



普通高等教育机械类国家级特色专业系列规划教材



机械结构有限单元法基础

韩清凯 孙 伟 王伯平 李朝峰 编著



科学出版社

普通高等教育机械类国家级特色专业系列规划教材

机械结构有限单元法基础

韩清凯 孙 伟 王伯平 李朝峰 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书简要介绍了机械结构分析中的弹性力学基本概念和方法、机械结构强度准则、机械结构动力学基本原理;以平面三角形单元、梁单元为例,详细叙述了有限单元法的基本原理;对单元形函数的构造方法进行了讨论,对等参数单元的基本理论进行了说明,并对常用的三维实体单元、板单元和壳单元分别进行了介绍;最后对机械结构动力学分析的有限元理论进行了简要叙述。书中还给出若干详细算例。

本书可作为机械类高年级本科生和研究生的教材,也可作为工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

机械结构有限单元法基础/韩清凯等编著. —北京:科学出版社,2013.3
普通高等教育机械类国家级特色专业系列规划教材

ISBN 978-7-03-036871-3

I. ①机… II. ①韩… III. ①机械设计-有限元法-高等学校-教材 IV. ①TH122

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 040678 号

责任编辑:毛 莹 张丽花 / 责任校对:韩 杨

责任印制:闫 磊 / 封面设计:迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京市安泰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 3 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2013 年 3 月第一次印刷 印张:13 1/2

字数:344 000

定价:30.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

机械结构的力学分析是进行机械设计的基础。应用材料力学或者弹性力学理论,可以进行机械结构基本力学性质的定义和定性分析,而有限单元法以其模型精确、便于工程软件处理等优点,在机械结构分析与设计中得到广泛应用。本书就是在介绍弹性力学等机械结构力学分析的基本原理的基础上,详细介绍有限元法的基本原理。

有限单元法(finite element method, FEM),常称为有限元法,是力学和计算机技术相结合而逐步发展起来的、一种进行工程分析的强有力的数值计算方法,已经成为数学、物理以及多种工程领域的较通用的重要分析工具,具有灵活、快速、有效等特点。有限元法在工程上主要涉及机械设计与制造、材料加工、航空航天、土木工程、电子电器、国防军工、船舶、铁道、汽车和石化能源等多个领域。可以利用有限元法来求解弹性(线性和非线性)、弹塑性或塑性问题(包括静力和动力问题),求解各类场分布问题(流体场、温度场、电磁场等的稳态和瞬态问题),求解管路、电路、润滑、噪声以及固体、流体、温度相互作用等问题。

有限元法具有如下优点:①分析对象的几何形状适应性强。可以处理复杂的几何形状和多种形式的边界条件,还可以处理非均匀的和各向异性的材料,可以处理由许多不同材料组成的、任意几何形状的对象。②适用范围广。有限元法的场函数选择灵活,一般能够应用于固体、流体、热传导、电磁学和声学等多种场问题的分析。③有较好的稳定性和收敛性。有限元法的数学基础是积分形式的变分原理或加权余量法,把数理方程的求解等效为定积分运算和线性代数方程组或常微分方程组的求解。只要保证数学模型的正确性和方程组求解算法的稳定性和收敛性,并选择收敛的单元形式,其计算近似解能够收敛于数学模型的精确解。④便于计算机进行处理。有限元法采用矩阵形式和单元组装方法,每一个步骤都便于实现计算机软件模块化,有利于计算机软件的实现。

有限元法的基本思想可以追溯到 20 世纪 40 年代初。当时就有人尝试使用三角形区域定义连续函数并与最小位能原理相结合,以求解结构扭转问题。到了 50 年代中期,开始利用这种思想对机械结构进行分析,其基本思路是将整个结构视为由有限个力学小单元相互连接而形成的集合体,每个单元的力学特性组合在一起以形成整体结构的力学特性。在 50 年代,Boeing 公司的 Turner、Clough、Martin 和 Topp 等在分析飞机结构时首先研究了离散杆、梁单元刚度的表达式,这种将复杂结构进行离散化的做法可以认为是有限元法应用在机械结构分析的开端。在 60 年代,开始用有限元原理求解弹性力学平面应力问题,并开始使用“有限元法”这一术语。到 70 年代以后,随着计算机技术的发展,有限元法也随之迅速发展起来。当前,大型有限元分析软件已成为现代工程设计不可缺少的工具,并与 CAD 软件相结合,形成了大规模集成的计算机辅助工程分析(CAE)系统。发展到今天,工程技术人员使用有限元法已经变得十分方便。例如,完成一项结构分析的工作主要是如何将复杂的实际问题加以合理简化,建立合理的有限元计算模型,按照有限元软件要求准备好所需数据和信息,计算完毕后

再检查计算结果是否合理。当前有限元法的发展趋势是：①需要建立更多新材料的单元形式，解决工程实际中新材料和新结构复杂分析的需要，特别是复合材料、高分子材料、陶瓷材料、纳米材料、环境材料、智能材料和功能材料等；②研究复杂载荷工况下的结构力学行为、结构非线性特性和多场耦合等问题，以及相应的自适应数值计算方法；③加强与 CAD/CAM/CAE 等大型软件的无缝集成，实现产品从设计、制造、运行直至失效的分析与模拟。

在国内许多大学中，机械工程及其相关学科的本科生或研究生都开设了有限元课程。学习有限元理论与方法在大学乃至工程界一直都有着极大的需求。本书是在东北大学机械工程学学科多年教学实践基础上，结合原校内讲义、《结构分析中的有限单元及其应用》(2000, 东北大学出版社)、《有限单元法及应用》(2002, 吉林科学技术出版社)、《机械结构有限元分析》(2006, 哈尔滨工业大学出版社)、《弹性力学及有限单元法基础教程》(2009, 东北大学出版社)等进行精编和深化完成的。本书内容简明，结构清晰，配有易学易用的 MATLAB 程序和 ANSYS 命令流程序代码，还有完善的辅助教学课件，满足大规模课程教学和广大学生学习的需求。本书作者多年来一直从事弹性力学和有限元分析方面的教学工作，并且在承担的大量科研项目中积累了丰富的实践经验。作者参编的相关同类教材已经在不同层面上纳入了规划教材体系，在多个大学的平台课和必修课上得以使用。

本书根据机械结构有限元分析的需求，合理选取并编排了弹性力学的基本理论、覆盖弹性力学的基本方程和典型结构的弹性力学基本解法。根据机械动力学与振动分析的需求，编入了简要的机械动力学基本原理，作为动力学有限元分析的参考。在有限元法原理方面，由浅入深，从三角形单元入手，直至复杂的等参数单元，不同于传统教材的章节顺序，使学生更加易于接受。本书还对有限元形函数理论进行了归纳梳理，介绍了单元形函数构造的基本原理，使读者能够快速扩展有限元中的单元特性知识。设置了板壳有限元、动力学有限元等相关章节，有利于读者较全面地掌握进行结构分析的主要单元类型。在需要重点掌握的知识环节上，均配有算例和程序，部分还配置了 ANSYS 的 APDL 程序。

本书由韩清凯教授、孙伟副教授、王伯平副教授、李朝峰博士编著。在本书编写过程中，得到了翟敬宇、王娇、杨铮鑫、王宇等同学的大力帮助，也得到了大连理工大学、东北大学、空军航空大学、湖南科技大学、沈阳化工大学、辽宁科技大学等高校教师的大力支持，在此一并致谢。本书的出版得到了国家高技术研究发展计划(863 计划)项目(2012AA062002)、湖南省“芙蓉学者”特聘教授计划等项目的资助。

本书难免会有许多欠妥之处，敬请读者批评指正。

作者

2012 年 10 月

目 录

前言

第 1 章 弹性力学基础理论	1
1.1 弹性力学的基本概念	1
1.1.1 弹性力学及其基本假设	1
1.1.2 外力与内力	2
1.1.3 应力	3
1.1.4 应变	5
1.2 应力状态的描述	6
1.2.1 应力坐标变换	6
1.2.2 任意截面上的应力分解	8
1.2.3 主应力及其求解方法	10
1.3 应力平衡微分方程	12
1.4 几何方程	14
1.5 应变状态的描述	17
1.6 相容性条件	18
1.7 物理方程	19
1.7.1 广义胡克定律	20
1.7.2 线弹性结构的物理方程	20
1.7.3 用位移表达的平衡微分方程	22
1.8 边界条件	23
1.8.1 应力边界条件	23
1.8.2 位移边界条件	25
1.8.3 圣维南原理	25
习题	26
第 2 章 弹性力学典型问题及其解法	28
2.1 平面问题	28
2.1.1 平面应力问题	28
2.1.2 平面应变问题	29
2.2 空间轴对称问题	30
2.3 板壳问题	33
2.3.1 板壳问题简介	33
2.3.2 薄板弯曲问题的基本方程	34
2.4 弹性力学问题的一般求解方法	36
2.4.1 弹性力学问题解法概述	36
2.4.2 位移法	37
2.4.3 应力法	38

2.4.4 用多项式(Airy 应力函数) 求解平面问题	39
2.5 弹性力学分析的能量法	42
2.5.1 能量法的基本原理	42
2.5.2 瑞利-里兹法	44
2.5.3 弹性力学问题的虚位移原理	46
2.6 机械结构的强度失效准则	47
2.6.1 材料力学实验知识	47
2.6.2 最大主应力准则	48
2.6.3 最大剪应力准则	49
2.6.4 最大变形能准则	49
2.6.5 最大剪应力准则与最大变形能 准则的对比	50
习题	51
第 3 章 机械结构动力学与振动 基本理论	53
3.1 机械结构动力学的基本概念	53
3.1.1 动力学系统的自由度	53
3.1.2 单自由度系统的动力学分析	54
3.2 多自由度系统	57
3.2.1 多自由度振动系统的运动方程	57
3.2.2 固有频率、主振型和方程解耦	58
3.2.3 多自由度系统的受迫振动	60
3.2.4 多自由度振动系统分析举例	61
3.3 连续体系统	64
3.3.1 杆的自由振动	64
3.3.2 杆的强迫振动	67
习题	68
第 4 章 平面问题的有限元法	70
4.1 平面三角形单元的单元 刚度矩阵推导	70
4.2 利用平面三角形单元进行 结构整体分析	76
4.2.1 单元的组集	76
4.2.2 边界条件的引入	78
4.3 有限元法的实施步骤	81

4.4 平面三角形单元举例	84	第8章 板壳问题的有限元法	163
习题	91	8.1 四边形薄板单元	163
第5章 杆单元和梁单元	93	8.1.1 四边形薄板单元的位移模式	163
5.1 杆件结构的有限元分析方法	93	8.1.2 四边形薄板单元的单元刚度矩阵	165
5.1.1 一维杆单元	93	8.1.3 用局部坐标表示的四边形薄板单元	165
5.1.2 平面杆单元	98	8.2 三角形薄板弯曲单元	167
5.1.3 空间杆单元	101	8.2.1 三角形薄板单元的位移模式和单元刚度矩阵	167
5.2 平面梁单元	102	8.2.2 用面积坐标表示的三角形薄板单元	169
5.2.1 平面悬臂梁的解析分析	102	8.3 考虑剪切的 Mindlin 板单元	170
5.2.2 平面梁单元的分析与求解	104	8.4 壳体弯曲单元	171
5.2.3 平面梁单元举例	108	8.4.1 三角形壳体单元	172
5.3 空间梁单元分析	111	8.4.2 矩形壳体单元	174
5.3.1 空间梁单元的节点坐标	111	8.4.3 从三维实体退化的壳体单元	176
5.3.2 空间梁单元的坐标变换	111	8.4.4 轴对称薄壳单元	180
5.3.3 空间梁单元的单元特性	114	8.5 板壳单元举例	183
习题	115	习题	190
第6章 单元的形函数	117	第9章 机械结构动力学分析的有限元法	191
6.1 形函数构造的一般原理	117	9.1 单元动力学方程的建立	191
6.1.1 常见单元的形函数	117	9.1.1 位移、速度和加速度矩阵	191
6.1.2 位移插值函数的构造方法	124	9.1.2 单元动力学方程的推导	192
6.2 形函数的基本性质	127	9.1.3 单元质量矩阵和单元阻尼矩阵	193
6.3 用面积坐标表达的形函数	128	9.2 机械结构整体动力学方程的建立	194
6.4 形函数与有限元解的收敛性	130	9.3 机械结构固有特性的有限元分析	195
6.5 利用单元形函数进行节点载荷等效	131	9.3.1 固有频率和固有振型的定义	195
6.5.1 单元载荷的移置	131	9.3.2 固有频率和固有振型的求解方法	196
6.5.2 结构整体载荷列阵的形成	132	9.4 机械结构动力学响应的有限元分析	198
6.5.3 载荷移置与静力等效关系	133	9.4.1 直接积分法	198
6.6 利用形函数原理构造三维实体单元	134	9.4.2 振型叠加法	202
习题	139	9.5 机械结构动力学有限元举例	204
第7章 等参数单元	141	9.5.1 固有频率求解	204
7.1 等参元的基本概念	141	9.5.2 动响应求解	206
7.2 4节点四边形等参元	145	习题	208
7.3 8节点二次四边形等参元	148	参考文献	210
7.4 20节点三维空间等参元	149		
7.5 高斯积分法简介	152		
7.6 等参元举例	153		
习题	161		

第 1 章 弹性力学基础理论

本章主要介绍弹性力学的基本理论,主要包括:线性弹性力学问题的基本假设;应力、应变的定义及其性质;应力平衡微分方程、几何方程和物理方程等弹性力学基本方程。这些是进行机械结构有限元分析时的有关弹性力学问题的基础理论。

1.1 弹性力学的基本概念

1.1.1 弹性力学及其基本假设

弹性力学(elastic theory)是一门基础学科。弹性力学是固体力学(solid mechanics)的一个分支,其基本任务是针对各种具体情况,确定弹性体内应力与应变的分布规律。也就是说,当已知弹性体的形状、物理性质、受力情况和边界条件时,确定其任一点的应力、应变状态和位移。在机械、航空、航天、土建和水利等领域的结构分析中,都需要应用弹性力学的基本理论。

弹性力学与材料力学(strengths of materials)在研究对象、研究内容和基本任务方面有许多相同之处,但是二者的研究方法有较大差别。材料力学的研究对象主要是杆状构件,即长度远大于宽度和厚度的构件,分析这类构件在拉压、剪切、弯曲和扭转等典型外载荷作用下的应力和位移。在材料力学中,除了从静力学、几何学、物理学三方面进行分析外,为了简化推导,还引入了一些关于构件的形变状态或应力分布的假定(如平面截面的假定、拉应力在截面上均匀分布的假定等)。杆件横截面的变形可以根据平面假设确定,问题求解的基本方程是常微分方程,不存在数学求解的困难。在弹性力学中,对于杆状构件,一般不引用那些假定,所以其解答要比材料力学里得出的解答精确。弹性力学中,除研究杆状构件之外,还研究板、壳、块以及三维实体等结构,分析问题从微分单元体入手,分析单元体的平衡、变形和应力应变关系,综合分析的结果是满足一定边界条件的偏微分方程。弹性力学问题的基本方程是偏微分方程的边值问题。弹性力学在研究板壳结构等一些复杂问题时,也会引用有关形变状态或应力分布的一些假定来简化其数学推导。在工程实际中,一般构件的形状、受力状态、边界条件都比较复杂,除少数典型问题外,往往无法直接采用弹性力学的基本方程进行解析求解,很多情况下需要通过数值计算方法来求得其近似解。

通常而言,将弹性力学理论直接用于工程问题分析具有很大的困难,其主要原因在于它的基本方程即偏微分方程,其边值问题求解通常比较困难。由于经典的弹性力学解析方法很难用于工程构件分析,因此探讨近似解法是弹性力学发展中的一个重要任务。弹性力学问题的近似求解方法,如差分法和变分法等,特别是随着计算机的广泛应用而不断发展的有限单元法,为解决工程实际中的弹性力学问题开辟了广阔的前景。

在很多情况下,弹性力学的研究对象是理想弹性体,其应力与应变之间的关系为线性关系。线性弹性力学的基本假设有如下几点。

(1)连续性假定。假定整个物体的体积都被组成该物体的介质所填满,不存在任何空隙。尽管一切物体都是由微小粒子组成的,并不能符合这一假定,但是只要粒子的尺寸以及相邻粒子之间的距离都比物体的尺寸小得多,则对于物体的连续性假定,就不会引起显著的误差。有了这一假定,物体内的一些物理量(如应力、应变、位移等)才可能是连续的,因而才可能用坐标的连续函数来表示它们的变化规律。

(2)完全弹性假定。假定物体服从胡克定律,即应变与引起该应变的应力成正比。反映这一比例关系的常数,就是所谓的弹性常数。弹性常数不随应力或应变的大小和符号而变。由材料力学可知:脆性材料的物体,在应力未超过比例极限前,可以认为是近似的完全弹性体;而韧性材料的物体,在应力未达到屈服极限前,也可以认为是近似的完全弹性体。这个假定使得物体在任意瞬时的应变将完全取决于该瞬时物体所受到的外力或温度变化等因素,而与加载的历史和加载顺序无关。

(3)均匀性假定。假定整个物体是由同一材料组成的。这样,整个物体的各部分才具有相同的弹性,因而物体的弹性常数才不会随位置坐标而变,可以取出该物体的任意一小部分来加以分析,然后把分析所得的结果应用于整个物体。如果物体是由多种材料组成的,但是只要每一种材料的颗粒远远小于物体而且在物体内部是均匀分布的,那么整个物体也就可以假定为均匀的。

(4)各向同性假定。假定物体的弹性在所有各方向上都是相同的。也就是说,物体的弹性常数不随方向而变化。对于常见的金属材料,是符合这一假定的。而由木材、竹材等做成的构件,就不能当做各向同性体来研究。

(5)小位移和小变形假定。假定物体受力以后,物体各点的位移都远远小于物体原来的尺寸,并且其应变和转角都远小于1。也就是在弹性力学中,为了保证研究的问题限定在线性范围,需要作出小位移和小变形假定。这样,在建立变形体的平衡方程时,可以用物体变形前的尺寸来代替变形后的尺寸,而不致引起显著的误差,并且,在考察物体的变形及位移时,对于转角和应变的二次幂或其乘积都可以略去不计。对于工程实际中不能满足这一假定的情况,需要采用其他理论来进行分析求解(如大变形理论等)。

上述假定都是考虑工程应用实际需要和为了研究问题的方便,根据研究对象的性质、结合求解问题的范围而作出的。这样可以略去一些暂不考虑的因素,使得问题的求解成为可能。

如前所述,弹性力学问题的求解方法可以按求解方式分为两类,即解析方法和数值算法。解析方法是通过弹性力学的基本方程和边界条件,用纯数学的方法进行求解。但是,在实际问题中能够用解析方法进行精确求解的弹性力学问题只是很少一部分。在工程实际中广泛采用的是数值方法,如有限单元法,并借助计算机软件进行求解。

1.1.2 外力与内力

1. 外力(load)

作用于物体的外力可分为两类,即面力(surface force)和体力(body force)。面力是指分

布在物体表面上的外力,包括分布力(distributed force)和集中力(concentrated force),如压力容器所受到的内压、水坝所受的静水压力、物体和物体之间的面接触压力等。面力是物体表面上各点的位置坐标的函数。

在物体表面 P 点处取一微小面积 ΔS ,假设其上作用有面力 $\Delta \mathbf{F}$,则 P 点所受的面力定义为

$$\mathbf{Q}_s = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} \quad (1.1)$$

可以用各坐标方向上的分量来表示面力,即

$$\mathbf{Q}_s = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \{X \ Y \ Z\}^T \quad (1.2)$$

体力一般是指分布在物体体积内的外力,它作用于弹性体内每一个体积单元。体力通常是弹性体内各点位置坐标的函数,如重力、惯性力和磁场力等。作用在物体内部 P 点所受的体力可以按如下方式定义,即在 P 点处取一微小体积 ΔV ,假定其上作用有体力 $\Delta \mathbf{R}$,则

$$\mathbf{Q}_v = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta V} \quad (1.3)$$

体力也可以用各坐标方向上的分量来表示,即

$$\mathbf{Q}_v = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \{X \ Y \ Z\}^T \quad (1.4)$$

2. 内力(internal force)

物体在外力作用下,可以认为其内部存在抵抗变形的内力。假设用一个经过物体内部 P 点的截面 mn 将物体分为两部分 A 和 B 。当物体在外力作用下处于平衡状态时,这两部分都应保持平衡。如果假设移去了其中的 B 部分,则在截面 mn 上有力存在,使 A 部分保持平衡,该力就称为内力。如图 1-1 所示,在截面 mn 上应该有移去的虚线部分 B 对 A 部分的平衡起作用的内力。内力是物体内部的相互作用力。

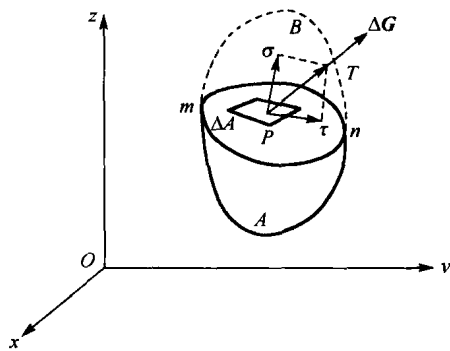


图 1-1 物体内部任意点处的应力矢量

1.1.3 应力

物体上一点的应力(stress)就是物体内力在该点处的集度。如图 1-1 所示,在截面 mn 上 P 点处取一微小面积 ΔA ,假设作用于 ΔA 上的内力为 $\Delta \mathbf{G}$,则定义 P 点处的应力矢量 \mathbf{T} 为

$$\mathbf{T} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{G}}{\Delta A} \quad (1.5)$$

应力矢量 \mathbf{T} 可以沿截面 ΔA 的法线方向和切线方向进行分解,所得到的分量就是正应力 σ_n 和剪应力 τ_n 。它们满足

$$|\mathbf{T}|^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \quad (1.6)$$

在物体内的同一个点处,具有不同法线方向的截面上的应力分量(正应力 σ_n 和剪应力 τ_n)是不同的。在表述一点的应力状态时,需要给出物体内的某点坐标,且同时给出过该点截面的外法向方向,才能确定物体内该点处在此截面上应力的方向和大小。

在弹性力学中,为了描述弹性体内任一点 P 的应力状态,还通常采用三维直角坐标系下的应力分量形式表示。根据连续性假定,弹性体可以看成由无数个微小正方体元素组成。如图 1-2 所示,在某点处切取一个微小正方体,该正方体的棱线与坐标轴平行。正方体各面上的应力可按坐标轴方向分解为一个正应力和两个剪应力,即每个面上的应力都用三个应力分量来表示。由于物体各点的内力都是平衡的,正方体相对两面上的应力分量大小相等、方向相反。这样,用一个包含 9 个应力分量的矩阵来表示正方体各面上的应力,即

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

其中, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 表示正应力(normal stress),下角标同时表示作用面和作用方向; $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ 表示剪应力(shear stress),下角标第一个字母表示与截面外法线方向相一致的坐标轴,第二个字母表示剪应力的方向。

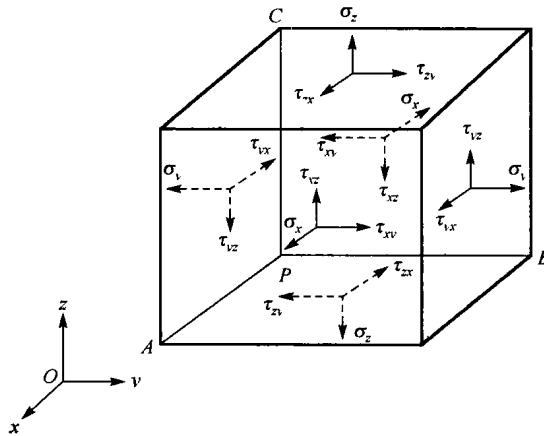


图 1-2 微小正方体元素的应力状态

应力分量的符号有如下规定:若应力作用面的外法线方向与坐标轴的正方向一致,则该面上的应力分量就以沿坐标轴的正方向为正,沿坐标轴的负方向为负。相反,如果应力作用面的外法线是指向坐标轴的负方向,那么该面上的应力分量就以沿坐标轴的负方向为正,沿坐标轴的正方向为负。

正如材料力学中的说明,下节中也将根据应力平衡方程加以证明,图 1-2 中作用在正方体各面上的剪应力存在互等关系,即作用在两个互相垂直的面上并且垂直于该两面交线的剪应力是互等的,不仅大小相等,并且正负号也相同,即

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (1.8)$$

这就是所谓的剪应力互等定理。因此,某一个剪应力下标的两个字母是可以对换的。这样,只要用 6 个独立的应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 就可以完全描述微小正方体各面上的应力,记为

$$\sigma = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\}^T \quad (1.9)$$

当上述微小正方体足够小时,作用在正方体各面上的应力分量就可视为 P 点的应力分量。只要已知 P 点的这 6 个应力分量,就可以求得过 P 点任何截面上的正应力和剪应力。因此,上述 6 个应力分量可以完全确定该点的应力状态。

1.1.4 应变

物体在外力作用下,其形状发生改变,变形(deformation)指的就是这种物体形状的变化。不管这种形状的改变多么复杂,对于其中的一个微元体来说,可以认为只包括棱边长度的改变和各棱边之间夹角的改变两种类型。因此,为了考察物体内某一点处的变形,可在该点处从物体内部截取一单元体,研究其棱边长度和各棱边夹角之间的变化情况。

对于微分单元体的变形,可以用应变(strain)来表达。分为两方面讨论:第一,棱边长度的伸长量,即正应变(或线应变, linear strain);第二,两棱边间夹角的改变量(用弧度表示),即剪应变(shear strain)或角应变。图 1-3 是对这两种应变的几何描述,表示在变形前后的微元体在 x 、 y 面上的投影,微元体的初始位置和变形后的位置分别由实线和虚线表示。物体变形时,物体内部一点处产生的应变,与该点的相对位移有关。在小应变情况下(位移导数远小于 1 的情况),位移分量与应变分量之间的关系(变形几何方程)如下。

在图 1-3(a)中,微元体在 x 方向上有一个 Δu_x 的伸长量。微元体棱边的相对变化量就是 x 方向上的正应变 ϵ_x , 则

$$\epsilon_x = \frac{\Delta u_x}{\Delta x} \quad (1.10)$$

相应地,如图 1-3(b)所示 y 轴方向的正应变

$$\epsilon_y = \frac{\Delta u_y}{\Delta y} \quad (1.11)$$

图 1-3(c)所示为 x - y 平面内的剪应变 γ_{xy} 。剪应变定义为微元体棱边之间夹角的变化。图中所示的总的角变化量为 $\theta_1 + \theta_2$, 假设 θ_1 和 θ_2 都非常小,可以认为 $\theta_1 + \theta_2 \approx \tan\theta_1 + \tan\theta_2$ 。

根据图 1-3(c)可知

$$\tan\theta_1 = \frac{\Delta u_y}{\Delta x}, \quad \tan\theta_2 = \frac{\Delta u_x}{\Delta y}$$

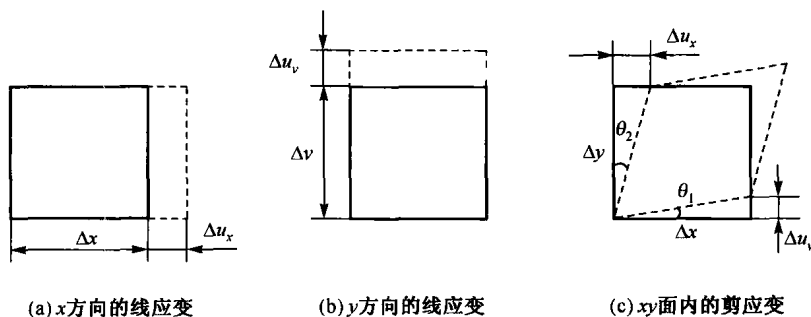


图 1-3 应变的几何描述

由小变形假设,有 $\theta_1 = \tan\theta_1, \theta_2 = \tan\theta_2$, 因此,剪应变 γ_{xy} 可以表示为

$$\gamma_{xy} = \theta_1 + \theta_2 = \frac{\Delta u_y}{\Delta x} + \frac{\Delta u_x}{\Delta y} \quad (1.12)$$

正向剪应力 τ_{xy} 和 τ_{yx} 分别引起微元体棱边夹角的减小,即把相对初始角度的减小量视为正向剪应变。

依此类推, $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ 分别代表一点 x, y, z 轴方向的线应变, $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ 则分别代表 xy, yz, xz 面上的剪应变。与直角应力分量类似,上述 6 个应变分量称为直角应变分量。这 6 个应变分量用矩阵形式表示,即

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \epsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

除了上面的两种应变,还有一种体积应变(volume strain)。体积应变表示弹性体体积的扩张或收缩,按线弹性理论,体积应变的大小等于三个线应变的和,即

$$\Delta = \frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (1.14)$$

1.2 应力状态的描述

弹性体在外力作用下产生应力场,弹性体内任意一点的应力状态可以用 6 个应力分量描述。一点的应力状态与所选定的坐标系有关。以下从应力坐标变换、任意截面的应力分解实现对一点应力状态的描述,并介绍主应力等概念。

1.2.1 应力坐标变换

用一个斜的平面切割一个弹性体,并与三个互相垂直的坐标面相交,就会隔离出一个四面体单元,如图 1-4 所示。设 x' 轴为该斜面的外法线, y' 和 z' 轴与该斜面相切, x', y' 和 z' 构成新的直角坐标系。设 x' 轴的方向角定义为 $\theta_{x'x}, \theta_{x'y}$ 和 $\theta_{x'z}$, 它们是 x' 轴分别与 x, y 和 z 轴的夹角,其余弦值定义为 x' 轴的方向余弦。 x' 轴的方向余弦分别为

$$n_{x'x} = \cos\theta_{x'x}, \quad n_{x'y} = \cos\theta_{x'y}, \quad n_{x'z} = \cos\theta_{x'z} \quad (1.15)$$

三个方向余弦不是相互独立的,即它们满足如下关系:

$$n_{x'x}^2 + n_{x'y}^2 + n_{x'z}^2 = 1 \quad (1.16)$$

相应地, y', z' 轴与 x, y, z 轴的夹角求余弦,对应得到 y', z' 轴的方向余弦分别为 $n_{y'x}, n_{y'y}, n_{y'z}$ 和 $n_{z'x}, n_{z'y}, n_{z'z}$ 。把坐标系 x', y', z' 轴的所有方向余弦组合起来写成如下矩阵:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_{x'x} & n_{x'y} & n_{x'z} \\ n_{y'x} & n_{y'y} & n_{y'z} \\ n_{z'x} & n_{z'y} & n_{z'z} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

\mathbf{T} 即为应力坐标变换矩阵。

设 $\boldsymbol{\sigma}'$ 、 $\boldsymbol{\sigma}$ 分别为新坐标系和原坐标系下一点的应力矩阵,即

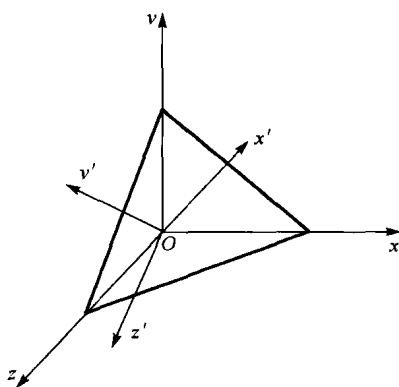


图 1-4 一点附近的坐标系及其旋转变换

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{yx'} & \sigma_y & \tau_{y'z'} \\ \tau_{zx'} & \tau_{z'y'} & \sigma_{z'} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

根据静力学平衡条件可知

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{T} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{T}^T \quad (1.19)$$

其中, \mathbf{T}^T 是 \mathbf{T} 的转置矩阵。

例 1-1 已知某一点在 xyz 坐标系内的应力状态为如下应力矩阵:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -8 & 6 & -2 \\ 6 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & -5 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

如该坐标系先绕 z 轴旋转 $\theta = 45^\circ$, 然后再绕新的 x 轴旋转 $\phi = 30^\circ$, 试确定该点在新的坐标系下的应力矩阵。

解 对于每一次旋转, 都可以通过坐标变换得到该点所在平面上的法线向量, 将该法线向量分别投影到 x, y, z 轴, 得到三个方向上的向量分量。第一次旋转得到的坐标 $x_1 y_1 z_1$ 为

$$\begin{cases} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \quad (a)$$

第二次旋转确定了坐标 $x' y' z'$, 它们与 $x_1 y_1 z_1$ 坐标的关系如下:

$$\begin{cases} x' \\ y' \\ z' \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{cases} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{cases} \quad (b)$$

可得

$$\begin{cases} x' \\ y' \\ z' \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & \sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & -\cos\theta\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (c)$$

将具体角度值 $\theta = 45^\circ$ 和 $\phi = 30^\circ$ 代入, 得到应力坐标变换矩阵 T 为

$$T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

解得进行坐标变换后一点的应力矩阵为

$$\sigma' = T\sigma T^T = \begin{bmatrix} 4.00 & 5.20 & -3.00 \\ 5.20 & -4.80 & 2.71 \\ -3.00 & 2.71 & -8.20 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

1.2.2 任意截面上的应力分解

为了表征物体任一点处的应力状态, 可以计算经过该点的任意截面上的应力。

设已知弹性体内任一点 P 的 6 个应力分量是 $\{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}\}^T$, 下面介绍两种求过该点任意截面上应力的方法。

1. 用应力坐标变换法求任意截面上的应力

如图 1-5 所示, 在 P 点附近取一平面 ABC , 外法线为 n , 该平面与经过 P 点且垂直于坐标轴的三个平面形成一个微小四面体 $PABC$ 。当平面 ABC 无限接近于 P 点时, 平面 ABC 上的应力就无限接近于过 P 点、法线方向为 n 的斜平面上的应力。

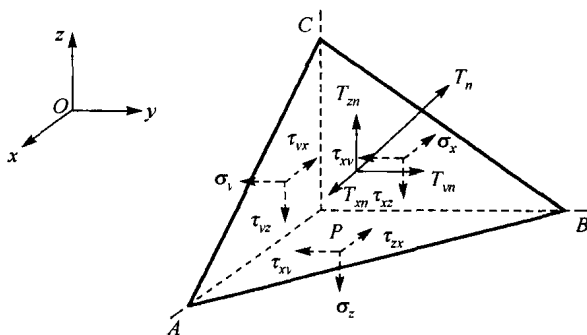


图 1-5 一点的应力状态

记 n 的方向余弦为

$$\cos(n, x) = n_x, \quad \cos(n, y) = n_y, \quad \cos(n, z) = n_z \quad (1.20)$$

可见, 如果把平面 ABC 的外法线 n 作为变换后的一个坐标轴, 则法线 n 的方向余弦对应

了变换矩阵 T [见式(1.17)的第一行]。用应力坐标变换方法求得平面 ABC 上的正应力 σ_n 如下:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \{n_x \quad n_y \quad n_z\} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \\ &= n_x^2 \sigma_x + n_y^2 \sigma_y + n_z^2 \sigma_z + 2n_x n_y \tau_{xy} + 2n_y n_z \tau_{yz} + 2n_x n_z \tau_{xz} \end{aligned} \quad (1.21)$$

2. 用静力平衡条件推导任一截面上的应力

如图 1-5 所示的三角形 ABC 的面积为 ΔA , 则三角形 PBC 、 PCA 、 PAB 的面积分别为 $n_x \Delta A$ 、 $n_y \Delta A$ 、 $n_z \Delta A$ 。令 T_x 、 T_y 、 T_z 分别为三角形 ABC 上的 T_n 在三个坐标轴上的投影。由力平衡条件 $\sum F_x = 0$ 可得

$$T_x \Delta A - \sigma_x n_x \Delta A - \tau_{yx} n_y \Delta A - \tau_{zx} n_z \Delta A = 0 \quad (1.22)$$

即

$$T_x = n_x \sigma_x + n_y \tau_{yx} + n_z \tau_{zx}$$

这里没有考虑体积力。

同理, 由平衡条件 $\sum F_y = 0$ 和 $\sum F_z = 0$, 可以得到另外两个类似的方程, 整理后得

$$\begin{aligned} T_x &= n_x \sigma_x + n_y \tau_{yx} + n_z \tau_{zx} \\ T_y &= n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_y + n_z \tau_{zy} \\ T_z &= n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} + n_z \sigma_z \end{aligned} \quad (1.23)$$

式(1.23)又称为柯西应力公式(Cauchy's stress formula)。该公式描述了弹性体内任一点 P 的 6 个应力分量与通过 P 点任一平面上的应力关系。

由式(1.23)很容易求出平面 ABC 上的全应力 T_n :

$$\begin{aligned} T_n &= \sqrt{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2} \\ &= \sqrt{(n_x \sigma_x + n_y \tau_{yx} + n_z \tau_{zx})^2 + (n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_y + n_z \tau_{zy})^2 + (n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} + n_z \sigma_z)^2} \end{aligned} \quad (1.24)$$

而平面 ABC 上的正应力 σ_n 则可通过 T_x 、 T_y 、 T_z 三个分量投影后合成得到, 即

$$\begin{aligned} \sigma_n &= n_x T_x + n_y T_y + n_z T_z \\ &= n_x^2 \sigma_x + n_y^2 \sigma_y + n_z^2 \sigma_z + 2n_x n_y \tau_{xy} + 2n_y n_z \tau_{yz} + 2n_x n_z \tau_{xz} \end{aligned} \quad (1.25)$$

式(1.25)与式(1.21)一致。

因为全应力 T_n 与正应力、剪应力之间满足如下关系[见式(1.6)]:

$$T_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \quad (1.26)$$

故有

$$\tau_n = \sqrt{T_n^2 - \sigma_n^2} \quad (1.27)$$

由此可见, 在弹性体内任意一点处, 只要已知该点的 6 个直角坐标应力分量, 就可求得过该点任一平面上的正应力和剪应力。也就是说, 一点的 6 个直角坐标应力分量完全确定了该点的应力状态。

1.2.3 主应力及其求解方法

1. 主应力

已经证明,在过一点的所有截面中,存在着三个互相垂直的特殊截面,在这三个截面上没有剪应力,而仅有正应力。这种没有剪应力仅有正应力存在的截面称为过该点的主平面。主平面上的正应力称为该点的主应力。主平面的外法线方向是主应力的方向,称为该点的主应力方向。

设某一点的一个主应力方向的方向余弦为 n_x, n_y, n_z , 因为在主平面上没有剪应力,可用 σ 代表该主平面上的正应力,则正应力在 x, y, z 轴的投影可表示为

$$T_m = \sigma n_x, \quad T_{yn} = \sigma n_y, \quad T_{zn} = \sigma n_z \quad (1.28)$$

由柯西应力公式可知

$$\begin{aligned} T_{zn} &= \sigma n_x = \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\ T_{yn} &= \sigma n_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z \\ T_{xn} &= \sigma n_z = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z \end{aligned} \quad (1.29)$$

整理得

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z &= 0 \\ \tau_{xy} n_x + (\sigma_y - \sigma)n_y + \tau_{zy} n_z &= 0 \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + (\sigma_z - \sigma)n_z &= 0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

因为 $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$, 即 n_x, n_y, n_z 不全为 0, 上述方程组中 n_x, n_y, n_z 有非平凡解的条件是其系数矩阵的行列式为 0, 即

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (1.31)$$

将此行列式展开,得到一个关于应力的一元三次方程

$$\begin{aligned} \sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\sigma \\ - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0 \end{aligned} \quad (1.32)$$

式(1.32)有三个实根 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, 这三个根就是 P 点处的三个主应力。将主应力分别代入式(1.29), 结合式(1.30)便可分别求出各主应力方向的方向余弦。三个主方向是相互垂直的。

如前所述,一点的应力状态可以用 6 个直角坐标应力分量组成的矩阵 $\sigma =$

$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$ 来表示,与此类似,通过选择主应力方向作为坐标轴可以把一点的应力状态用

主应力组成的矩阵来表示,即

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (1.33)$$