积分几何讲座

主讲人
国防科技大学
孙本旺 教授

湖南省数学会印
一九七九年六月

目录

第一部分　平面内的积分几何

第二部分 一般积分几何

第三部分　在En内的积分几何

第一部分 平面内的积分几何

第一章 平面内的凸集

1. 引言：

凸集在积分几何内起一重要的作用．为此，我们在这里复习一下它们的主要性质，特别是下面章节中需要的那些性质．在这章内，我们考虑平面内的凸集．关于在n维欧几里得空间内的凸集，请看第13章．关于更完全的论述，请参考Blaschke〔50〕及Bonnesen及Fenchel〔63〕的经典书籍，或参看更近代的教科书，Benson〔27〕，Eggleston〔162〕，Grünbaum〔247〕，Jaglom与Boltjanski〔320〕，Hadwiger〔270〕，Hadwiger与其它的作者〔282〕，以及Valentine〔683〕．

平面内一点集K叫做是凸的，这是指对于每一对点$A\in K$，$B\in K$，$AB\subset K$，这里AB是联结A与B的线段．为方便计，在整个书中我们将假设：凸集都是有界的与闭的。

以P，Q为端点的曲线叫做凸的，倘若它的点集与线段PQ一起围成一凸集．如果凸集K是有界的並有内点，则K的边界是一闭的凸曲线．在整个书中，我们将用∂K记集K的边界，如果K的所有的点都属于∂K，则K是一直线之段。

我们能够证明(a)所有凸曲线都是逐段可微分的（就是说它们都是弧的可数集的併，这些弧具有连续转动的切线）换句话说，凸曲线至多有可数多个的角点；(b)所有有界的凸曲线都是可度長的，一凸集K的边界∂K的長度叫做K的周長，

2、直线族的包络

一曲线族$F(x,y,\lambda)=0$（依赖于一参数λ）的包络，被定义为这样一条曲线，它的每一点是与该族中一条曲线的一个接触点．如大家所熟知的，包络的方程可以从两个方程$F=0$，

$\partial F/\partial\lambda = 0$ 中消去参数 λ 而得到．我们将应用这个结果於一直线族的情形。平面上一直线，可以由它到原点的距离 p 与它的法线与 x 一轴的夹角 φ 来確定(图 1.1) 直线的方程于是为

$$x\cos\phi + y\sin\phi - p = 0 \qquad (1.1)$$

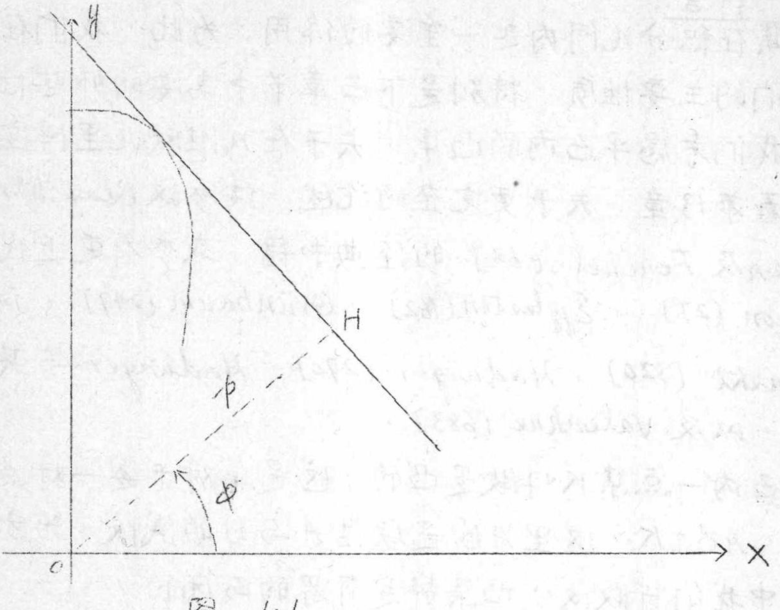

图 1.1

如果 p 是一函数 $p = p(\phi)$，则方程 (1.1) 是一直线族的方程．而若我们假設 $p(\phi)$ 是可微的，则族的包络由 (1.1) 与导数．

$$-x\sin\phi + y\cos\phi - p' = 0 \quad (p' = dp/d\phi) \qquad (1.2)$$

得到．从 (1.1) 与 (1.2) 我们得到直线 (1.1) 的包络的参数表示式

$$x = p\cos\phi - p'\sin\phi,\; y = p\sin\phi + p'\cos\phi \qquad (1.3)$$

这些公式给出直线与包络的接触点 P 的 x，y 坐标 (图 1.1) 因为点 H (它是过 O 的垂线与直线的交点) 的坐标是 $p\cos\phi$，$p\sin\phi$，立得

$$HP = p' \qquad (1.4)$$

假設函数 p 属于 C^2 类 (回忆一下 C^n 表示 n 次连续可微分的函数类)，从 (1.3) 则得 $dx = -(p+p')\sin\phi\, d\phi$, $dy = (p+p')\cos\phi\, d\phi$

故 $ds=|p+p''|d\varphi$ 从而包络的曲率半径变为 $\rho=ds/d\varphi=|p+p''|$

如果包络是一凸集K的边界，∂K 而 O 是K的一内点，则 $p=p(\varphi)$ 叫做K的支柱函数或凸曲线 ∂K 参孜于原点 O 的支柱函数，直线（1.1） 是K的支柱直线，在这情形下我们可以证明 $p+p''>0$.(例如参看[63.18页]） 而前段中的公式可以写做

$$ds=(p+p'')d\varphi,\quad \rho=p+p'' \tag{1.5}$$

可以证明，周期函数 p 为一凸集K的支柱函数，一必要而充分的条件是 $p+p''>0$，从（1.5）中某一个方程则得一闭的凸曲线的長度（这曲线有属于 C^2 类的支柱函数 p）则由下面积分给出

$$L=\int_0^{2\pi}p\,d\varphi \tag{1.6}$$

p 属于类 C^2 的假設可以移去，我们能够证明公式（1.6）对于任意的闭凸曲线都成立（参看 比方法[683.161页]）。

凸集K的面积，也可以用支柱函数来计标，事实上，如果我们把K看做分解成高 h 及底为 ds 的初等三角形，而以点 O 作为公共顶点，则有

$$F=\frac{1}{2}\int_{\partial K}p\,ds=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}p(p+p'')d\varphi \tag{1.7}$$

由分部积分法

$$F=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p^2-p'^2)d\varphi \tag{1.8}$$

$p(\varphi)=p_1(\varphi)+p_2(\varphi)$ 直线
$x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0$

3、Minkowski 的混合面积：

命 K_1，K_2 为平面上两个有界的凸集，它们关于 O_1 及 O_2 的支柱函数分别为 p_1 与 p_2，均设属于类 C^2，考虑函数 的包络是一闭曲线，它的曲率半径是 $\rho=p+p''=(p_1+p_1'')+(p_2+p_2'')=\rho_1+\rho_2$，因为 ∂K_1 与 ∂K_2 为凸曲线，我们有 $\rho_1>0$，$\rho_2>0$ 因而 $\rho>0$，所以上述包络是一凸集 K_{12} 的边界，如果 p_1 与 p_2 不属于 C^2 类，证明失效，但结果仍然为真，函数 $p=p_1+p_2$ 恒为一凸集 K_{12} 的支柱函数，K_{12} 叫做 K_1 与 K_2 的混合凸集[63,29页]

K_{12} 的面积具有形状

$$F=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p^2-p'^2)\,d\phi=F_1+F_2+2F_{12} \tag{1.9}$$

这里 F_1，F_2 为 K_1，K_2 的面积，而

$$F_{12}=F_{21}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p_1p_2-p_1'p_2')\,d\phi \tag{1.10}$$

是所谓 K_1 与 K_2 的 Minkowski 混合面积，应用 (1.5) 分部积分法给出

$$F_{12}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}p_1(p_2+p_2'')\,d\phi=\frac{1}{2}\int_{\partial K_1}p_1\,ds_2 \tag{1.11}$$

仿此也有

$$F_{21}=\frac{1}{2}\int_{\partial K_1}p_2\,ds_1 \tag{1.12}$$

这里 ds_1，ds_2 为 ∂K_1，∂K_2 在垂直于方向 ϕ 的支柱直线的接触点上的弧元素。

注意混合积 F_{12}，不倚赖于原点 O_1，O_2。事实上，若 O_1 被换做 O_1^* 使得 $O_1O_1^*=a$ 而 α 是 $O_1O_1^*$ 与 X－轴的夹角（图 1.2）则关于 O_1^* 的支柱函数是 $p_1^*=p_1-a\cos(\phi-\alpha)$ 并应用 (1.10) 与分部积分法，我们证明 $F_{12}^*=F_{12}$ 如果我们改变 O_2，则同样结果显然为真。

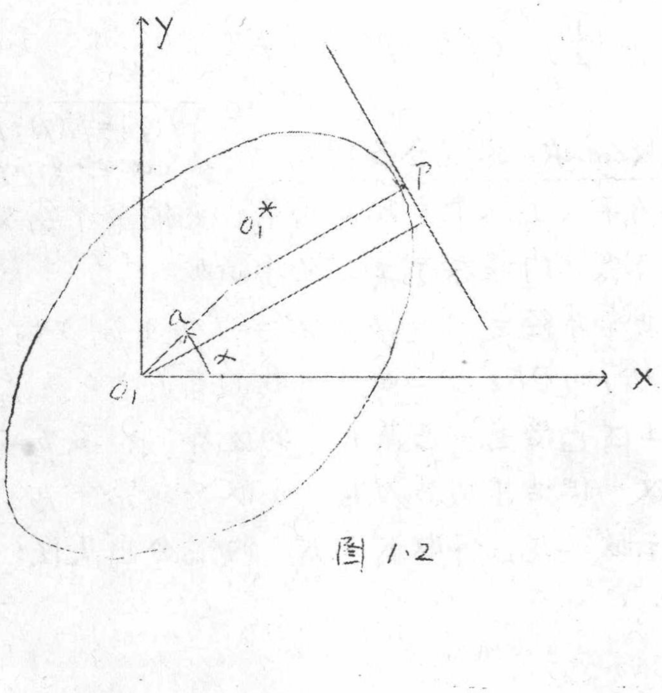

图 1.2

此外，将K_1与K_2平移，混合面积F_{12}不改变，因为p_1与p_2保持不变。现在假设其中一个集，比方说K_1围绕一点O被旋转一个角度θ，命O_1^*为O_1的像，旋转等价于围绕O_1旋转角度θ，再接着由矢量$O_1O_1^*$定义的平移，于是，由于F_{12}在平移下的不变性，剩下只要考虑围绕O_1的旋转，经过绕O_1的旋转角度θ后K_1的新的支柱函数是$p_1^*(\phi)=p_1(\phi-\theta)$而$K_2$与旋转集$K_1^*$的混合面积变为

$$F_{12}(\theta)=\frac{1}{2}\int_{\partial K_2} p_1(\phi-\theta)\,ds_2$$

对于θ积分并应用(1.6)我们得到

$$\int_0^{2\pi} F_{12}(\theta)\,d\theta=\frac{1}{2}L_1L_2 \tag{1.13}$$

这个公式在以后将是有用的。

例1、若K_1是K_2平移后的像，我们不妨假设$p_1=p_2$，$ds_1=ds_2$而(1.12)给出，$F_{12}=F_1=F_2$，就是说，在平移下互相全等的凸集的混合面积等于这些集的公共面积。

例2、若K_2是一半径为r的圆，我们有$ds_2=r\,d\phi$而(1.11)给出

$$F_{12}=\frac{1}{2}r\int_0^{2\pi}p_1\,d\phi=\frac{1}{2}rL_1 \tag{1.14}$$

例3、命K_1，K_2为分别具有长度$2a$，$2b$的直线段并命α为含线段的直线之间的夹角，应用(1.10)我们得到$F_{12}=2ab|\sin\alpha|$对α积分于域0，2π之上，按照(1.13)我们得$8ab$，注意一直线段是一凸集，其周长是线段的长度的两倍。

4、某些特殊的凸集

一直线h叫做凸集K在一点$P\in\partial K$上的支柱直线，倘若$P\in h$并且K含於由h分割的两个开半平面之一的闭包内的话。若∂K在P具有一切线，则在P的支柱直线与切线重合。一凸集的边界上，每一点位於一支柱直线上而且垂直于已知方向

恰恰有两条支柱直线；

K的沿方向ϕ的宽度$\Delta(\phi)$是指两条平行的K的支柱直线间的距离而这两条支柱直线垂直于方向ϕ，並且含K于其间，如果$p(\phi)$是K的支柱函數，则有$\Delta(\phi)=p(\phi)+p(\phi+\pi)$並依照(1·6)我们有

$$L=\int_0^{\pi}\Delta(\phi)d\phi \tag{1.15}$$

于是Δ的中值或期望值是

$$E(\Delta)=L/\pi \tag{1.16}$$

这里L是K的周長，注意宽度$\Delta(\phi)$可以定义为K在平行於方向ϕ的一直线上的垂直投影的長度，结果(1·16)含出：長度为L的任一闭凸曲线∂K可以用这样的方式投影在一直线上，使得投影的長度是$\geq L/\pi$，它也可以这样地投影，使得这样一長度是$\leq L/\pi$；

一凸集K的宽度的最小值叫做K的广度，我们将用E表示之，K的直径，用D来表示，是K的两点间的最大距离，它也可以定义为K的最大宽度，因为显然有$E\leq\Delta\leq D$，由(1·15)则得：

$$\pi E\leq L\leq\pi D \tag{1.17}$$

现在我们要定义某些特殊的凸集，这些集对我们的目的来说都有特殊的趣味：

平行凸集，一凸集K在距离r下的平行集K_r是以r为半径的所有闭圆碟的併集，这些圆碟的中心都是K的点，边界∂K_r叫做∂K的外平行曲线，其距离为r，图1·3，1·4与1·5分别表明一直线段，一三角形及一椭圆的平行集。

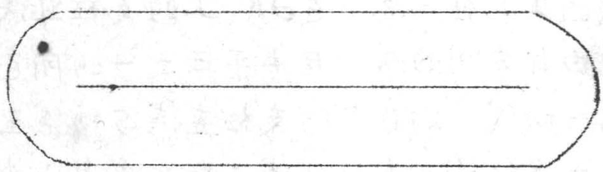

图 1·3

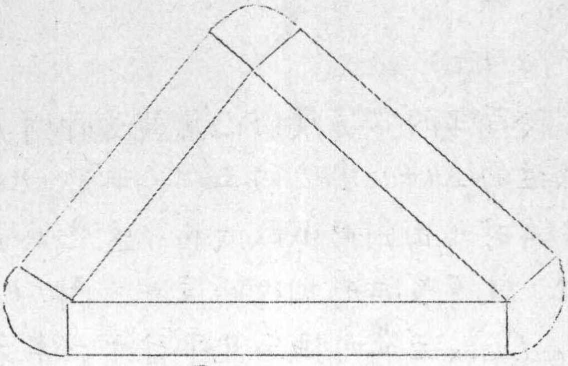

图 1·4

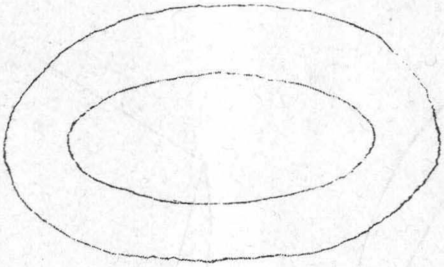

图 1·5

如果 $p(\varphi)$ 是K关于O的支柱函数，则 K_r 的关于同一点O的支柱函数是 $p(\varphi)+r$．並应用(1·6)与(1·8)我们有：K_r的周長与面积分别是

$$L_r = L + 2\pi r, \quad F_r = F + L r + \pi r^2 \qquad (1\cdot 18)$$

如果∂K属于C^2类，∂K_r的曲线半径，由(1·5)是

$$\rho_r = \rho + r \qquad (1\cdot 19)$$

对于凡使得 $r \leqq \min \rho$ 的r值，我们可定义内平行集K_{-r}为这样的集，它的支柱函数是$p(\varphi)-r$，于是∂K_{-r}的長度与K_{-r}的面积由同样公式(1·18)给出，不过r須換做$-r$。

常宽度的集，如果$\Delta(\varphi)=\Delta=$常数对一切φ，凸集K叫做具有常宽度，在这情形下我们有 $E=\Delta=D$，并由(1·15) K的周長是由简单的公式

$$L = \pi\Delta \qquad (1\cdot 20)$$

给出。

此外，如果∂K属于类C^2，应用(1·5)以及 $\Delta=p(\varphi)+p(\varphi+\pi)$

的事实，我们有

$$p(\phi)+p(\phi+\pi)=\Delta \qquad (1.21)$$

除去圆外，比较简单的常宽度的凸集就是所谓 Renleaux 多角形，给定一个线性的 $2n+1$ 个边的正则多角形（$n=1, 2\cdots$）相应的 Renleaux 多角形是由圆形弧做成的，这些弧张在多角形的边上而它们的中心，就是多角形相对的顶点，图 1.6 表明 Ren-leaux 三角形与 Renleaux 五角形，注意凡平行于一常宽度的凸集的每一个集也是常宽度的。

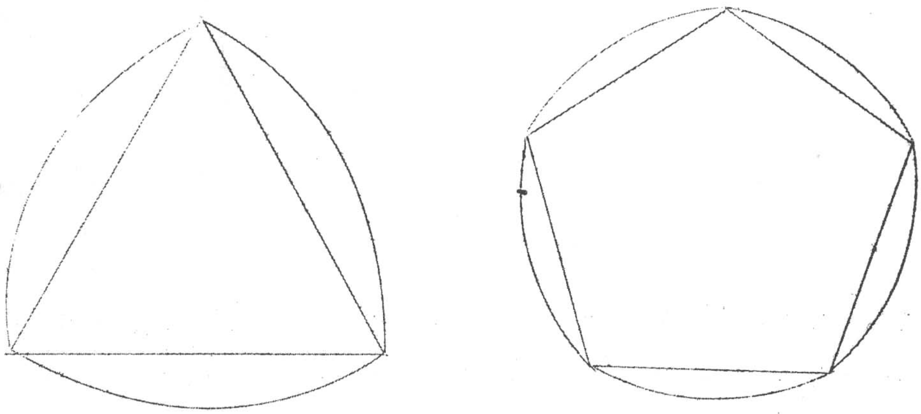

图 1.6

可以证明，直径为 $D\leq\Delta$ 的任一集是一个常宽度 Δ 的凸集的一子集，[63，136页]。

三角形凸集，常宽度的凸集可以在一正方形内部旋转（就是说所有圆外接的矩形都是全等的正方形，图 1.7）也有这样的凸集它们可以在一固定的等边三角形内旋转，这相当于说，所有圆外接於集的等边三角形都是全等三角形，这些集统々被叫做三角形集，例如，图 1.8 中的阴暗的纺锤形是一三角形集，一三角形的每一平行集，仍是一三角形集。

因为从一等边三角形的一内点到边的距离之和，等于三角形的高 h，故知一三角形集的支柱函数，满足条件 $p(\phi)+p(\phi+2\pi/3)+p(\phi+4\pi/3)=h$，从这个等式，及（1.6），则得知内接于高

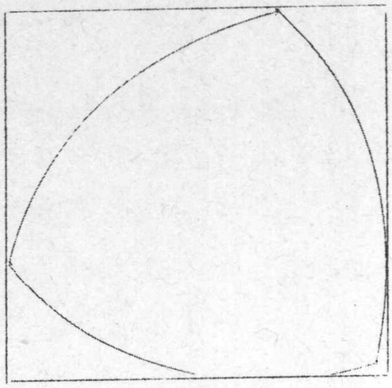

图 1·7

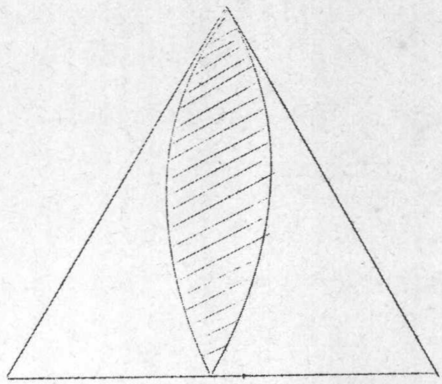

图 1·8

为h的等边三角形内的三角形集的周长是 $L=(2\pi/3)h$

第二章　平面上的点集与Poisson过程

1、点集的密度：

命x，y为平面内的矩形卡的迪坐标；在积分几何与几何概率的理论中，一个点集X的测度是被定义做在一微分式$\omega = f(x,y)dx\wedge dy$的集上的积分（例如，这积分在Lebesgue意义下是存在的话），这里函数$f(x,y)$是按照下面法则而被选取的：测度$m(X)$在平面内的运动群之下，必须是不变的。

在全个书中，我们将采用外微积的记号与法则，这些可以在任何近代微积分或微分几何的书中找到（例如Fleming (204)，Flanders (201, 202)，Loomis与Sternberg (368)及H. Cartan (91)这些书）。

命$\mathfrak{M}$为平面上的运动群，对于直角卡的迪坐标系，运动$u\in\mathfrak{M}$的方程是

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a,\quad y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b \quad (2.1)$$

这里(a, b)为平移的分量而α为u的旋转角。

我们要寻求一函数$f(x, y)$使得测度$m(X) = \int_X f(x,y)dx\wedge dy$在$\mathfrak{M}$之下，对于任意的$X$都是不变的，若$X' = uX$是$X$经过运动$u$之后的变式，应用$dx\wedge dy = dx'\wedge dy'$，我们有

$$m(X') = \int_{X'} f(x',y')dx'\wedge dy' = \int_X f(x',y')dx\wedge dy$$

而条件$m(X) = m(X')$对任何的X成立给出$f(x',y') = f(x,y)$对一切对应的点$(x,y)\longrightarrow(x',y')$的对偶，因为任何的点$x, y$都可以用一运动变至任何其它的点$x', y'$（就是运动群对于点来的是传递的），我们有$f(x,y) =$常数，这给出下面的定义

平面上一个点集$\{P(x,y)\}$的测度被定义做在微分式

$$dP = dx\wedge dy \quad (2.3)$$

的集上的积分，这叫做点的密度。

除去常数因子不计外，这个密度显然是唯一的，并在运动之下不变。同理，对于n重点P_1，P_2……P_n的集，假设是独立的，我们叙述如下的定义：

n重点$P_i(x_i, y_i)$，$i=1, 2, \cdots n$，它们互相独立，对于这n重点的集，其密度是

$$dp_1 \wedge dp_2 \wedge \cdots \wedge dp_n \tag{2.4}$$

这里$dp_i = dx_i \wedge dy_i$　除去一常数因子不计外，这个密度是唯一的。

密度(2.3)与(2.4)恒取其绝对值。

如果诸点P在关于卡的迪坐标系x，y下是由方程$x=h(\xi, \eta)$，$y=g(\xi, \eta)$给出的，则点密度取形式$dp = dx \wedge dy = |J| \cdot d\xi \wedge d\eta$，这里$J$是Jacobian行列式$J = h_\xi g_\eta - h_\eta g_\xi$。

一旦我们定义了点的集与n重点的集的密度，则一"随机"元素（点或n重点）在集Y内（当它已知是在集X，$Y \subset X$，之内时）的概率被定义为测度之商，

$$p = \frac{m(Y)}{m(X)} \tag{2.5}$$

以后我们将需要的关于几何概率的初步概念可以在Deltheil (144)的书，M.G.Kendall与P.A.P Moran (335)的书以及M.J Stoka与R.Theodorescu (654)的书中找到。关于公理化的作法，请参看Hadwiger的工作(275)或Rényi的工作(501, 503)。

2、初步积分公式

我们将按Crofton (132, 133)与Lebesgue (357)的方式给出一个例子，说明经过密度$dp = dx \wedge dy$在各个不同的坐标系中的简单计算，给出某些有关平面内凸集的显著的积分公式。

命K_1，K_2为两个有界的凸集，它们的关于点O_1，O_2的支柱直线与相应的凸集，仅有一点公共，命$\tau_i = \phi_i + \pi/2\ (i=1, 2)$为支柱直线的方向，它们垂直于方向$\phi_i$（图2.1）