普通高等院校数学类规划教材

应用概率统计

PROBABILITY AND STATISTICS WITH APPLICATIONS

大连理工大学城市学院基础教学部 组编

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

普通高等院校数学类规划教材

应用概率统计

PROBABILITY AND STATISTICS WITH APPLICATIONS

大连理工大学城市学院基础教学部　组编

主编　曹铁川

编者　（按编写章节先后排序）

王淑娟　张宇红　佟小华

肖厚国　孙晓坤

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

应用概率统计 / 大连理工大学城市学院基础教学部组编. — 大连 : 大连理工大学出版社，2013.2
ISBN 978-7-5611-7629-0

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①大… Ⅲ. ①概率统计—高等学校—教材 Ⅳ. ①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 025214 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号　邮政编码:116023
发行:0411-84708842　邮购:0411-84703636　传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn
大连印刷三厂印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm　　印张:12.5　　字数:277 千字
2013 年 2 月第 1 版　　2013 年 2 月第 1 次印刷

责任编辑:王　伟　　责任校对:李　慧
封面设计:熔点创意

ISBN 978-7-5611-7629-0　　定　价:28.00 元

前　言

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科，其内容丰富，实用性强.它广泛渗透于自然科学、技术科学、管理科学、社会科学及人文科学各领域，应用遍及工业、农业、经济、金融、保险、生物、医药、军事、气象、地质等国民经济各个部门。

该课程的重要性被许多科学大家所津津乐道。例如，被誉为“法国的牛顿”的著名数学家和天文学家拉普拉斯曾说过：“值得注意的是，概率论这门起源于机会游戏的科学，早就应该成为人类知识最重要的组成部分……对于大多数人来说，生活中那些最重要的问题，绝大部分恰恰是概率论问题。”英国著名的逻辑学家和经济学家杰文斯也对概率论大加赞美：“概率论是生活真正的领路人，如果没有对概率的某种估计，那么我们就寸步难行，无所作为。”

概率论与数理统计研究的是随机现象的数量规律性及其应用。一方面，它独特的理论和研究方法使人耳目一新；另一方面，学习该课程需要中学数学和微积分理论作支撑，加之各种新概念、新记号繁多，又使一些初学者颇感困惑。近年来，随着我国教育事业的发展，客观上也给教育工作者提出了新的研究课题，需要不断总结经验，探索规律，从教学理念、教学方法以及教材上适应新形势的要求。

《应用概率统计》是为普通高等院校，特别是应用型本科院校编写的教材。我们从本课程的特点出发，结合应用型人才培养的目标，分析了课程系统性、严密性与应用型人才需求的关系，对知识结构删繁就简，优化重组。编写原则是：立足应用型人才培养，使学生学到知识，形成能力，在学习中感受成功，享受快乐。在编写过程中，我们力求用通俗的语言和熟知的实例为背景，提炼出抽象难懂的概念，循序渐进地揭示研究方法，在保证知识体系完整的前提下，适当削弱理论深度。在例题和习题的配置上，注意示范性、多样性、趣味性。特别是在每一章的最后，都设有“应用实例阅读”一节，供学生课外阅读。通过阅读这些材料，既可以开阔眼界，活跃思想，加深对本章知识的理解，又可增强应用意识，提高应用能力。

《应用概率统计》涵盖了概率论与数理统计最基本的内容和方法。第 1～4 章是概率论部分，包括概率论的基本概念、随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征；第 5～7 章是数理统计部分，包括数理统计的基本概念、参数估计、假设检验等。

本书由大连理工大学城市学院基础教学部组织编写，曹铁川任主编并负责统稿，编者

有王淑娟(第 1 章)、张宇红(第 2 章、第 5 章)、佟小华(第 3 章)、肖厚国(第 4 章)、孙晓坤(第 6 章、第 7 章)。

本教材配有《应用概率统计学习指导》教学参考书。

大连理工大学数学科学学院冯敬海教授悉心阅读了书稿,并提出宝贵建议,在此表示感谢。

限于作者水平,不妥之处在所难免,期待读者和同行批评指正。

编　者

2013 年 2 月　于大连

目　录

第1章 概率论的基本概念

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科. 概率论的起源可以追溯到三四百年前对赌博问题的研究,那时欧洲许多国家贵族之间赌博之风盛行,掷骰子是他们常采用的一种赌博方式. 在掷骰子过程中,人们遇到了很多诸如"分赌本"等需要计算可能性大小的问题,并求教于数学家. 很多数学家参与其中,围绕赌博中的数学问题开始深入细致的研究,从而产生了概率论这一数学分支. 这一时期概率论主要用来计算各种古典概率.

随着18、19世纪科学的发展,人们注意到某些生物、物理和社会现象与机会游戏相似,从而由赌博起源的概率论被应用到这些领域中,同时也大大推动了概率论本身的发展. 特别是概率论的公理化方法的诞生,成为现代概率论的基础,使概率论成为严谨的数学分支. 现在,概率论以及与之伴随产生的数理统计,在自然科学、社会科学、工程技术、军事科学及国民经济的各个部门,几乎都可以找到它的应用,其应用前景广阔.

本章主要介绍概率论的基本知识以及一些简单应用,包括随机事件及事件之间的关系和运算、概率的定义、古典概型及几何概型、条件概率和全概率公式、事件的独立性与贝努利试验. 这些基本概念与基本知识是学习概率论的基础,对理解整个概率论的内容是至关重要的.

1.1 随机事件及其运算

现实世界千姿百态,精彩纷呈. 在科学研究和社会生活中会遇到多种多样的现象,有一类现象,在一定条件下必然会发生(或必然不发生). 例如,在标准大气压下,水加热到100℃就会沸腾;异性电荷相互吸引;向空中抛一物体必然会落回地面. 这类现象称为**确定性现象**. 同时,还存在另一类现象,在相同的条件下,可能会出现这样的结果,也可能会出现那样的结果. 例如,在相同条件下抛掷一枚硬币,其结果可能是正面向上,也可能是反面向上,并且每次抛掷之前无法肯定结果是什么;再如,同一门炮向同一目标射击,弹着点的位置不尽相同,并且在每次射击前无法预知弹着点的确切位置. 但是,如果多次重复抛掷同一枚硬币,那么正面向上的次数大致会有一半;同一门炮射击同一目标,弹着点的分布

也呈现某种规律.像这样在个别试验中,其结果呈现出不确定性,但是在大量重复试验中,其结果却呈现出某种规律性的现象,称为**随机现象**.

我们把随机现象的这种规律性称为**统计规律性**.科学的任务就在于,要从看起来错综复杂的偶然性中,揭示其潜在的必然性.概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门学科.

1.1.1 随机试验

为了研究随机现象的统计规律性,我们给出**随机试验**或**试验**的说法.这里的试验是一个很广泛的术语,它包括各种各样的科学试验,也包括对某些现象进行观测和记录等.下面给出几个试验的例子.

E_1:投掷一枚骰子,观察出现的点数.

E_2:将一枚硬币连续抛三次,观察出现正、反面的情况.

E_3:从一批产品中抽取 n 件,观察出现次品的数量.

E_4:从一批电视机中任意抽取一台,测试其寿命(单位:小时).

E_5:向一个直径为 50 cm 的圆形靶子射击,假设每次都能中靶,观察弹着点在靶子上的位置.

E_6:在城市的某一交通路口,观测在指定的一小时内汽车的流量.

上述这些试验都具有一些共同特征:试验前,每个试验的所有可能结果都是可以确定的,但每次试验究竟会发生什么样的结果是事先无法预知的.例如,掷骰子前,就知道骰子的点数为 1,2,3,4,5,6,但每次投掷之前并不知道会出现哪个点数;从一批产品中抽取的 n 件产品中,含有的次品数可能是 $0,1,2,\cdots,n$,但没法预知到底会出现几件次品.

定义 1-1 满足下面三个条件的试验,称为**随机试验**:

(1)试验可以在相同条件下重复进行;

(2)每次试验的可能结果不止一个,但事先能知道试验的所有可能结果;

(3)每次试验前不能确定哪一个结果会出现.

前面所列举的试验都属于随机试验.随机试验一般用字母 E 表示.

1.1.2 样本空间

尽管随机试验前并不能确定会出现哪一个结果,但试验的所有可能结果却是已知的.

定义 1-2 随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为**样本空间**,记作 Ω.样本空间的元素,即 E 的每个结果,称为**样本点**.

【例 1-1】 写出上述随机试验 $E_k(k=1,2,3,4,5,6)$对应的样本空间 Ω_k.

解 $\Omega_1=\{1,2,3,4,5,6\}$;

$\Omega_2=\{$(正,正,正),(正,正,反),(正,反,正),(正,反,反),(反,正,正),(反,正,反),(反,反,正),(反,反,反)$\}$;

$\Omega_3=\{0,1,2,\cdots,n\}$;

$\Omega_4=\{t \mid t\geqslant 0\}$;

$\Omega_5=\{(x,y)\mid x^2+y^2<25^2\}$；

$\Omega_6=\{0,1,2,\cdots\}$.

需要注意的是，同一个随机试验，试验目的不同，样本空间也可以不同. 例如，投掷两枚骰子，观察可能出现的点数，其样本空间为$\{(i,j)\mid i,j=1,2,3,4,5,6\}$. 而投掷两枚骰子，观察出现的点数之和，此时样本空间则是$\{2,3,\cdots,12\}$.

1.1.3　随机事件

在进行随机试验时，我们关注的常常是满足某些条件的样本点所构成的集合. 例如对一批产品进行检验时，规定若次品率$\leqslant 2\%$，则这批产品为合格品，当我们在这批产品中随机抽取100件，我们所关注的是其次品数是否$\leqslant 2$，满足这一条件的样本点构成的集合$A=\{0,1,2\}$显然为该随机试验所对应样本空间的一个子集.

定义1-3　一般地，我们称随机试验E的样本空间Ω的子集为**随机事件**，简称事件，一般用$A,B,C,\cdots$表示.

当且仅当随机事件中的一个样本点出现时，我们称事件发生了.

特殊地，由一个样本点所构成的单点集，称为**基本事件**. 样本空间Ω包含所有的样本点，在一次随机试验中必然发生，称为**必然事件**. 空集$\varnothing$作为样本空间Ω的一个子集，也是一个事件，$\varnothing$不包含任何样本点，在每次试验中都不会发生，称为**不可能事件**.

例如，在试验E_1中考虑事件$A=\{$出现奇数点$\}$，则$A=\{1,3,5\}$. 事件$B=\{$点数大于$7\}$，显然B为不可能事件.

1.1.4　事件之间的关系与运算

实际问题中遇到的随机事件往往是比较复杂的，这就需要我们能将较复杂的事件"分解"成一些简单事件的组合. 由前面的定义，样本空间可以看作全集，事件是其子集，因此就可以用集合之间的关系和运算来描述事件之间的关系和运算.

1. 包含关系

若事件A的每一个样本点都包含在事件B中，则称事件B包含事件A，记为$A\subset B$或$B\supset A$(图1-1). 这时，若事件A发生必导致事件B发生.

若$A\subset B$且$B\subset A$，则称事件A与B相等，记为$A=B$.

2. 和事件

至少属于事件A与B二者之一的样本点的全体称为A与B的**和事件**，记作$A\cup B$(图1-2). 事件$A\cup B$发生表示事件A与事件B至少有一个发生.

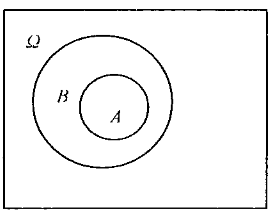

图1-1

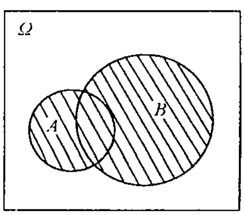

图1-2

3. 积事件

同时属于事件 A 与 B 的样本点的全体称为事件 A 与 B 的**积事件**，记作 $A\cap B$ 或 AB（图 1-3）. 事件 $A\cap B$ 发生表示事件 A 与事件 B 同时发生.

4. 差事件

属于事件 A 而不属于事件 B 的样本点的全体称为 A 与 B 的**差事件**，记作 $A-B$（图 1-4）. 事件 $A-B$ 发生表示事件 A 发生，而事件 B 不发生.

易知，$A-B=A\cap\overline{B}=A\overline{B}$.

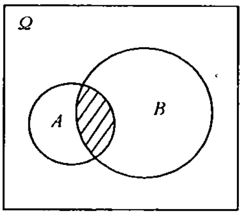

图 1-3

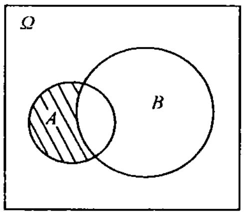

图 1-4

5. 对立事件

样本空间 Ω 与随机事件 A 的差事件，称为事件 A 的**对立事件**（也称为**逆事件**或**补事件**），记作$\overline{A}$（图 1-5）. 事件$\overline{A}$发生当且仅当 A 不发生.

易知，$A\cup\overline{A}=\Omega$，$\overline{\overline{A}}=A$，$\overline{\varnothing}=\Omega$，$\overline{\Omega}=\varnothing$.

6. 互不相容关系

若 $AB=\varnothing$，即事件 A 与 B 不能同时发生，则称事件 A 与 B 是**互不相容的**，也称为事件 A 与事件 B **互斥**（图 1-6）.

如果 A 与 B 互不相容，并不是说 A 与 B 之间没有关系，而是有非常密切的关系. 因为其中一个事件的发生会限制另一个事件的发生.

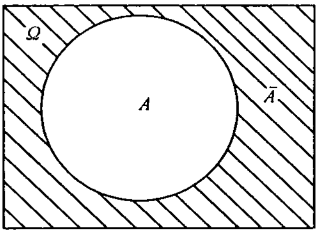

图 1-5

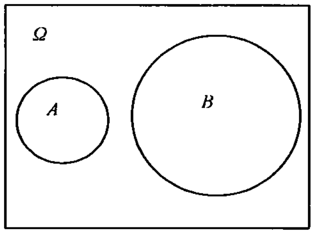

图 1-6

如同代数运算有其运算规则一样，事件之间的运算也遵循一定的规则. 设 A,B,C 为任意三个事件，则有：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

(3) 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

(4) 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

【例 1-2】 设有三个人各购买了一注福利彩票，以 A 表示“第一个人中奖”，B 表示“第二个人中奖”，C 表示“第三个人中奖”. 试用 A,B,C 表示下列事件：

(1) 至少有一个人中奖；

(2) 恰有一个人中奖；

(3) 至多有一个人中奖.

解　(1)$A\cup B\cup C$；

(2)恰有一个人中奖是指其中有一个人中奖而另外两个人没中奖，即

$$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C;$$

(3)至多有一个人中奖是指没有人中奖或恰有一个人中奖，即

$$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C}.$$

【例 1-3】　靶子由 10 个同心圆组成，半径分别为 $r_1,r_2,\cdots,r_{10}$，且 $r_1<r_2<\cdots<r_{10}$，以事件 A_k 表示命中点在半径为 r_k 的圆内，叙述下列事件的意义：

(1) $\bigcup\limits_{k=1}^{6}A_k$；(2) $\bigcap\limits_{k=1}^{8}A_k$；(3) $\overline{A}_1A_2$.

解　(1)命中点在半径为 r_6 的圆域内；

(2)命中点在半径为 r_1 的圆域内；

(3)命中点在内径为 r_1，外径为 r_2 的圆环域内.

1.2　事件的概率

数学是一门研究"数"与"形"的学科. 用数学的眼光看问题，往往首先需要对研究对象进行量化.

一个随机事件在试验中可能发生，也可能不发生，但我们常常需要知道一个事件在试验中发生的可能性到底有多大，因为事件发生的可能性大小，在现实中往往起到非常关键的作用. 例如，在寿险业务中，保险公司对身患重病的人一般不会给予保险，因为这些人死亡的可能性要远大于健康人群，也就是说，保险公司赔付的可能性就会很大；再如，一家生产出口产品的公司，其经营状况受人民币汇率的影响比较大，如果人民币升值的可能性很大，那么该公司的利润就会受到影响，严重时会造成公司破产.

在概率论中，事件 A 在随机试验 E 中出现的可能性的大小，是否也可以用数来度量呢？如果可以，我们就称这个用以描述事件 A 出现可能性大小的数为事件 A 发生的**概率**，记作 $P(A)$.

为给出概率的定义，首先引入频率，进而用"频率"来表征概率.

1.2.1　概率的统计定义

设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间，A 为 E 的一个事件. 在相同条件下，将试验重复进行 n 次，其中事件 A 发生了 n_A 次，则称比值$\frac{n_A}{n}$为 A 发生的**频率**，记作 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$. "频率"的大小反映了事件 A 在试验中发生的频繁程度.

例如，将"抛硬币"的随机试验重复进行 n 次，记 $A=\{$正面向上$\}$，事件 A 发生的次数

记作n_A，则事件A发生的频率为$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$. 当n较小时，频率$f_n(A)$在0与1之间随机波动，其幅度比较大，但随着n的增大，频率将呈现出稳定性. 一些著名的统计学家曾进行过大量抛掷硬币的试验，所得结果见表1-1.

表1-1　　掷均匀硬币的试验

试验者	试验次数	正面出现的次数	正面出现的频率
摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

以上试验结果表明，硬币正面出现的频率总在0.5附近波动，而逐渐稳定于0.5. 这个0.5就反映了出现正面可能性的大小，此时就将0.5称为事件A发生的概率，记作$P(A)=0.5$.

类似这样的例子还可以举很多. 大量试验证实，当重复试验的次数n逐渐增大时，频率$f_n(A)$将呈现出稳定性，并逐渐稳定于某个常数. 这个常数可以用来刻画随机事件A在试验中发生的可能性大小，我们称其为事件A发生的概率. 这里的"频率的稳定性"即通常所说的统计规律性，这种概率的定义方式称为概率的统计定义.

应该指出，随机事件的频率与进行的试验有关，而随机事件的概率是客观存在的.

概率的统计定义非常直观，实际中经常用频率作为概率的近似值，如一批产品的次品率、射手射击的命中率等.

下面介绍概率论发展初期关注的两类试验模型.

1.2.2　古典概型

古典概型是一类常见的随机现象，如掷骰子、掷硬币、抽扑克牌、抽签等都属于古典概型. 观察这些试验，发现它们有以下两个特征：(1)试验的所有可能结果只有有限个，即样本空间Ω只包含有限个基本事件，如"掷骰子"的试验中只含6个结果，即出现的点数为1,2,3,4,5,6；(2)每一个基本事件发生的可能性相同，如"抛硬币"试验中出现"正面"和出现"反面"的可能性都是0.5. 满足这些条件的试验称为**古典概型试验**. 根据古典概型的特点，可以定义随机事件A发生的概率.

定义1-4　若古典概型的样本空间Ω包含的基本事件总数为n，事件A包含的基本事件数为k，则事件A发生的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{\Omega\text{ 包含的基本事件总数}}=\frac{k}{n}.$$

古典概型是人们最早研究的概率题型，其最早用于解决赌博中出现的问题，古典概型也是概率论中最吸引人的一类题型. 计算古典概型的概率看似是一件简单的事情，只需要用事件A包含的基本事件个数，除以样本空间Ω包含的基本事件个数即可. 但在具体运

算中，古典概型却常常是最难的一类题型，需要熟悉基本的计数原理——加法原理和乘法原理，以及在此原理基础上建立的排列组合知识等.本书设有附录，对这些原理和相关知识进行了详细介绍，熟悉这些知识能够帮助我们解决比较复杂的古典概型问题.

【例 1-4】 从 0,1,2,…,9 十个数字中任取一个，求取得奇数的概率.

解 样本空间 Ω 所含基本事件的个数 $n=10$，记事件 $A=\{$取得奇数$\}$，A 所含基本事件的个数 $k=5$，于是取得奇数的概率 $P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

【例 1-5】 盒内有 10 只球，其中 6 只白球，4 只黑球，从中任取 2 只球.求：(1)取到 2 只白球的概率；(2)取到 2 只黑球的概率；(3)取到一黑一白的概率.

解 盒内共有 10 只球，从中任取 2 只球，所有可能的取法共有 $n=C_{10}^2=\frac{10\times 9}{2!}=45$ 种，每一种取法为一基本事件.

(1)记事件 $A_1=\{$取到 2 只白球$\}$，则 A_1 中所含基本事件的总数为 $k_1=C_6^2=\frac{6\times 5}{2!}=15$，于是

$$P(A_1)=\frac{k_1}{n}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}.$$

(2)记事件 $A_2=\{$取到 2 只黑球$\}$，则 A_2 中所含基本事件的总数为 $k_2=C_4^2=\frac{4\times 3}{2!}=6$，于是

$$P(A_2)=\frac{k_2}{n}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}.$$

(3)记事件 $A_3=\{$取到一黑一白$\}$，则 A_3 中所含基本事件的总数为 $k_3=C_4^1C_6^1=24$，于是

$$P(A_3)=\frac{k_3}{n}=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}.$$

【例 1-6】 设有 N 件产品，其中有 M 件正品，从中分别按(1)不放回，(2)有放回的抽取方式，任取 $n(n\leqslant N)$ 件，问在两种情况下恰有 $m(m\leqslant M)$ 件正品的概率各是多少？

解 设事件 A 表示“任取的 n 件产品中恰有 m 件正品”，则

(1)在不放回的抽取方式下，样本空间 Ω 中包含的基本事件总数为 C_N^n，A 中包含的基本事件数为 $C_M^mC_{N-M}^{n-m}$，故

$$P(A)=\frac{C_M^mC_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

(2)在有放回的抽取方式下，样本空间 Ω 中包含的基本事件的总数为 N^n，A 中包含的基本事件数为 $C_n^mM^m(N-M)^{n-m}$，故

$$P(A)=\frac{C_n^mM^m(N-M)^{n-m}}{N^n}=C_n^m\left(\frac{M}{N}\right)^m\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-m}.$$

【例 1-7】(分房问题)　n 个人等可能地被分配到 N 个房间($n\leqslant N$)，求下列事件发生的概率：(1)指定的 n 个房间各有一个人住；(2)恰好有 n 个房间各有一个人住.

分析 对每个人而言，可供其选择的房间都有 N 个，故样本空间中包含样本点的总

数为 $N\cdot N\cdot\cdots\cdot N=N^n$.

解 (1)由乘法原理,将指定的 n 个房间分配给 n 个人住,共有 $P_n^n=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1=n!$ 种不同的方法,则事件 $A=\{$指定的 n 个房间各有一个人住$\}$发生的概率 $P(A)=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1}{N^n}=\frac{n!}{N^n}$;

(2)此问题与第一个问题的区别在于需要先从 N 个房间中选出 n 个房间,其选法共有 C_N^n 种,于是事件 $B=\{$恰好有 n 个房间各有一个人住$\}$发生的概率 $P(B)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}$.

【例 1-8】(排队问题) 将 4 册一套的书随机地放在书架上,求下列事件发生的概率:(1)自左至右或自右至左恰好排成 1,2,3,4 册的顺序;(2)第 1 册恰好排在最左边或最右边;(3)第 1 册与第 2 册相邻;(4)第 1 册排在第 2 册左边(不一定相邻).

解 这 4 册书的排放方式共有 $4!=24$ 种.

(1)记 $A=\{$自左至右或自右至左恰好排成 1,2,3,4 册的顺序$\}$,这时 $A=\{(1,2,3,4),(4,3,2,1)\}$,即 A 包含两个基本事件,于是 $P(A)=\frac{2}{4!}=\frac{1}{12}$.

(2)记 $B=\{$第一册恰好排在最左边或最右边$\}$,则第 1 册的位置只有两种选择,而其余 3 册在三个剩余位置的排法共有 $3!$ 种,于是 $P(B)=\frac{2\cdot3!}{4!}=\frac{1}{2}$.

(3)记 $C=\{$第一册与第二册相邻$\}$,则可将第一册与第二册打成一捆,捆内排法为 2 种,这一捆与其余两册共有 $3!$ 种排法,于是 $P(C)=\frac{2\cdot3!}{4!}=\frac{1}{2}$.

(4)第 1 册排在第 2 册左边与右边的排法相等,各占了样本空间中样本点个数的一半,故事件{第 1 册排在第 2 册左边(不一定相邻)}发生的概率为 $\frac{1}{2}$.

【例 1-9】(抽签问题) 某超市举办有奖销售活动,共投放 n 张奖券,其中只有 1 张可以中奖.每位顾客可随机抽取一张,求第 k 位顾客中奖的概率($1\leqslant k\leqslant n$).

解 令事件 $A=\{$第 k 位顾客中奖$\}$.依问题的实际情况,抽奖券是不放回抽样,且与次序有关,所以样本点总数为

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-k+1).$$

事件 A 要求第 k 位顾客中奖,我们可以先将奖券“预留”给第 k 位顾客,其他 $k-1$ 位顾客任意抽取,那么 A 的样本点为

$$1\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-k+1),$$

所以

$$P(A)=\frac{1\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)}=\frac{1}{n}.$$

这一结果表明中奖与否同顾客出现的次序无关,也就是说抽奖券活动对每位参与者来说都是公平的.

1.2.3 几何概型

古典概型要求试验结果的个数是有限的,但在现实中存在这样一类问题:试验结果的

个数是无限的，但每个结果出现的可能性相等，这类问题尽管不属于古典概型，但处理方法与古典概型非常类似，通常称其为**几何概型**.

设有二维平面区域 Ω，区域 A 为 Ω 的一部分，向 Ω 上等可能地投掷一点，显然，该点落在区域 A 上的概率 p 可用下面公式计算：

$$p=\frac{\text{区域 } A \text{ 的面积}}{\text{区域}\Omega \text{ 的面积}}.$$

这一结论可以推广到一维数轴上和三维空间中.

在数轴上的区间 $[a,b]$ 上等可能地投掷一点，则该点落在其子区间 $[c,d]$ 内的概率 p 为

$$p=\frac{\text{区间}[c,d]\text{的长度}}{\text{区间}[a,b]\text{的长度}}=\frac{d-c}{b-a}.$$

在三维立体 Ω 内等可能地取一点，则该点属于 Ω 内的一个小立体 D 的概率 p 为

$$p=\frac{\text{立体 } D \text{ 的体积}}{\text{立体}\Omega \text{ 的体积}}.$$

【例 1-10】(会面问题)　两人定于 7 点到 8 点之间在某地会面，先到者等候另一人 20 分钟，过时就离去. 如果每人在指定的一小时内的任一时刻到达是等可能的，求两人能会面的概率.

解　设两人到达指定地点的时刻分别为 7 点 x 分和 7 点 y 分，则有 $0\leqslant x\leqslant 60, 0\leqslant y\leqslant 60$，两人能会面的充要条件为 $|x-y|\leqslant 20$，由此作图 1-7. 令 $A=\{$两人能够会面$\}$，则两人到达时间的一切可能结果落在边长为 60 的正方形内，两人能会面的时间如图中阴影部分所示. 于是

$$P(A)=\frac{\text{阴影 } A \text{ 的面积}}{\text{正方形}\Omega \text{ 的面积}}=\frac{60^2-40^2}{60^2}\approx 0.56.$$

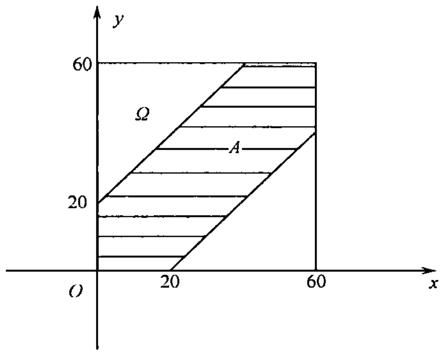

图 1-7

【例 1-11】　某公共汽车站从上午 7 时起，每隔 15 分钟来一趟车，一乘客在 7:00 到 7:30 之间随机到达该车站，求：(1)该乘客等候不到 5 分钟就上车的概率；(2)该乘客等候超过 10 分钟才上车的概率.

解　设该乘客到达车站的时刻为 7 点 T 分，则样本空间 $\Omega=\{T\,|\,0\leqslant T\leqslant 30\}$.

(1)令 $A=\{$乘客等候不到 5 分钟即上车$\}$，则

$$A=\{T\,|\,10\leqslant T\leqslant 15 \text{ 或 } 25\leqslant T\leqslant 30\},$$

于是

$$P(A)=\frac{A\text{ 的区间长度}}{\Omega\text{ 的区间长度}}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}.$$

(2)令 $B=\{$乘客等候超过 10 分钟才上车$\}$,则

$$B=\{T\mid 0\leqslant T\leqslant 5 \text{ 或 } 15\leqslant T\leqslant 20\},$$

于是

$$P(B)=\frac{B\text{ 的区间长度}}{\Omega\text{ 的区间长度}}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}.$$

【例 1-12】 随机地向矩形区域 $\Omega=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2},0\leqslant y\leqslant 1\right\}$内投掷一点,如果该点落在 Ω 内任一子区域的概率与其面积成正比,求该点落在曲线 $y=x^2$ 上方的概率.

解 设事件 $A=\{$随机点落在曲线 $y=x^2$ 上方$\}$."该点落在 Ω 内任一子区域的概率与其面积成正比",说明该试验满足几何概型特点.

矩形区域 Ω 的面积为$\frac{3}{2}$,事件 A 对应的区域为图 1-8 中的阴影部分,其面积为

$$\int_0^1(1-x^2)\mathrm{d}x=1-\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3},$$

所以

$$P(A)=\frac{2/3}{3/2}=\frac{4}{9}.$$

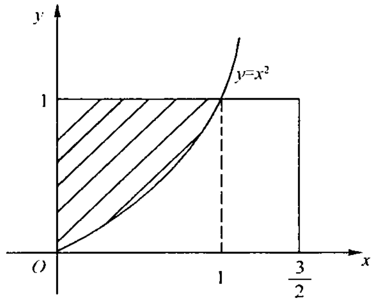

图 1-8

1.2.4 概率的公理化定义

概率的统计定义是建立在"频率的稳定性"基础上的,但是这种定义并没有提供确切计算概率的方法,因为我们不可能依据它确定任何一个事件的概率.在实际中,也不可能对每一个事件都做大量的试验,也不知道 n 选多大才行,况且也没有理由认为试验 $n+1$ 次计算出的频率,一定比进行 n 次试验计算出的频率更准确,更逼近所求的概率.也就是说,用频率来代替概率,具有不确定性,在理论上有严重缺陷.古典概型和几何概型又只能解决部分随机试验的概率问题,并不普遍适用.直到 1933 年,苏联数学家 Kolmogorov 提出了概率的公理化定义,这个定义综合了前人的研究成果,明确了概率的基本概念,使概率论成为严谨的数学分支,对之后概率论的迅速发展起了积极作用.

定义 1-5 设 E 是随机试验,Ω 是它的样本空间,对于 E 的每一个事件 A,赋予一个