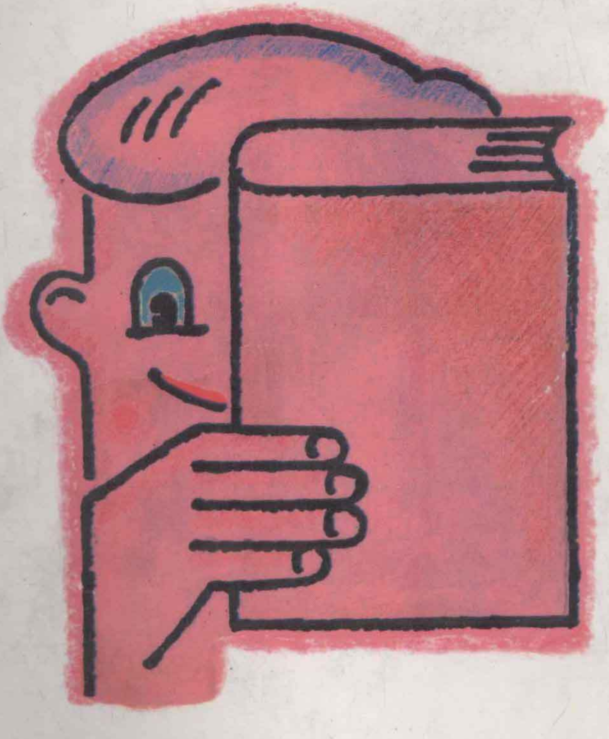
中学数学

高中解析几何



人民日报出版社

中学数学解题精典

平面解析几何

人民日报出版社

（京）新登字 103 号

责任编辑：任 敏
封面设计：罗雪村

中学数学解题精典
平面解析几何
烟学敏 刘玉翘 主编

人民日报出版社出版
北京市新华书店发行
北京科技印刷厂印刷
787×1092毫米 32开 29.375印张 1024千字
1993年3月第一版 1996年2月第三次印刷
印数：8501—15300册

ISBN 7-80002-565-9/G·150 定价：39.00 元

主　编　烟学敏　刘玉翘

副主编　余凤冈　王连笑　阚士刚

编　委(以下按姓氏笔划为序)

于大中	王培德	王连笑	王平梅
王毓筠	尹继民	刘玉翘	刘　勋
匡天椿	吕学林	余凤冈	李果民
李淑娟	张鼎言	张温慈	郁林生
郗昌盛	烟学敏	唐玉铎	高淑馨
徐学乾	梁汝芳	郭菊英	窦广生
阚士刚	蔡锡弟		

前　言

这套《中学数学解题精典》，是以现行中学数学教学大纲为依据，对涉及大纲中的必学内容按章、节顺序同步编纂的填补我国空白的一套大型工具书。是一大批特级、高级、一级教师多年心血的共同结晶。

为使广大中学、中专师生能够从中获益，这套大型工具书按内容分为初中代数、平面几何、高中代数(上、下)、三角、平面解析几何、立体几何共七卷。

这套大型工具书充分展现了以下几个特点：

类型全面：书中各单元均包括选择题、填空题、解答题等多种题型；

题目新颖：囊括了近十几年来国内外所见的各种最新题目；

筛选精心：在编纂过程中，精心研究了近些年全国各学校教学中和各类考试中所出现的各种题目，并从中精选出那些更具典型性、代表性、启发性的题目，使这套工具书成为当今中学数学优秀题目的精品库；

解法灵活：全书不少题给出一题多解，并注意点拨思路、启迪思维、揭示规律，使读者通过解题掌握方法和规律，从而不断提高自身的数学能力。

由于水平所限，虽经努力，但疏漏之处在所难免，欢迎读者批评指正。

编　者

1992年10月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook

目　录

第一章 直 线

〔知识要点〕

1. 规定了正方向的直线叫做有向直线.

2. 规定了起点和终点的线段叫做有向线段.

(1) 以 A 为起点,B 为终点的有向线段记作$\overline{AB}$,读做有向线段 AB;

(2) 有向线段$\overline{AB}$的长度,记为$|AB|$,其值为非负实数,与方向无关:

(3) 有向线段$\overline{AB}$的数量,记为 AB,读作有向线段$\overline{AB}$的数量,其值可取任意的实数,与方向有关:当$\overline{AB}$与其所在直线方向相同时,其数量等于其长度前面加上正号;

当$\overline{AB}$与其所在直线方向相反时,其数量等于其长度前面加上负号.

(4) 有向线段的数量公式

数轴上有向线段$\overline{AB}$的数量为

$$AB = x_2 - x_1$$

其中 x_1 为起点 A 的坐标,x_2 为终点 B 的坐标.

(5) 有向线段的长度公式

数轴上有向线段$\overline{AB}$的长度为

$$|AB| = |x_2 - x_1|$$

其中 x_1 为起点 A 的坐标,x_2 为终点 B 的坐标.

3. 平面上任意两点的距离公式

平面上两点 $P_1(x_1、y_1)$、$P_2(x_2、y_2)$ 的距离为

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

特别地

当直线 P_1P_2 与 x 轴平行时,$|P_1P_2| = |x_2 - x_1|$;

当直线 P_1P_2 与 y 轴平行时,$|P_1P_2| = |y_2 - y_1|$.

4. 线段的定比分点

有向线段$\overline{P_1P_2}$所在直线上的一点P，将有向线段$\overline{P_1P_2}$分成两条有向线段$\overline{P_1P}$和$\overline{PP_2}$的数量之比叫做点P分$\overline{P_1P_2}$所成的比，

记为 $\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}$.

点P叫做$\overline{P_1P_2}$的定比分点.

(1) 当P点在线段P_1P_2上时，点P叫做$\overline{P_1P_2}$的内分点，此时 $\lambda>0$；

(2) 当P点在线段P_1P_2的延长线或反向延长线上时，点P叫做$\overline{P_1P_2}$的外分点，此时$\lambda<0$，$(\lambda\neq-1)$.

5. 线段的定比分点公式

若$P_1(x_1、y_1)$、$P_2(x_2、y_2)$，点$P(x_1y)$分$\overline{P_1P_2}$的比为λ，则点P的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}(\lambda\neq-1).$$

6. 线段的中点公式

若$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$，点$P(x,y)$为线段$\overline{P_1P_2}$的中点，则中点P的坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

7. 直线的倾斜角

一条直线l向上的方向上与x轴正方向所成的最小正角，叫做这条直线的倾斜角.

特别地，当直线与x轴平行时，规定其倾斜角为$0°$.

直线倾斜角α的范围为 $0°\leqslant\alpha<180°$.

8. 直线的斜率

(1) 直线倾斜角的正切，叫做这条直线的斜率，记为k，即 $k=\mathrm{tg}\alpha$.

当$\alpha=90°$时，k不存在.

(2) 斜率公式

经过两点$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$的直线，当倾斜角不等于$90°$时，其斜率$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

9. 截距

设直线 l 与 x 轴交于 $(a,0)$ 点，与 y 轴交于 $(0,b)$ 点，则 a,b 分别为直线 l 在 x 轴和 y 轴上的截距.

10. 直线方程的几种形式

(1) 点斜式

直线 l 的斜率为 k，且经过点 $P_1(x_1,y_1)$，其方程为

$$y-y_1=k(x-x_1)$$

特别地　$k=0$ 时，方程为 $y=y_1$.

(2) 斜截式

直线 l 的斜率为 k，在 y 轴上的截距为 b，其方程为　$y=kx+b$.

(3) 两点式

直线 l 经过两点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$ 且 $x_1\neq x_2,y_1\neq y_2$，其方程为

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

特别地，　$y_1=y_2$ 时，方程为 $y=y_1$；

$x_1=x_2$ 时，方程为 $x=x_1$.

(4) 截距式

直线 l 在 x 轴和 y 轴上的截距分别为 a 和 $b(a\neq 0,b\neq 0)$，其方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

(5) 一般形式

把方程 $Ax+By+C=0$(A、B 不同时为 0)　叫做直线方程的一般形式.

当 $B\neq 0$ 时，可化为斜截式　$y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}$，　其中斜率为 $-\dfrac{A}{B}$，y 轴上截距为 $-\dfrac{C}{B}$；

当 $A\cdot B\cdot C\neq 0$ 时，可化截距式

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1,$$

其中直线在 x、y 轴上的截距分别为 $-\dfrac{C}{A}$ 和 $-\dfrac{C}{B}$.

11. 两条直线的平行、垂直、相交、重合.

(1) 有斜率不重合的两条直线

$$l_1: y = k_1x + b_1,$$
$$l_2: y = k_2x + b_2,$$

有

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$$
$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2}$$
$$l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 相交 } \Leftrightarrow k_1 \neq k_2.$$

(2)两条直线

$$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

有

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 = 0, B_1C_2 - B_2C_1 \neq 0$$
$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$
$$l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 相交 } \Leftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$$
$$l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 重合 } \Leftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 = 0, B_1C_2 - B_2C_1 = 0.$$

12. 两条直线的交点

两条直线

$$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

的交点坐标是由这两个方程所组成的方程组的解.

13. 两条直线所成的角

两条直线

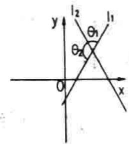
$$l_1: y = k_1x + b_1,$$
$$l_2: y = k_2x + b_2$$

相交

(1) 把直线 l_1 依逆时针方向旋转到与 l_2 重合时所转的角(如图 θ_1),叫做 l_1 到 l_2 的角.

把直线 l_2 依逆时针方向旋转到与 l_1 重合合时所转的角(如图 θ_2),叫做 l_2 到 l_1 的角.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook



有

$$\mathrm{tg}\theta_1=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2},$$

$$\mathrm{tg}\theta_2=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}.$$

(2) 两条直线相交构成四个角(两对对顶角)其中的锐角,叫做两条直线所成的角,简称夹角.

若 l_1 与 l_2 的夹角为 θ,

则

$$\mathrm{tg}\theta=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

(3) 若两条直线

$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$,

$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0(B_1\cdot B_2\neq 0, A_1A_2+B_1B_2\neq 0)$.

其夹角为 θ,有

$$\mathrm{tg}\theta=\left|\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\right|.$$

14. 点到直线的距离

平面上点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $l: Ax+By+C=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

当 $C>0$,点 P 与原点位于 l 同侧时

$$d=\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

点 P 与原点位于 l 的异侧时

$$d=-\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

当 $C<0$,点 P 与原点位于 l 同侧时

$$d=-\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

点 P 与原点位于 l 异侧时

$$d=\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

当C=0时,l过原点可在x轴或y轴先取一点作为参照点,仿上法比较即可.

15. 两条平行线 $Ax+By+C_1=0$ 和 $Ax+By+C_2=0$ 的距离是

$$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

16. 以 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$ 为顶点的三角形的面积是

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$ 的绝对值.

§1 有向线段、定比分点

选择题

1. 在坐标平面上,到两条坐标轴的距离均为4的点的个数为( )

(A) 1个. (B) 2个.

(C) 4个. (D) 无穷多个.

〔解〕 (C).

设满足条件的点的坐标为 (x,y),于是有

$$|x|=|y|=4.$$

解得 $x=\pm 4, y=\pm 4$.

故 满足条件的点是 $(4,4)$,$(-4,4)$,$(-4,-4)$,$(4,-4)$ 共有4个.

2. 已知点 $A(\cos\frac{\alpha}{2},\sin\frac{\alpha}{2})$,$B(\cos\alpha,\sin\alpha)$,则 $|AB|=$( )

(A) $2\sin\frac{\alpha}{4}$. (B) $-2\sin\frac{\alpha}{4}$.

(C) $\pm 2\sin\frac{\alpha}{4}$. (D) 以上都不对.

〔解〕 (C).

$$|AB|=\sqrt{\left(\cos\alpha-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\sin\alpha-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{2-2\left(\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$=\sqrt{2\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$=\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{4}}$$

$$=2\left|\sin\frac{\alpha}{4}\right|$$

$$=\pm 2\sin\frac{\alpha}{4}$$

3. A点在第 I 象限$\angle xoy$的平分线上,点$B(5,4)$到A点的距离为5,则A点的坐标是( )

(A) (8,8). (B) (1,1).

(C) (8,8)或(1,1). (D) 以上都不对.

〔**解**〕 (C).

设A点的坐为(x,x),则由题意$|AB|=5$,

得

$$\sqrt{(x-5)^2+(x-4)^2}=5$$

整理后,得

$$x^2-9x+8=0,$$

∴ $x_1=1, x_2=8$.

∴ A点坐标为(1,1)或(8,8).

4. 点M在y轴上,到点$(4,-2)$及$(1,4)$的距离相等,则点M的坐标是( )

(A) $\left(0,\frac{1}{4}\right)$. (B) $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$.

(C) $\left(0,\frac{1}{2}\right)$. (D) $\left(0,-\frac{1}{4}\right)$.

〔**解**〕 (D).

设点M的坐标为$(0,y)$,由题意,得

$$\sqrt{4^2+(y+2)^2}=\sqrt{1+(y-4)^2}$$

$\therefore\quad 16+(y+2)^2=1+(y-4)^2$

解得 $y=-\frac{1}{4}$.

$\therefore$ 点 M 的坐标是$(0,-\frac{1}{4})$.

5. 已知$\triangle ABC$的三个顶点$A(-3,4)$、$B(3,-4)$、$C(1,7)$，则$\triangle ABC$的形状是( ).

(A) 等边三角形 . (B) 直角三角形.

(C) 等腰三角形 . (D) 等腰直角三角形.

〔解〕 (B).

$\because\quad |AB|=\sqrt{(3+3)^2+(-4-4)^2}=\sqrt{100}=10,$

$|AC|=\sqrt{(1+3)^2+(7-4)^2}=\sqrt{25}=5,$

$|BC|=\sqrt{(3-1)^2+(7+4)^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}.$

$\therefore\quad |AB|^2+|AC|^2=|BC|^2.$

由勾股定理的逆定理，$\triangle ABC$ 为直角三角形.

6. 平面上的三个点$L(2,2)$，$M(1,3)$，$N(7,k)$，如果$\angle MLN=\frac{\pi}{2}$，那么k的值为( )

(A) 6. (B) 7. (C) 9. (D) 不存在.

〔解一〕 (B).

在$\triangle LMN$中，由于$\angle MLN=\frac{\pi}{2}$，于是$\triangle LMN$为直角三角形.

根据勾股定理，存在

$$|ML|^2+|NL|^2=|MN|^2.(*)$$

使用两点间的距离公式计算，得

$$|ML|^2=(1-2)^2+(3-2)^2=2,$$
$$|NL|^2=(7-2)^2+(k-2)^2=25+(k-2)^2,$$
$$|MN|^2=(1-7)^2+(3-k)^2=36+(k-3)^2.$$

将上述三个式子代入(*)式，求出$k=7$.

〔解二〕 (B).

因为$\angle MLN=\frac{\pi}{2}$，所以直线ML与直线NL垂直，它们的斜率$k_{ML}\cdot k_{NL}=-1$.

而

$$k_{ML}=\frac{3-2}{1-2}=-1,$$

$$k_{NL}=\frac{k-2}{7-2}=\frac{k-2}{5}.$$

于是 $(-1)\cdot\frac{k-2}{5}=-1,$

解得 $k=7.$

7. 以 $A(2,7)$,$B(-4,2)$,$C(-1,-3)$ 为顶点的三角形,其内角为钝角的是(　)

(A) $\angle A$.　　(B) $\angle B$.

(C) $\angle C$.　　(D) 不存在.

〔解〕 (B).

先用两点间的距离公式计算 $\triangle ABC$ 的三条边的长,得

$$|AB|=\sqrt{(2+4)^2+(7-2)^2}=\sqrt{61},$$

$$|BC|=\sqrt{(-4+1)^2+(2+3)^2}=\sqrt{34},$$

$$|AC|=\sqrt{(2+1)^2+(7+3)^2}=\sqrt{109}.$$

根据余弦定理 得

$$\cos B=\frac{|AB|^2+|BC|^2-|AC|^2}{2|AB|\cdot|BC|}=\frac{61+34-109}{2\cdot\sqrt{61\times 34}}=-\frac{7}{\sqrt{2074}}<0$$

又因为 $\angle B$ 是三角形的一个内角,所以 $\angle B$ 为钝角.

8. $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(4,0)$、$B(0,4)$、$C(0,0)$,则 $\triangle ABC$ 的内切圆圆心的横坐标是(　)

(A) 2.　　(B) $4-2\sqrt{2}$.

(C) $2\sqrt{2}$.　　(D) $2+2\sqrt{2}$.

〔解一〕 (B)

如图,设 $\triangle ABC$ 内切圆的圆心 $O(x,y)$,半径为 r,

由题目条件,知 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

$\therefore \quad x = r = \dfrac{1}{2}(|AC| + |BC| - |AB|)$.

而 $\quad |AC| = |BC| = 4, \quad |AB| = 4\sqrt{2}$.

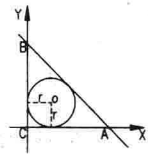
$\therefore \quad x = \dfrac{1}{2}(4 + 4 - 4\sqrt{2}) = 4 - 2\sqrt{2}$.

故 $\triangle ABC$ 内切圆圆心的横坐标为 $4 - 2\sqrt{2}$.

〔**解二**〕 (B). 设 $\triangle ABC$ 内切圆半径为 r,

由题目条件:知 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

于是 $\quad S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}|AC| \cdot |AB|$.



又 $\quad S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}r(|AC| + |BC| + |AB|)$.

$\therefore \quad r = \dfrac{|AC| \cdot |BC|}{|AC| + |BC| + |AB|}$.

而 $\quad |AC| = |BC| = 4, \quad |AB| = 4\sqrt{2}$,

$\therefore r = \dfrac{16}{8+4\sqrt{2}} = \dfrac{4}{2+\sqrt{2}}$

$= 4 - 2\sqrt{2}$.

又 $\because \quad x = r$

$\therefore \quad x = 4 - 2\sqrt{2}$

故 $\triangle ABC$ 的内切圆的圆心横坐标为 $4 - 2\sqrt{2}$.

9. 已知 A、B 两点的坐标分别为 $(m, -n)$、$(-m, n)$,C 点分 $\overline{AB}$ 所成的比为 -2,那么 C 点的坐标为

(A) $(-3m, 3n)$. (B) $(m, -n)$.

(C) $(3m, -3n)$. (D) $(-m, n)$.

〔**解**〕 (A).

设 C 点的坐标为 (x, y),

由于 C 分 $\overline{AB}$ 的比为 -2,

$$\therefore \quad x = \frac{m + (-2) \cdot (-m)}{1 - 2} = -3m,$$

$$y = \frac{-n + (-2)n}{1 - 2} = 3n \quad .$$

$\therefore \quad C$ 点坐标为 $(-3m, 3n)$.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook