普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

主编　杨松华　黄玉勤　安学庆

上册

郑州大学出版社

普通高等教育“十二五

高等数学

GAODENG SHUXUE

主编　杨松华　黄玉勤　安学庆

上册

郑州大学出版社
郑　州

内容提要

本书是根据教育部高等学校数学基础课程教学指导委员会制定的《本科数学基础课程教学基本要求》,编者多年的高等数学教学经验而编写的“高等院校规划教材”.

全书共十一章,分为上、下两册,本书为上册,主要内容有函数、极限与连续,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分及其应用和常微分方程.书末还附有各章节的习题答案与提示.

本书可以作为高等院校非数学类专业本科生的高等数学课程教材,也可作为教师及工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/杨松华,黄玉勤,安学庆主编.—郑州:郑州大学出版社,2012.8
ISBN 978-7-5645-0919-4

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①杨…②黄…③安…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 123033 号

郑州大学出版社出版发行
郑州市大学路 40 号　　邮政编码:450052
出版人:王　锋　　发行部电话:0371-66966070
全国新华书店经销
河南写意印刷包装有限公司印制
开本:787 mm×1 092 mm　1/16
印张:18
字数:429 千字
版次:2012 年 8 月第 1 版　　印次:2012 年 8 月第 1 次印刷

书号:ISBN 978-7-5645-0919-4　　定价:30.00 元

作者名单

主　编　杨松华　黄玉勤　安学庆

副主编　陆宜清　李俊强　刘其佳

编　委　（以姓氏笔画为序）

尹　红　刘其佳　齐祥来

安学庆　李　镇　李俊强

杨松华　陆宜清　黄玉勤

前 言

微积分是近代数学最伟大的成就.由于它在各个领域的广泛应用,以微积分为主要内容的高等数学成为高等教育阶段最重要的基础课程之一.它不仅为后续课程和科技工作提供了必备的数学工具,而且对学生科学素质的形成和分析、解决问题能力的培养产生了重要而深远的影响.但是多年来,在高等数学的教学中,存在着偏重向学生传授微积分的概念、理论、运算规则和技巧,而忽略微积分的数学思想、方法及其与实际紧密联系的现象,不够注重该课程在学生素质的提高与能力的培养方面的积极作用.

为满足21世纪我国高等教育大力发展的需要,我们根据教育部高等学校数学基础课程教学指导委员会制定的《本科数学基础课程教学基本要求》,在高等院校数学教师多年教学改革实践的基础上,研究、剖析、对比国内外一批教材和资料,组织具有高等数学教学经验的老师,经过反复研讨,集体编写了这本教材.本教材是参编者集思广益和通力合作的成果,以"联系实际,注重应用,淡化理论,提高素质"为特色,充分体现了"厚基础,强应用"的编写原则.在内容编排上,紧密衔接初等数学,从特殊到一般,从具体到抽象,注重概念、定理的几何意义、物理意义和实际背景的诠释,深入浅出,论证简明,易于教,便于学.归纳起来,本教材有以下特点:

1. 从实际问题出发,引入数学概念和理论,让学生体会到微积分来源于实际,又能指导实际.在教材中,我们尽量从不同角度给出实际例子,并加入简单的数学模型,让学生初步体会到微积分与现实世界中的客观现象是有着密切联系的.

2. 合理调整和安排教材中的概念与理论、方法与技巧和应用与实践这三部分内容,加强从几何和数值方面对数学概念的分析,从多方面培养学生的理性思维;增加用表格和图形表示的函数及其运算的介绍,注意克服偏重分析运算和运算技巧的倾向;加强实践环节,重视应用能力的培养.

3. 重视微积分的各部分内容的应用,从导数到积分,再到微分方程,均给出了较多的应用实例,并尝试将数学建模的思想融入其中.

4. 在习题中,适当加大应用问题的比例,以便学生能尝试利用所学微积分知识来分析和解决一些简单的实际问题,提高学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力.

5. 注重运用基本理论和基本方法去分析解决实际问题的数学思想方法的讲

解，拓宽了应用的领域，增强了应用的趣味性.

6. 注意“简易性”，尽量做到通俗易懂，由浅入深，富于启发，便于自学.

总之，本教材力求恰当地处理归纳与演绎、数学发现与知识传授、理论分析与实际应用能力培养之间的关系，以提高学生的综合分析能力和创新能力. 本教材在整体框架上保持了传统微积分的基本内容和结构，在具体内容中融入了编者在高等数学课程改革方面的一些思考与探索，同时也反映了高等数学课程的特色和定位.

本教材内容覆盖面比较广，教师可根据不同专业特点进行取舍. 参考教学时数为 160 ~ 180 学时，带有“ * ”的小节或内容在教学中可视实际情况选用.

本教材分为上、下两册. 上册内容为一元函数微积分和微分方程，下册内容为空间解析几何、多元函数微积分和无穷级数. 各册书末均附有习题答案与提示.

本教材上册由杨松华、黄玉勤、安学庆任主编，陆宜清、李俊强、刘其佳任副主编. 下册由安学庆、黄玉勤、杨松华任主编，齐祥来、尹红、李镇任副主编.

本教材在组织编写和出版过程中，得到了有关高校的领导和相关专家的大力支持和帮助，尤其是国家级名师郑州大学数学系李梦如教授，在百忙之中对本教材作了认真细致的审稿，并提出了宝贵的意见和建议. 他们为本教材的出版付出了辛勤的劳动，在此我们表示诚挚的谢意！

限于编者水平，同时编写时间也比较仓促，因而教材中一定存在不妥之处，敬请专家、同行和广大读者提出宝贵意见并批评指正.

编者

2012 年 3 月

目 录

第 1 章　函数、极限与连续

函数是一种重要的数学工具之一，是高等数学的主要研究对象；极限概念是高等数学中最重要的概念之一，用以描述变量的变化趋势；连续是函数的一个重要性态. 本章我们将介绍函数、极限及连续的基本概念，函数极限的运算以及连续函数的一些性质，这些知识是高等数学的基础.

1.1　函数及其图象

1.1.1　函数的概念

1.1.1.1　函数的概念

本节介绍函数的基本概念、图象及表示方法，重点讲述我们在微积分的学习中将会遇到的若干重要函数.

定义 1　若 X 和 Y 都是实数集合，则两实数集合之间的映射 $f:X \to Y$ 称为函数.

函数是两个实数集合之间的一种对应法则. 我们先看两个例子.

例 1　空调普快列车的票价与里程之间的关系如表 1.1 所示（截取其中的一部分）.

表 1.1　空调普快列车票价表

里程	…	81 ~ 90	91 ~ 100	101 ~ 110	111 ~ 120	121 ~ 130	131 ~ 140	141 ~ 150	…
票价	…	12	13	14	16	17	18	20	…

从上表可以看出里程和票价之间存在着确定的对应法则. 每给出一个里程，通过上表都可以找到唯一的一个票价与其对应，这一表格反映了空调普快列车票价与里程之间的对应法则.

例 2　某气象观测站的气温自动记录仪，记录了某一昼夜气温 T 与时间 t 之间的变化

曲线,如图 1.1 所示.

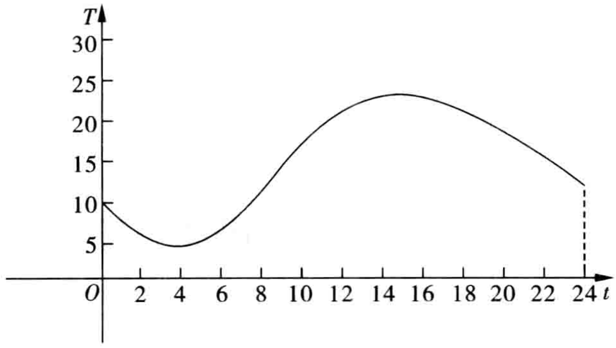

图 1.1

由上图可知,对于该昼夜内的每一时刻 t ,都有唯一确定的温度 T 与之对应,这个图象反映了该昼夜中温度与时间变化之间的对应法则.

瑞士数学家欧拉(Euler,1707—1783)在 1734 年首次用符号 $y=f(x)$ 表示函数,习惯上常说 y 是 x 的函数. x 称为自变量,y 称为因变量,数集 X 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域.

当 x 在 X 中取某一定值 x_0 时,与其对应的 y 的值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的函数值,记作 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$. 当 x 取遍 X 中的所有值时,与之对应的所有函数值的全体组成的集合称为函数的值域. 即 $M=\{y|y=f(x),x\in X\}$,$M\subseteq Y$.

根据函数的定义,例 1 中空调普快列车票价是里程的函数,例 2 中气温是时间的函数.

对于函数的概念,应注意以下几点:

(1)函数的概念中包含三个要素,即定义域、值域和对应法则,但是,确定函数的关键要素是定义域和对应法则. 因此,对于两个函数来说,当且仅当它们的定义域和对应法则都相同时,这两个函数才是同一个函数,与自变量及因变量用什么字母表示没有关系.

(2)关于函数定义域的确定可分为两种情况,对于实际问题,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的,如例 1、例 2;对于未标明实际意义的函数,其定义域一般是指使函数表达式有意义的自变量的取值范围,例如,函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是 $[-1,1]$.

(3)我们给出的函数定义只有一个自变量,因此称为一元函数,并且对于自变量 x 在定义域内的每一个值,因变量 y 总有唯一确定的值与其对应,这样的函数称为单值函数. 以后,在没有特别说明的情况下,我们讨论的函数均为单值函数.

(4)函数的表示方法常用的有三种,即:解析法、表格法(例 1)和图象法(例 2).

例 3 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$;　　　　(2) $y=\sqrt{2-x}+\log_2(x-1)$.

解 (1)要使函数表达式有意义,分母不能为零. 令 $x^2-3x-4=0$,得 $x_1=-1$,$x_2=4$,所以,函数的定义域为

$$D=(-\infty,-1)\cup(-1,4)\cup(4,+\infty).$$

(2) 要使函数表达式有意义，x 必须满足 $\begin{cases}2-x\geqslant 0,\\ x-1>0,\end{cases}$

解得 $1<x\leqslant 2$，所以，函数的定义域为 $D=(1,2]$.

例 4　下列各对函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\ln x^2, g(x)=2\ln x$；

(2) $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}, g(x)=\sin x$；

(3) $f(x)=\sqrt{(x-1)^2}, g(x)=|x-1|$.

解　(1) 不相同. 因为函数的定义域不同，前者的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而后者的定义域是 $(0,+\infty)$.

(2) 不相同. 因为函数的对应法则不同，$f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|\neq g(x)$.

(3) 相同. 因为函数的定义域和对应法则均相同.

下面我们介绍几个今后要用到的函数.

例 5　符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

例 6　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

借助符号函数 $\operatorname{sgn} x$，绝对值函数可表示为 $y=|x|=x\operatorname{sgn} x$.

例 7　取整函数

$$y=[x].$$

其中，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

例 8　狄利克雷(Dirichlet)函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

从上述几个例子中看到，有时一个函数要用多个不同的数学式子表示. 这种在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同数学式子来表示的函数，通常称为分段函数.

分段函数不仅与函数定义不矛盾，而且有其重要的现实意义. 在自然科学、工程技术以及日常生活中，经常会遇到分段函数的情形.

1.1.1.2　函数的图象

用图象表示函数，使我们有可能借助于几何图形形象直观地研究事物的变化过程，这对于理解高等数学中的概念、方法和结论是十分重要的.

设函数 $y=f(x)$，数集 X 是它的定义域.

在平面上建立一个直角坐标系，用横轴上的点表示自变量 x 的值，用纵轴上的点表示

函数值 y，这样，在 X 内的每一个 x 及相应的函数值 $f(x)$ 就确定了该平面直角坐标系中的一个点 $(x,f(x))$，当 x 在 X 内变化时，点 $(x,f(x))$ 在平面直角坐标系中也随之变化，称平面直角坐标系上的点集 $\{(x,y)\mid x\in X, y=f(x)\}$ 是函数 $y=f(x)$ 的图象，如图 1.2.

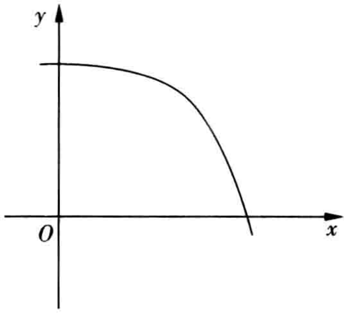

图 1.2

我们可以很容易地作出符号函数及绝对值函数的图象，分别如图 1.3 及图 1.4 所示.

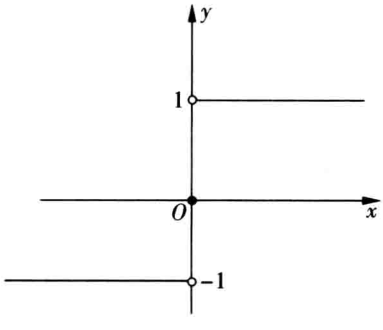

图 1.3

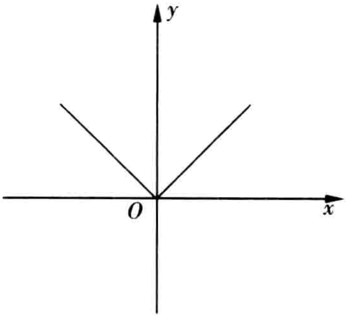

图 1.4

读者可以试着作出取整函数的图象. 需要指出的是，并不是所有的函数都可以用几何图形表示出来，例如狄利克雷函数.

1.1.2　函数的几种特性

1.1.2.1　有界性

定义 2　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在一个常数 K_1，使得对于每一个 $x\in I$，都有 $f(x)\leqslant K_1$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有上界；如果存在一个常数 K_2，使得对于每一个 $x\in I$，都有 $f(x)\geqslant K_2$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有下界. 如果存在一个常数 $M>0$，使得对于每一个 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界，否则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

例如，$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的；$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内是无界的；$y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有下界而无上界.

注意　(1)定义2中的区间I不一定是函数的定义域,一般来讲是函数定义域的一个子集. 若函数$f(x)$在定义域内有界,则称函数为有界函数,否则称为无界函数.

(2)有的函数在它的定义域上无界,但在定义域的某个区间上有界,例如,函数$y=\dfrac{1}{x}$在其定义域上无界,但它在区间(1,2)内是有界的. 因此,以后谈到函数的有界性时,要注意上下文所示的自变量的范围.

从几何图形上看,若函数$f(x)$在区间I上的图象介于与x轴平行的两条直线之间,那么函数在区间I上一定有界(如图1.5);反之,若找不到两条与x轴平行的直线使得函数$f(x)$在I上的图象介于它们之间,那么函数在区间I上一定无界(如图1.6).

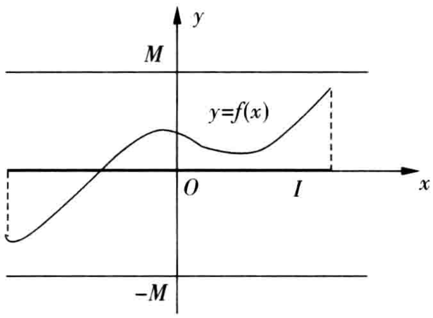

图1.5

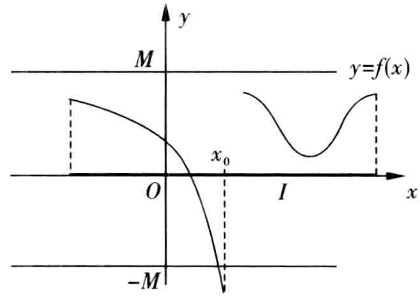

图1.6

1.1.2.2　**单调性**

定义3　设函数$f(x)$在区间I上有定义,任取$x_1, x_2 \in I$,当$x_1 < x_2$时,若恒有$f(x_1) < f(x_2)$,则称函数$f(x)$在I上是单调增加的;若恒有$f(x_1) > f(x_2)$,则称函数$f(x)$在I上是单调减少的. 区间I叫做函数的单调区间. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

从几何直观上看,单调增加的函数其图象是自左向右上升的(如图1.7),单调减少的函数其图象是自左向右下降的(如图1.8).

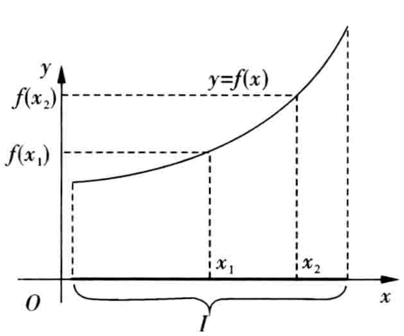

图1.7

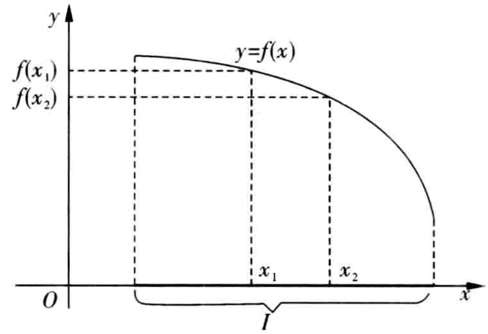

图1.8

同样的,定义3中的区间是函数定义域的一个子集. 若函数$f(x)$在定义域内单调,则

称函数为单调函数,例如,$y=x$ 在$(-\infty,+\infty)$内单调增加,$y=-x$ 在$(-\infty,+\infty)$内单调减少.有的函数在定义域的某个区域上单调,但在整个定义域内未必单调,例如,函数 $y=x^2$ 在$(0,+\infty)$内单调递增,在$(-\infty,0)$内单调递减,但在定义域内不是单调函数.由此可见,函数的单调性还往往与一定的区间相关联.

1.1.2.3 奇偶性

定义 4 设$f(x)$是一给定的函数,其定义域 D 是关于原点对称的区间,如果对于每一个 $x\in D$,都有$f(-x)=-f(x)$成立,则称函数$f(x)$为奇函数.如果对于每一个 $x\in D$,都有$f(-x)=f(x)$成立,则称函数$f(x)$为偶函数.不是奇函数也不是偶函数的函数,称为非奇非偶函数.

例如,$y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是奇函数;$y=\sqrt{1-x^2}$ 在$[-1,1]$上是偶函数;而 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 在$(-1,1)$上是非奇非偶函数.

从几何图形上看,奇函数的图象关于原点对称(如图 1.9),偶函数的图象关于 y 轴对称(如图 1.10).

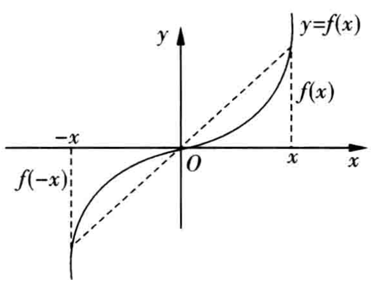

图 1.9

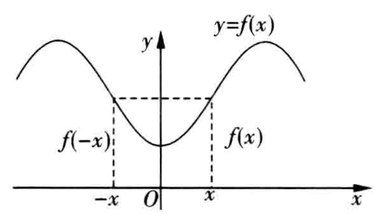

图 1.10

1.1.2.4 周期性

定义 5 对于给定的函数$f(x)$,若存在非零常数 T,使得对于其定义域 D 内的任一 x,都有 $x+T\in D$,$x-T\in D$,且$f(x+T)=f(x)$成立,则称函数$f(x)$为周期函数,T 为$f(x)$的周期.

若 T 是函数$f(x)$的周期,则 $\pm nT(n\in\mathbf{Z}^+)$也是$f(x)$的周期.也就是说,周期函数的周期不止一个.通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如,函数 $\sin x$,$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数;函数 $\tan x$,$\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数;函数 $y=x-[x]$ 的周期为 1.

例 9 设函数$f(x)$是以 T 为周期的周期函数,试证明函数$f(ax+b)$是以 $\dfrac{T}{a}$ 为周期的周期函数,其中 a,b 为常数,且 $a>0$.

证明 因为$f(x)$是以 T 为周期的周期函数,所以$f\left[a\left(x+\dfrac{T}{a}\right)+b\right]=f(ax+b+T)=f(ax+b)$.

由周期函数的定义，$f(ax+b)$ 是以 $\dfrac{T}{a}$ 为周期的周期函数.　证毕

例 9 的结论是用来求函数周期的一个极为有用的公式，例如，$y=\sin(x-3)$ 是周期为 2π 的周期函数；$y=\tan\dfrac{x}{2}$ 是周期为 2π 的周期函数.

周期函数的图象可以通过其在一个周期上的图象延拓而得到(如图 1.11).

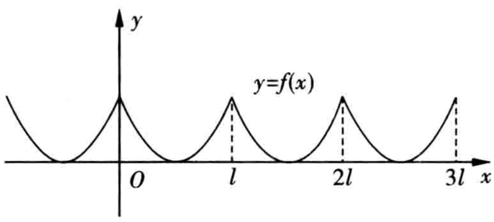

图 1.11

1.1.3　函数的运算

1.1.3.1　四则运算

若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域的交集为 D，则 $f(x)\pm g(x)$、$f(x)\cdot g(x)$ 以及 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$ 构成一个定义在 D 上的新函数.

例如，函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 是由函数 $y=x$ 和 $y=\dfrac{1}{x}$ 相加得到的，它的定义域是 $\{x \mid x\neq 0\}$.

1.1.3.2　反函数

在函数关系中，自变量与因变量的划分往往是相对的，从不同的角度看同一过程，自变量和因变量可能会互相转换.

例如，自由落体运动规律 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 中，t 是自变量，s 是因变量，由此可以算出经过时间 t 自由落体所下落的路程 s. 若已知落体下落的路程 s，求它所经过的时间 t，显然有 $t=\sqrt{\dfrac{2s}{g}}$，这时 s 是自变量，t 是 s 的函数. 这里称函数 $t=\sqrt{\dfrac{2s}{g}}$ 为函数 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 的反函数. 两个函数反映了同一过程中两个变量之间的对应关系，我们称它们是互为反函数.

定义 6　已知函数 $y=f(x)$，定义域为 D，值域为 M. 若对于每一个 $y\in M$，通过 $y=f(x)$ 总有唯一的一个 $x\in D$ 与之对应，则称由此所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数. 同时把 $y=f(x)$ 称为直接函数.

习惯上，用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此，常常将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$. $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数，例如，$y=\sqrt[3]{x+1}$ 与 $y=x^3-1$ 互为反函数.

注意　(1)并不是所有的函数都有反函数，严格单调的函数一定存在反函数，例如，