高孝忠 编著

高等代数

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$，$\forall \lambda, \mu \in F$：

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$；

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

) $\exists 0 \in V$，$\forall \alpha \in V$，$\alpha+0=\alpha$；

(4) $\exists \alpha' \in V$，∋“$\alpha+\alpha'=0$；

(5) $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$；

(6) $(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$；

(7) $(\lambda\mu)\alpha=\lambda(\mu\alpha)$；

(8) $1\alpha=\alpha$.

$\forall \alpha, \beta \in V$，$A(\alpha+\beta)=A\alpha+A\beta$；

$\forall \lambda \in F$，$A(\lambda\alpha)=\lambda A\alpha$.

清华大学出版社

高孝忠 编著

高等代数

清华大学出版社
北京

内容简介

高等代数是高等院校数学类专业的一门基础课，同时也是研究生入学考试的基本内容. 本书根据多年的教学经验编写，力求每一个基本概念都有一个现实的背景，使学生容易接受那些抽象的对象. 书中注重基本线索与思想方法的介绍，可让学生站在一个较高的平台去看待所学的知识. 全书共 9 章，分别介绍一元多项式、行列式、矩阵、线性方程组、线性空间、线性变换以及二次型等内容.

本书可作为综合性大学、师范院校数学系各专业的教材，还可以作为高等学校数学系教师以及数学工作者的参考用书.

图书在版编目（CIP）数据

高等代数/高孝忠编著. --北京：清华大学出版社，2013

ISBN 978-7-302-31715-9

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①高…　Ⅲ. ①高等代数－高等学校－教材　Ⅳ. ①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 048687 号

责任编辑：刘　颖
封面设计：常雪影
责任校对：刘玉霞
责任印制：沈　露

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：三河市君旺印装厂
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　**印　　张**：19　　**字　　数**：408 千字
版　　次：2013 年 4 月第 1 版　　**印　　次**：2013 年 4 月第 1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：36.00 元

产品编号：051235-01

前言

FOREWORD

高等代数是高等院校数学类专业的一门基础主干课，其思想、内容和方法是学习后续课程的基础.掌握其思想、内容和方法是学习高等代数的基本目标.为此，笔者根据教育部关于高校精品课程教材建设的要求，结合多年来积累的教学经验及对教学改革的积极思考和探索，编写了这本《高等代数》.

本书有如下特点.

(1) 宗旨：采用通俗易懂的语言.

林群院士说："深奥的东西，能说你懂了，以什么为标准呢？那就是看你能否用粗浅的语言去描述."本书的编写以此为宗旨，语言通俗易懂，学生喜闻乐见，容易接受.

(2) 题材：采用抽象与应用相结合.

应用体现理论与实际的联系.知道了抽象的过程，就知道了应用的方法.对每一个抽象的概念，都给出其引入的情境，告知抽象的过程和应用的方法.

(3) 内容：采用严密要求下的解释.

严密的逻辑推理，是数学的基本要求之一.本书注重引导学生能从简单的解释达到严密的论证，掌握数学思维方法，培养逻辑推理能力.

(4) 拓展：采用推理中的必然.

梳理出知识中的逻辑线，是学生掌握知识的最佳方案，使学生变机械记忆为理解记忆，真正理解和掌握高等代数的基本概念、基本理论、基本方法.

(5) 教学：配备多媒体教学课件.

本书的每一章节都有多媒体课件(教学光盘)，在教学实践中得到同行教师与学生的好评.

本书在编写、修订过程中，得到了贵州师范大学数学与计算机科学学院的大力支持；清华大学出版社刘颖编辑、贵州师范大学的游泰杰教授对本书的编写提出了很多宝贵的意见，特在此对他们表示诚挚的感谢.

高孝忠

2013年2月

本书采用的数学符号

$\forall$——对于任意指定的(泛指);

$\forall^0$——对于任意指定的不全为零的数组(泛指);

$\exists$——存在,可以找到(特指);

$\exists^0$——存在不全为零的数组;

$\exists^b$——存在不相同的数组;

$\exists|$——唯一存在;

$\ni$"……"——使得"……"成立,满足"……"条件;

$\Rightarrow$——蕴涵,可以推出;

$\Leftrightarrow$——等价,充分必要;

$(\Rightarrow)$——必要性;

$(\Leftarrow)$——充分性;

ie:——换句话说,即;

$a|b$——a 整除 b,或 b 被 a 整除;

$a\nmid b$——a 不能整除 b.

目 录

CONTENTS

绪　论

高等代数是高等院校数学专业的一门基础主干课，其思想、内容和方法是学习后续课程的基础. 掌握其思想、内容和方法是学习高等代数的基本目标.

尽管目前高等代数的教材、教参、辅导书版本众多，但基本上是大同小异，缺乏帮助刚入学的学生去认识教材中基本概念的背景与意义、领悟重要理论的思维方法、掌握概念之间的有机联系以及解决问题的理论依据与基本方法.

从中学步入大学的学生，往往用中学的学习方法去面对大学的知识，从而产生不少的困惑. 诱导学生转变学习方法是学习新知识的第一步. 为了做到这一点，在本书的第 1 章中，对数学归纳法的介绍，就让学生认识到高等代数的要求与中学数学的要求不同，即中学偏重于应用，而大学偏重于说理.

解方程是数学中一个重要的课题. 方程的类型较多，如代数方程、微分方程、积分方程、矩阵方程等，其中较简单的是代数方程. 在代数方程中，早期的研究对象就是一元高次方程与多元一次方程组的求解理论，由此发展形成了线性代数学. 高等代数介绍的内容就是线性代数学中的基本理论与应用.

数学常用的一种方法称为转型，如现实生活中某一条路行不通后，得另辟蹊径一样. 向量、行列式、矩阵等就是高等代数中研究的对象在转型中的产物.

我们知道，多项式

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

与其系数(含常数项)获得的有序数组

$$(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

构成一一对应关系，即每一个多项式唯一确定了一个有序数组，每一个有序数组又唯一确定一个多项式，所以有序数组就是多项式转型的产物. 换句话说，有序数组是多项式经抽象而得到的数学模型，而多项式是有序数组的一个实际背景. 同样地，我们也可以说，在线性方程组中，经抽象而获得了矩阵、行列式等概念.

当获得如向量、矩阵、行列式等这些数学模型后，数学的处理手段是在每一个模型中赋予运算，使之成为一个代数系统. 值得注意的是，所赋予的运算源于背景. 例如当不理解向量的加与数乘向量时，想一想两个多项式相加的结果以及一个数与多项式相乘；当不理解矩阵的初等变形时，想一想方程组中加减消元的过程. 一句话，那就是：如不理解，请回到最原始的地方去看一看吧！

当然,有一些背景,犹如戏台上的背景一样,是根据剧情而设的.诚然,背景的设置,要看一个人的理解程度,但认真地去挖掘,就会让我们面对深奥的知识而寻找到粗浅的解释.

举个例子吧.诗经中有一首诗:

投我以木瓜,报之以琼琚,匪报也,永以为好也!

为了理解这首诗,我们设想:有一对男女青年郊游,也可以说是在谈情说爱.当他们的情感升华到不能用语言表达的时候(这就是背景),女方从树上摘了一个木瓜,投向男方(不懂的人以为女子是一个疯子).男方接到木瓜后,立即从身上取下贵重的琼琚给了女方(不懂的人以为男子是一个傻子).他们的举动不是为了报答,而是为了永结同心呀.

看了上面的解释,我们可以得到这样的结论:没有背景的理解会让一个人的思维产生偏差!这就是有的学生感到高等代数难学的原因.

面对曾抽象获得的向量、矩阵等对象,也不过是线性空间中一个个具体的例子而已.一个代数系统成为线性空间的条件,就是从向量、矩阵等赋予的线性运算中总结出来的,于是向量、矩阵等又成了线性空间的背景.打开思维的闸门,线性空间讨论的对象又何止向量、矩阵呢?函数、数列、线性变换等,赋予运算后,也分别构成一个个线性空间,也可以分别构成一个个欧氏空间.

一个个台阶的逾越,给我们留下了很多概念.一步步成功的探索,让我们获得了很多丰硕的果实.有什么用呢?这就是学生常提出的问题.

回答挺简单,那就是:

知道抽象的过程,就可以获得应用的方法.

换句话说,谈应用就得回头看.例如,知道了线性空间的性质,就可以得到向量、矩阵的性质,从而得到多项式、线性方程组的性质.如可解性与解的结构等.二次型的讨论就是对称矩阵的一个应用而已.

由于我们在学习中是一步一步地向上爬,当回头看时,有的人就会有"一览众山小"的感觉,但有的人却有"高处不胜寒"的感觉.

如何让学生改变"高处不胜寒"的感觉,方法就是挖掘数学模型的背景.

让学生看有背景的戏,其乐无穷.

让学生学习有背景的知识,其趣无穷.

以上就是写这本教材的宗旨.

高孝忠
2013 年 2 月

第/1/章

基本概念

高等代数是大学数学的基础课程之一，是中学数学的继续与提高. 通过对高等代数的学习，我们将会发现，它与中学数学有很大的不同. 这种不同不仅表现在内容的深度上，更重要的是体现在思维与方法上.

在高等数学里，每一个概念都是由具体事物经抽象而得到的. 在学习这些概念时，就要寻找这些概念的背景，才能获得对这些概念的深刻认识.

1.1 数学归纳法

数学归纳法是数学中一个非常重要的证明方法. 在中学的学习中，我们只知道用数学归纳法去证明有关正整数的命题，但不知道其原因. 如果有人问："为什么能证明有关正整数的命题?"回答只能是："老师教的."进入大学后，我们可不能用这样的回答来应付，于是就应该寻求数学归纳法的依据.

由于数学归纳法论证的对象是有关正整数集

$$\mathbb{N}^{+}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

的命题，于是数学归纳法的依据就应该是正整数集的属性.

1.1.1 正整数集

什么是正整数呢?

正整数——从 1 开始，一个接一个地数，数出来的数称为正整数.

所有正整数构成的集合称为**正整数集**.

这是一个粗浅的解释，其实质是：

(1) 正整数集有一个初始元 1；

(2) 正整数集中的任一个数 a 有继元 $a+1$.

上面两条属性是皮亚诺总结出来的，所以称为皮亚诺公理. 在我们给出的粗浅解释中，"一个接一个"就体现了"有继元".

ie：如果集合 A 有初始元 1，且 A 中任一元素 a 的继元 $a+1$ 也属于 A，则 A 就是正整数集.

由此，我们通过“类比”的思维方法，就得到了下面的归纳原理.

归纳原理　如果正整数集$\mathbb{N}^+$的初始元 1 具有属性 P，且当$\mathbb{N}^+$中任一元素 n 具有属性 P 时，n 的继元 $n+1$ 也具有属性 P，则正整数集中的所有元素都具有属性 P.

为了证明归纳原理，我们还得介绍正整数集的公理与最小数原理.

自然公理　$\forall n\in\mathbb{N}^+$，数集$\{1,2,\cdots,n\}$是有限集.

什么叫公理？在中学的解释是：大家公认的道理. 这个解释不确切. 为了解释公理，我们还得从数学的要求说起.

在数学王国里，有一个规定，即：不允许有循环的解释与循环的论证.

什么是循环的解释呢？例如在中文里，

多者，不少也；少者，不多也.

这就是一个循环的解释. 由于不允许有循环的解释就产生了最基本的概念；由于不允许有循环的论证就产生了最基本的道理. 我们把最基本的道理称为公理.

在这里，还有一个问题不能解决，即：什么叫有限集？可以说，对“有限集”的认识，还停留在“只可意会，不可言传”的阶段. 只有在学习实变函数这门课程后才有深刻的了解.

定理 1.1.1（最小数原理）　正整数集$\mathbb{N}^+$的任一非空子集必存在最小数.

对于一个定理，首先要解读它，然后才能证明它. 定理 1.1.1 指出，S 是$\mathbb{N}^+$中的任意一个非空的子集，则 S 中必有最小的数 n_0. 所谓最小数，必定在 S 中，而且 S 中所有数都不会比 n_0 小. 用数学语言来描述就是：

$$\forall S\subseteq\mathbb{N}^+,S\neq\varnothing,\quad 则\ \exists n_0\in S,\quad \ni“\forall n\in S,n\geqslant n_0”.$$

从这里，你可以看到，用数学语言描述的简捷性、准确性了吧. 在高等数学的学习中，要学会说理，更重要的是，要学会用简捷的数学语言去描述，做到“天衣无缝，滴水不漏”. 在下面的证明中，我们用日常用语与数学语言两种格式给出，让大家从日常用语的描述很快地转到数学语言的描述上来.

证　（日常用语）对于正整数集$\mathbb{N}^+$中的任一个子集 S，因为 S 不是空集，所以 S 中必定有一个数 m. 把 S 中不超过 m 的正整数汇集在一起构成一个集合并命名为 S_m，显然 S_m 是 S 的子集，而且集合 S_m 必定是一个有限集. 于是我们可以通过比较法获得集合 S_m 中的最小数 n_0. 比较法可行吗？我们说是可行的，是因为只有有限个数，所以才可行. 就如我们班的所有同学的身高构成一个数集 A，我们可以通过比较找出最矮者，最矮者的身高就是数集 A 中的最小数.

当找到 S_m 中的最小数 n_0 后，n_0 是不是 S 中的最小数呢？回答是肯定的. 因为 S 中的任一个数 n，要么在 S_m 中，要么不在 S_m 中. 如果在 S_m 中，则因为 n_0 是 S_m 中的最小数，所以 n 不会比 n_0 小. 如果不在 S_m 中，则 n 必定比 m 大，这是因为 S 中不超过 m 的数都在 S_m 中. 从而 S 中的所有数都不会比 n_0 小. 故正整数集的任意一个非空的子集必有最小数.

证　（数学语言）$\forall S\subset\mathbb{N}^+$，$S\neq\varnothing$，$\exists m\in S$. 于是数集

$$S_m=S\cap\{1,2,\cdots,m\}$$

是有限集,从而通过比较可获得 S_m 中的最小数 n_0. 所以 $\forall n\in S$.

$$\text{如果 } n\in S_m,\text{则 } n\geqslant n_0;\quad \text{如果 } n\notin S_m,\text{则 } n>m\geqslant n_0.$$

故结论成立.

对照两种描述,我们可以悟出,要理解数学语言的证明,必须把证明中字里行间的道理挖掘出来,才能说你看懂了. 看懂后,还要理清证明的过程,即思维方法. 如这个定理的证明过程是:先构造一个有限集,从而获得这个有限集的最小者 n_0,再论证有限集的最小者 n_0 就是我们要找的数.

我们可以把上面的方法称为"先读厚,再读薄". 读厚的实质是挖掘字里行间的道理,读薄的实质是总结思维的过程.

以后的证明我们不再像这样赘述,完全靠大家去"悟",并在悟中一步一步地走向成熟.

1.1.2 数学归纳法

定理 1.1.2(**数学归纳法原理**) 设 P 是一个有关正整数 n 的命题,如果:

(1) 当 $n=1$ 时,命题 P 成立;

(2) 假设 $n=k$ 时,命题 P 成立,能导出 $n=k+1$ 时,命题 P 也成立,则命题 P 对所有正整数都成立.

证 假设 $\exists k\in\mathbb{N}^+$,命题 P 对 k 不成立,则由已知条件知 $k\neq 1$,且命题 P 对 $k-1$ 也不成立. 继之推出命题 P 对 $k-2$ 也不成立.

由自然数公理知,数集 $\{1,2,\cdots,k\}$ 是有限集,所以我们可以一直推到 $k=1$ 时,命题 P 也不成立. 矛盾,故命题 P 对所有正整数都成立.

在定理 1.1.2 的证明中,我们用到了数理逻辑中"逆否命题"的结论,即

命题:P 对 n 成立 $\Rightarrow$ P 对 n 的继元 $n+1$ 成立.

逆否命题:P 对 n 的继元 $n+1$ 不成立 $\Rightarrow$ P 对 n 不成立.

结论:当一个命题为真时,其逆否命题亦为真.

在定理 1.1.2 中,"当 $n=1$ 时,命题 P 成立"称为归纳基础. 如果换为"当 $n=c$ 时,命题 P 成立",则所得结论是

$$\forall n\geqslant c,\text{命题 } P \text{ 对 } n \text{ 都成立}.$$

例 1.1.1 证明:n 边形的内角和等于 $(n-2)\pi$.

证 当 $n=3$ 时,结论成立. 假设 $n=k$ 时,结论成立,则 $n=k+1$ 时,如图 1.1,连接 A_1A_3,于是 $k+1$ 边形的内角和等于 k 边形的内角和再加上 $\triangle A_1A_2A_3$ 的内角和,即

$$(k-2)\pi+\pi=[(k+1)-2]\pi.$$

故结论成立.

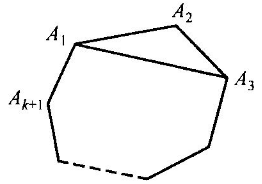

图 1.1

例 1.1.2 证明:含有 n 个元素的集合的所有子集的个数等于 2^n.