. 关于密度的公式 — — — — — (243)

第一部分 平面内的积分几何

第一章 平面内的凸集

1. 引言:

凸集在积分几何内起一重要的作用。为此，我们在这里复习一下它们的主要性质，特别是下凸章节中需要的那些性质。在这一章内，我们考虑平面内的凸集。关于在几维欧几里得空间内的凸集，请看第13章。关于更完全的论述，请参考 Blaschke [50] 及 Bonnesen 及 Fenchel [63] 的经典书籍，或参看更近代的教科书，Benson [27]，Eggleston [162]，Grünbaum [247]，Jaglom 与 Boltjanski [320]，Hadwiger [270]，Hadwiger 与其它的作者 [282]，以及 Valenshne [683]。

平面内一点集 K 叫做是凸的，这是指对于每一对点 $A \in K$ ， $B \in K$ ， $AB \subset K$ ，这里 AB 是联结 A 与 B 的线段。为方便计，在整个书中我们将假设：凸集都是有界的与闭的。

以 P ， Q 为端点的曲线叫做凸的，倘若它的点集与线段 PQ 一起围成一凸集。如果凸集 K 是有界的并有内点，则 K 的边界是一闭的凸曲线。在整个书中，我们将用 ∂K 记集 K 的边界，如果 K 的所有点都属于 ∂K ，则 K 是一直线段。

我们能够证明 (a) 所有凸曲线都是逐段可微分的 (就是说，它们都是弧的一可数集的并，这些弧具有连续转动的切线) 换句话说，凸曲线至多有可数多个的角点；(b) 所有有界的凸曲线都是可度量的，一凸集 K 的边界 ∂K 的长度叫做 K 的周长。

2. 直线族的包络

一曲线族 $F(x, y, \lambda) = 0$ (依赖于一参数 λ) 的包络，被定义为这样一条曲线，它的每一点是与该族中一条曲线的一个接触点。如大家所熟知的，包络的方程可以从两个方程 $F = 0$ ，

$\Rightarrow F/\lambda = 0$ 中消去参数 λ 而得到。我们将应用这个结果于一族直线的情形。平面上一直线可以由它到原点的距离 p 与它的法线与 x -轴的夹角 ϕ 来确定(图 1.1) 直线的方程于是为

$$x \cos \phi + y \sin \phi - p = 0 \quad (1.1)$$

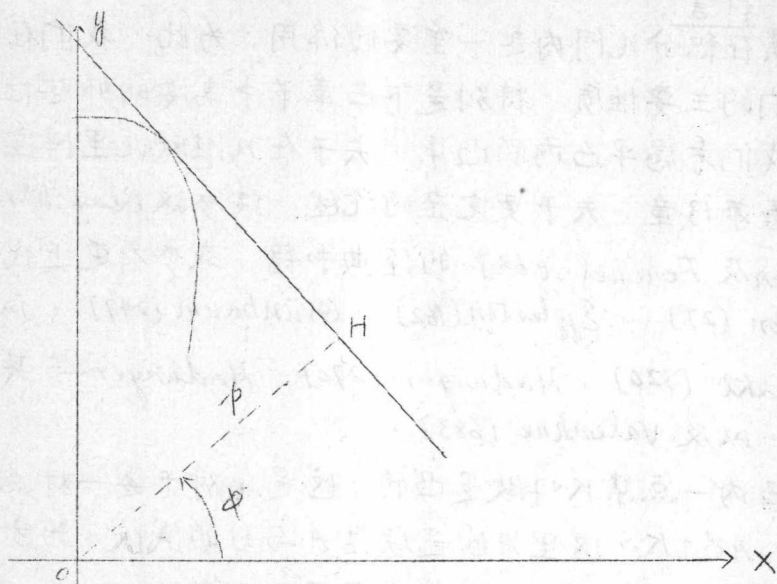


图 1.1

如果 p 是一函数 $p = p(\phi)$, 则方程 (1.1) 是一族直线的方程。而若我们假设 $p(\phi)$ 是可微的, 则族的包络由 (1.1) 与导数

$$-x \sin \phi + y \cos \phi - p' = 0 \quad (p' = dp/d\phi) \quad (1.2)$$

得到。从 (1.1) 与 (1.2) 我们得到直线 (1.1) 的包络的参数表示式

$$x = p \cos \phi - p' \sin \phi, \quad y = p \sin \phi + p' \cos \phi \quad (1.3)$$

这些公式给出直线与包络的接触点 P 的 x, y 坐标 (图 1.1) 因为点 H (它是过 O 的垂线与直线的交点) 的坐标是 $p \cos \phi, p \sin \phi$, 立得

$$HP = p' \quad (1.4)$$

假设函数 p 属于 C^2 类 (回忆一下 C^n 表示 n 次连续可微分的函数类), 从 (1.3) 则得 $dx = -(p + p') \sin \phi d\phi, dy = (p + p') \cos \phi d\phi$

故 $ds = |p + p'| d\phi$ 从而色洛的曲率半径变为 $\rho = ds/d\phi = |p + p'|$

如果色洛是一凸集 K 的边界, $\exists K$ 而 O 是 K 的一内点, 则 $p = p(\phi)$ 叫做 K 的支柱函数或凸曲线, $\exists K$ 参攷于原点 O 的支柱函数. 直线 (1.1) 是 K 的支柱直线. 在这情形下我们可以证明 $p + p'' > 0$. (例如参看 [63. 18 页]) 而前段中的公式可以写做

$$ds = (p + p'') d\phi, \quad \rho = p + p'' \quad (1.5)$$

可以证明, 周期函数 p 为一凸集 K 的支柱函数, 一必要而充分的条件是 $p + p'' > 0$. 从 (1.5) 中某一个方程则得一闭的凸曲线的长度 (这曲线有原于 C^2 类的支柱函数 p) 则由下式积分给出

$$L = \int_0^{2\pi} p d\phi \quad (1.6)$$

p 原于类 C^2 的假设可以移去. 我们能够证明公式 (1.6) 对于任意的闭凸曲线都成立 (参看, 比方法 [683. 161 页]).

凸集 K 的面积, 也可以用支柱函数来计标. 事实上, 如果我们把 K 看做分解成高 h 及底为 ds 的初等三角形, 而以点 O 作为公共顶点, 则有

$$F = \frac{1}{2} \int_{\partial K} p ds = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p(p + p'') d\phi \quad (1.7)$$

由分部积分法

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p^2 - p'^2) d\phi \quad (1.8)$$

3. Minkowski 的混合面积:

$$\begin{array}{l} p(\varphi) = p_1(\varphi) + p_2(\varphi) \text{ 直线} \\ x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0 \end{array}$$

命 K_1, K_2 为平面上两个有界的凸集. 它们关于 O_1 及 O_2 的支柱函数分别为 p_1 与 p_2 , 均原于类 C^2 . 考虑函数 p 的色洛是一闭曲线. 它的曲率半径是 $\rho = p + p'' = (p_1 + p_1'') + (p_2 + p_2'') = p_1 + p_2$. 因为 $\exists K_1$ 与 $\exists K_2$ 为凸曲线, 我们有 $p_1 > 0, p_2 > 0$ 因而 $\rho > 0$. 所以上述色洛是一凸集 $K_{1,2}$ 的边界. 如果 p_1 与 p_2 不原于 C^2 类, 证明失效, 但结果仍然为真. 函数 $p = p_1 + p_2$ 恒为一凸集 $K_{1,2}$ 的支柱函数, $K_{1,2}$ 叫做 K_1 与 K_2 的混合凸集 [63. 29 页].

K_{12} 的面积具有形状

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p^2 - p'^2) d\phi = F_1 + F_2 + 2F_{12} \quad (1.9)$$

这里 F_1, F_2 为 K_1, K_2 的面积, 而

$$F_{12} = F_{21} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p_1 p_2 - p_1' p_2') d\phi \quad (1.10)$$

是所谓 K_1 与 K_2 的 Minkowski 混合面积, 应用 (1.5) 分部积分法给出

$$F_{12} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p_1 (p_2 + p_2'') d\phi = \frac{1}{2} \int_{\partial K_1} p_1 ds_2 \quad (1.11)$$

仿此也有
$$F_{21} = \frac{1}{2} \int_{\partial K_1} p_2 ds_1 \quad (1.12)$$

这里 ds_1, ds_2 为 $\partial K_1, \partial K_2$ 在垂直于方向 ϕ 的支柱直线的接触点上的弧元素.

注意混合积 F_{12} 不依赖于原点 O_1, O_2 . 事实上, 若 O_1 被换做 O_1^* 使得 $O_1 O_1^* = a$ 而 α 是 $O_1 O_1^*$ 与 X -轴的夹角 (图 1.2), 则关于 O_1^* 的支柱函数是 $p_1^* = p_1 - a \cos(\phi - \alpha)$ 并应用 (1.10). 再分部积分法, 我们证明 $F_{12}^* = F_{12}$ 如果我们改变 O_2 , 则同样结果显然为真.

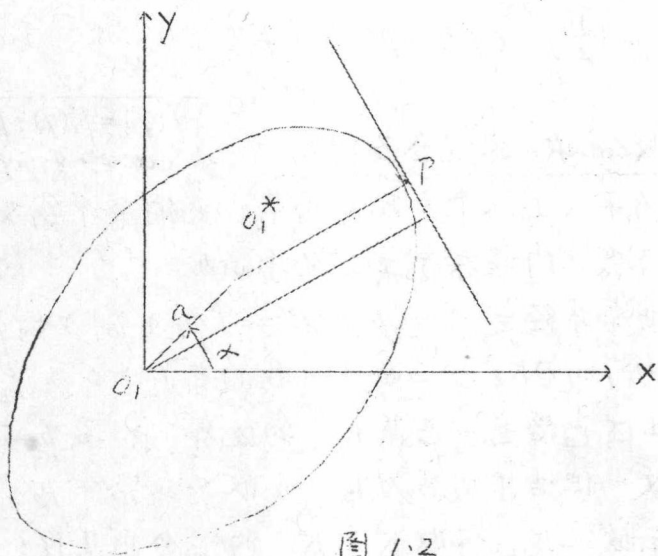


图 1.2

此外，将 K_1 与 K_2 平移，混合面积 F_{12} 不改变，因为 p_1 与 p_2 保持不变。现在假设其中一个集，比方说 K_1 ，围绕一点 O_1 被旋转一个角度 θ ，命 O_1^* 为 O_1 的像，旋转等价于围绕 O_1 旋转角度 θ ，再接着由矢量 $O_1 O_1^*$ 定义的平移，于是，由于 F_{12} 在平移下的不变性，剩下只要考虑围绕 O_1 的旋转，经过绕 O_1 的旋转角度 θ 后 K_1 的新的支柱函数是 $p_1^*(\phi) = p_1(\phi - \theta)$ 而 K_2 与旋转集 K_1^* 的混合面积变为

$$F_{12}(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\partial K_2} p_1(\phi - \theta) ds_2$$

对于 θ 积分并应用 (1.6) 我们得到

$$\int_0^{2\pi} F_{12}(\theta) d\theta = \frac{1}{2} L_1 L_2 \quad (1.13)$$

这个公式在以后将是有益的。

例 1、若 K_1 是 K_2 平移后的像，我们不妨假设 $p_1 = p_2$ ， $ds_1 = ds_2$ 而 (1.12) 给出， $F_{12} = F_1 = F_2$ ，就是说，在平移下互相全等的凸集的混合面积等于这些集的公共面积。

例 2、若 K_2 是一半径为 r 的圆，我们有 $ds_2 = r d\phi$ 而 (1.11) 给出

$$F_{12} = \frac{1}{2} r \int_0^{2\pi} p_1 d\phi = \frac{1}{2} r L_1 \quad (1.14)$$

例 3、命 K_1, K_2 为分别具有长度 $2a, 2b$ 的直线段并命 α 为含线段的直线之间的夹角，应用 (1.10) 我们得到 $F_{12} = 2ab |\sin \alpha|$ 对 α 积分于域 $0, 2\pi$ 之上，按照 (1.13) 我们得 $8ab$ ，注意一直线段是一凸集，其周长是线段的长度的两倍。

4. 某些特殊的凸集

一直线 h 叫做凸集 K 在一点 $P \in \partial K$ 上的支柱直线，倘若 $P \in h$ 并且 K 含于由 h 分割的两个开半平面之一的闭包内的话，若 ∂K 在 P 具有一切线，则在 P 的支柱直线与切线重合。一凸集的边界上，每一点位于一支柱直线上而且垂直于已知方向

恰恰有两条支柱直线：

K 的沿方向 ϕ 中的宽度 $\Delta(\phi)$ 是指两条平行的 K 的支柱直线间的距离而这两条支柱直线垂直于方向 ϕ ，并且含 K 于其间。如果 $p(\phi)$ 是 K 的支柱函数，则有 $\Delta(\phi) = p(\phi) + p(\phi + \pi)$ 并依照 (1.6) 我们有

$$L = \int_0^\pi \Delta(\phi) d\phi \quad (1.15)$$

于是 Δ 的中位或期望值是

$$E(\Delta) = L/\pi \quad (1.16)$$

这里 L 是 K 的周长。注意宽度 $\Delta(\phi)$ 可以定义为 K 在平行于方向 ϕ 的一直线上的垂直投影的长度。结果 (1.16) 给出：长度为 L 的任一闭凸曲线 ∂K 可以用这样的方式投影在一直线上，使得投影的长度是 $\geq L/\pi$ 。它也可以这样地投影，使得这样一长度是 $\leq L/\pi$ 。

一凸集 K 的宽度的最小值叫做 K 的广度。我们将用 E 表示之， K 的直径，用 D 来表示，是 K 的两点间的最大距离，它也可以定义为 K 的最大宽度。因为显然有 $E \leq \Delta \leq D$ ，由 (1.15)

则得：

$$\pi E \leq L \leq \pi D \quad (1.17)$$

现在我们要定义某些特殊的凸集。这些集对我们的目的来说都有特殊的趣味：

平行凸集。一凸集 K 在距离 r 的平行集 K_r 是以 r 为半径的所有闭圆盘的併集。这些圆盘的中心都是 K 的点。边界 ∂K_r 叫做 ∂K 的外平行曲线，其距离为 r 。图 1.3, 1.4 与 1.5 分别表明一直线段，一三角形及一椭圆的平行集。

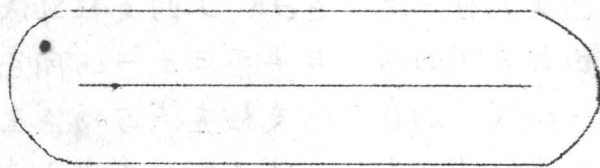


图 1.3

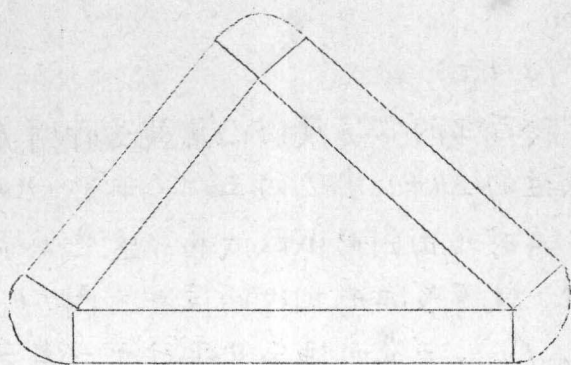


图 1.4

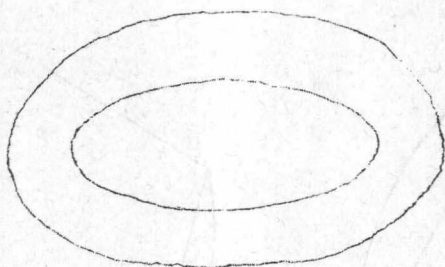


图 1.5

如果 $p(\phi)$ 是 K 关于 O 的支柱函数, 则 K_r 的关于同一点 O 的支柱函数是 $p(\phi) + r$. 并应用 (1.6) 与 (1.8) 我们有: K_r 的周长与面积分别是

$$L_r = L + 2\pi r, \quad F_r = F + Lr + \pi r^2 \quad (1.18)$$

如果 ∂K 属于 C^2 类, ∂K_r 的曲线半径, 由 (1.5) 是

$$\rho_r = \rho + r \quad (1.19)$$

对于凡使得 $r \leq \min \rho$ 的 r 值, 我们可定义内平行集 K_{-r} 为这样的集, 它的支柱函数是 $p(\phi) - r$. 于是 ∂K_{-r} 的长度与 K_r 的面积由同样公式 (1.18) 给出, 不过 r 须换做 $-r$.

常宽度的集, 如果 $\Delta(\phi) = \Delta = \text{常数}$ 对一切 ϕ , 凸集 K 叫做具有常宽度. 在这情形下我们有 $E = \Delta = D$, 并由 (1.15) K 的周长是由简单的公式

$$L = \pi \Delta \quad (1.20)$$

给出.

此外, 如果 ∂K 属于类 C^2 , 应用 (1.5) 以及 $\Delta = p(\phi) + p(\phi + \pi)$

的事实。我们有

$$\rho(\phi) + \rho(\phi + \pi) = \Delta \quad (1.21)$$

除去圆外，比较简单的常宽度的凸集就是所谓 *Reuleaux* 多角形，给定一个线性的 $2n+1$ 个边的正多角形 ($n=1, 2, \dots$) 相应的 *Reuleaux* 多角形是由圆形弧做成的，这些弧落在多角形的边上而它们的中心，就是多角形相对的顶点。图 1.6 表明 *Reuleaux* 三角形与 *Reuleaux* 五角形，注意凡平行于一常宽度的凸集的每一个集也是常宽度的。

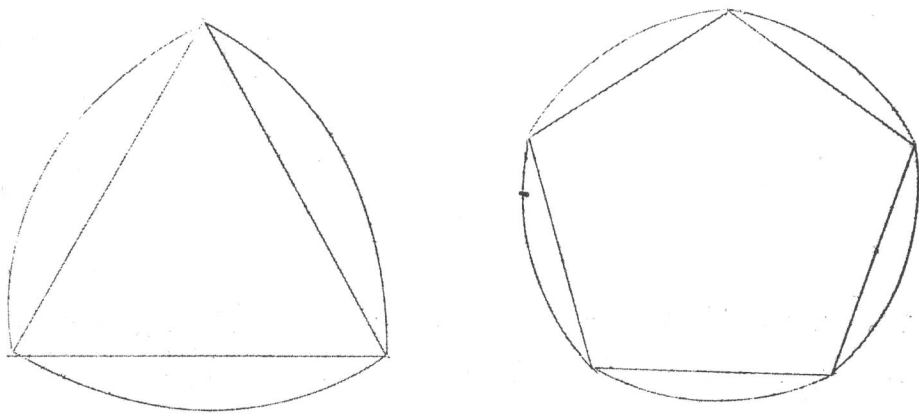


图 1.6

可以证明，直径为 $D \equiv \Delta$ 的任一集是一个常宽度 Δ 的凸集的一子集。[63, 136页]。

三角形凸集。常宽度的凸集可以在一正方形内部旋转（就是说所有圆外接的矩形都是全等的正方形，图 1.7）也有这样的凸集它们可以在一固定的等边三角形内旋转，这相当于说，所有圆外接于集的等边三角形都是全等三角形。这些集统之被叫做三角形集，例如，图 1.8 中的阴影的纺垂形是一三角形集，一三角形的每一平行集，仍是一三角形集。

因为从一等边三角形的一内点到边的距离之和，等于三角形的高，故知一三角形集的支柱函数，满足条件 $\rho(\phi) + \rho(\phi + \frac{2\pi}{3}) + \rho(\phi + \frac{4\pi}{3}) = h$ 。从这个等式，及 (1.6)，则得知内接于高

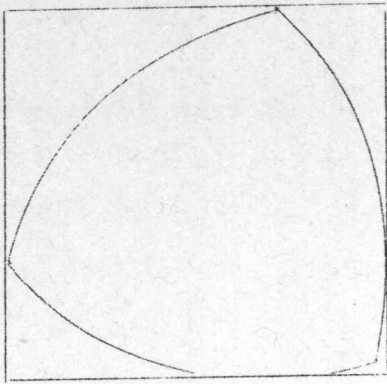


图 1.7

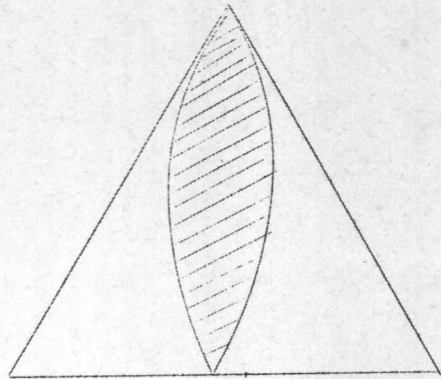


图 1.8

为 a 的等边三角形内的三角形集的周长是 $L = (2\pi/3) a$

□ 图 1.8 所示曲线与等边三角形的面积

第二章 平面上的点集与 Poisson 过程

1. 点集的密度:

命 x, y 为平面内的矩形卡的笛坐标, 在积分几何与几何概率的理论中, 一个点集 \mathcal{X} 的测度是被定义做在一微分式

$\omega = f(x, y) dx \wedge dy$ 的集上的积分 (例如, 这积分在 Lebesgue 意义下是存在的话), 这里函数 $f(x, y)$ 是按照下式法则而被选定的: 测度 $m(\mathcal{X})$ 在平面内的运动群之下, 必须是不变的。

在整个书中, 我们将采用外微积的记号与法则, 这些可以在任何近代微积分或微分几何的书中找到 (例如 Fleming (204), Flanders (201, 202), Loomis & Sternberg (368) 及 H. Cartan (91) 这些书)。

命 \mathcal{G} 为平面上的运动群, 对于直角卡的笛坐标系, 运动 $u \in \mathcal{G}$ 的方程是

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha + a, \quad y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha + b \quad (2.1)$$

这里 (a, b) 为平移的分量而 α 为 u 的旋转角。

我们要寻求一函数 $f(x, y)$ 使得测度 $m(\mathcal{X}) = \int_{\mathcal{X}} f(x, y) dx \wedge dy$ 在 \mathcal{G} 之下, 对于任意的 \mathcal{X} 都是不变的。若 $\mathcal{X}' = u \mathcal{X}$ 是 \mathcal{X} 经过运动 u 之后的变式, 应用 $dx \wedge dy = dx' \wedge dy'$, 我们有

$$m(\mathcal{X}') = \int_{\mathcal{X}'} f(x', y') dx' \wedge dy' = \int_{\mathcal{X}} f(x', y') dx \wedge dy$$

而条件 $m(\mathcal{X}) = m(\mathcal{X}')$ 对任何的 \mathcal{X} 成立给出 $f(x', y') = f(x, y)$ 对一切对应的点 $(x, y) \rightarrow (x', y')$ 的对偶, 因为任何的点 x, y 都可以用一运动变至任何其它点 x', y' (就是运动群对于点来说是传递的), 我们有 $f(x, y) = \text{常数}$ 这给出下式的定义

平面上一个点集 $\{P(x, y)\}$ 的测度被定义做在微分式

$$dP = dx \wedge dy \quad (2.3)$$

的集上的积分, 这叫做点的密度。

除去常数因子不计外，这个密度显然是唯一的。在运动之下不变。同理，对于 n 重点 P_1, P_2, \dots, P_n 的集，假设是独立的，我们叙述如下的定义：

n 重点 $P_i(x_i, y_i)$, $i=1, 2, \dots, n$ ，它们互相独立，对于这 n 重点的集，其密度是

$$dp_1 \wedge dp_2 \wedge \dots \wedge dp_n \quad (2.4)$$

这里 $dp_i = dx_i \wedge dy_i$ 除去一常数因子不计外，这个密度是唯一的。

密度 (2.3) 与 (2.4) 恒取共绝对值。

如果诸点 P 在关于 α 的坐标系 x, y 下是由方程 $x=h(z, y)$, $y=g(z, y)$ 给出的，则点密度取形式 $dp = dx \wedge dy = |J| dz \wedge dy$ 。

这里 J 是 Jacobian 行列 $J = h_z g_y - h_y g_z$ 。

一旦我们定义了点的集与 n 重点的集的密度，则一“随机”元素（点或 n 重点）在集 \mathcal{Y} 内（当它已知是在集 \mathcal{X} , $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ ，之内时）的概率被定义为测度之商，

$$p = \frac{\mu(\mathcal{Y})}{\mu(\mathcal{X})} \quad (2.5)$$

以后我们将需要的关于几何概率的初步概念可以在 Deltheil (144) 的书，M.G. Kendall 与 P.A.P. Moran (335) 的书以及 M.J. Steka 与 R. Theodorescu (654) 的书中找到关于公理化的作法。请参阅 Hedwiger 的工作 (275) 或 Rényi 的工作 (501, 503)。

2. 初步积分公式

我们将按 Crofton (132, 133) 与 Lebesgue (357) 的方式给出一个例子，说明经过密度 $dp = dx \wedge dy$ 在各个不同的坐标系中的简单计标，给出某些有关平凸内凸集的显著的积分公式。

命 K_1, K_2 为两个有界的凸集，它们的关于点 O_1, O_2 的支柱直线与相应的凸集，仅有一点公共，命 $\tau_i = \phi_i + \pi/2$ ($i=1, 2$) 为支柱直线的方向，它们垂直于方向 ϕ_i (图 2.1)