

高孝忠 编著

高等代数

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in V, \forall \lambda, \mu \in F:$

(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha;$

(2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma);$

(5) $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta;$

$\forall \lambda \in F, A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha.$

(4) $\exists \alpha' \in V, \exists " \alpha + \alpha' = 0;$

$\forall \alpha, \beta \in V, A(\alpha + \beta) = A\alpha + A\beta;$

(3) $\exists 0 \in V, \forall \alpha \in V, \alpha + 0 = \alpha;$

(6) $(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha;$

(7) $(\lambda\mu)\alpha = \lambda(\mu\alpha);$

(8) $1\alpha = \alpha.$

清华大学出版社

高孝忠 编著

高等代数



清华大学出版社
北京

内 容 简 介

高等代数是高等院校数学类专业的一门基础课,同时也是研究生入学考试的基本内容.本书根据多年的教学经验编写,力求每一个基本概念都有一个现实的背景,使学生容易接受那些抽象的对象.书中注重基本线索与思想方法的介绍,可让学生站在一个较高的平台去看待所学的知识.全书共9章,分别介绍一元多项式、行列式、矩阵、线性方程组、线性空间、线性变换以及二次型等内容.

本书可作为综合性大学、师范院校数学系各专业的教材,还可以作为高等学校数学系教师以及数学工作者的参考用书.

版权所有,侵权必究.侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

高等代数/高孝忠编著.--北京:清华大学出版社,2013

ISBN 978-7-302-31715-9

I. ①高… II. ①高… III. ①高等代数—高等学校—教材 IV. ①O15

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第048687号

责任编辑:刘颖

封面设计:常雪影

责任校对:刘玉霞

责任印制:沈露

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址: 北京清华大学学研大厦A座 邮 编: 100084

社总机: 010-62770175 邮 购: 010-62786544

投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者: 三河市君旺印装厂

装 订 者: 三河市新茂装订有限公司

经 销: 全国新华书店

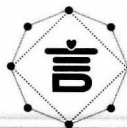
开 本: 185mm×230mm 印 张: 19 字 数: 408千字

版 次: 2013年4月第1版 印 次: 2013年4月第1次印刷

印 数: 1~3000

定 价: 36.00元

产品编号: 051235-01



高等代数是高等院校数学类专业的一门基础主干课,其思想、内容和方法是学习后续课程的基础.掌握其思想、内容和方法是学习高等代数的基本目标.为此,笔者根据教育部关于高校精品课程教材建设的要求,结合多年来积累的教学经验及对教学改革的积极思考和探索,编写了这本《高等代数》.

本书有如下特点.

(1) 宗旨:采用通俗易懂的语言.

林群院士说:“深奥的东西,能说你懂了,以什么为标准呢?那就是看你能否用粗浅的语言去描述.”本书的编写以此为宗旨,语言通俗易懂,学生喜闻乐见,容易接受.

(2) 题材:采用抽象与应用相结合.

应用体现理论与实际的联系.知道了抽象的过程,就知道了应用的方法.对每一个抽象的概念,都给出其引入的情境,告知抽象的过程和应用的方法.

(3) 内容:采用严密要求下的解释.

严密的逻辑推理,是数学的基本要求之一.本书注重引导学生能从简单的解释达到严密的论证,掌握数学思维方法,培养逻辑推理能力.

(4) 拓展:采用推理中的必然.

梳理出知识中的逻辑线,是学生掌握知识的最佳方案,使学生变机械记忆为理解记忆,真正理解和掌握高等代数的基本概念、基本理论、基本方法.

(5) 教学:配备多媒体教学课件.

本书的每一章节都有多媒体课件(教学光盘),在教学实践中得到同行教师与学生的好评.

本书在编写、修订过程中,得到了贵州师范大学数学与计算机科学学院的大力支持;清华大学出版社刘颖编辑、贵州师范大学的游泰杰教授对本书的编写提出了很多宝贵的意见,特在此对他们表示诚挚的感谢.

高孝忠

2013年2月

本书采用的数学符号

$\forall$ —— 对于任意指定的(泛指);

$\forall^0$ —— 对于任意指定的不全为零的数组(泛指);

$\exists$ —— 存在,可以找到(特指);

$\exists^0$ —— 存在不全为零的数组;

$\exists^b$ —— 存在不相同的数组;

$\exists |$ —— 唯一存在;

$\supset$ “……” —— 使得“……”成立,满足“……”条件;

$\Rightarrow$ —— 蕴涵,可以推出;

$\Leftrightarrow$ —— 等价,充分必要;

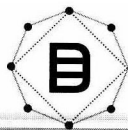
$(\Rightarrow)$ —— 必要性;

$(\Leftarrow)$ —— 充分性;

ie: —— 换句话说,即;

$a|b$ —— a 整除 b , 或 b 被 a 整除;

$a \nmid b$ —— a 不能整除 b .



绪论	1
第 1 章 基本概念	3
1.1 数学归纳法	3
1.1.1 正整数集	3
1.1.2 数学归纳法	5
习题 1.1	6
1.2 数环与数域	7
1.2.1 数环与数域的概念	7
1.2.2 整数环的一些整除性质	9
1.2.3 群、环与域	11
习题 1.2	12
第 2 章 多项式	13
2.1 一元多项式及其运算	13
2.1.1 一元多项式的概念	13
2.1.2 一元多项式的运算	14
习题 2.1	17
2.2 多项式的整除性	17
2.2.1 整除的概念与性质	17
2.2.2 带余除法	19
习题 2.2	20
2.3 多项式的最大公因式	20
2.3.1 最大公因式与辗转相除法	20
2.3.2 两个多项式互素	24
习题 2.3	25

2.4	多项式函数	26
2.4.1	多项式函数	26
2.4.2	多项式函数的零点	28
	习题 2.4	30
2.5	多项式的分解	30
2.5.1	不可约多项式	30
2.5.2	因式分解定理	32
	习题 2.5	34
2.6	重因式	34
2.6.1	重因式与重根	34
2.6.2	多项式的导数	35
2.6.3	重因式的判别法	36
	习题 2.6	38
2.7	实数与复数域上的多项式	38
2.7.1	复数域上的多项式	38
2.7.2	实数域上的多项式	40
	习题 2.7	42
2.8	有理数域上的多项式	43
2.8.1	有理数域上多项式的可约性	43
2.8.2	有理数域上多项式的有理根	45
	习题 2.8	47
	总练习题 2	47
第 3 章	行列式	51
3.1	行列式的引入与排列	51
3.1.1	行列式的引入	51
3.1.2	排列	53
	习题 3.1	55
3.2	n 阶行列式	55
3.2.1	n 阶行列式的概念	55
3.2.2	n 阶行列式的性质	58
	习题 3.2	61
3.3	行列式按一行(列)展开	62
3.3.1	子式与代数余子式	62
3.3.2	行列式按一行(列)展开	63

习题 3.3	68
3.4 克莱姆法则	69
习题 3.4	73
总练习题 3	73
第 4 章 线性方程组	77
4.1 消元法与矩阵的初等变换	77
4.1.1 消元法	77
4.1.2 矩阵与其初等变换	78
习题 4.1	85
4.2 n 维向量	86
4.2.1 向量的概念	86
4.2.2 线性表出	88
习题 4.2	90
4.3 在 F^n 中向量组的线性关系	91
4.3.1 线性相关与线性无关	91
4.3.2 极大线性无关组	93
习题 4.3	95
4.4 矩阵的秩	95
4.4.1 矩阵的秩的概念	95
4.4.2 矩阵的秩的性质	98
习题 4.4	100
4.5 线性方程组的可解性与解结构	101
4.5.1 线性方程组的可解性	101
4.5.2 线性方程组的解结构	103
习题 4.5	108
总练习题 4	109
第 5 章 矩阵	112
5.1 矩阵的运算	112
5.1.1 矩阵的线性运算	112
5.1.2 矩阵的乘法运算	113
5.1.3 矩阵的转置	117
习题 5.1	118
5.2 可逆矩阵	119

5.2.1	可逆矩阵的概念与性质	119
5.2.2	矩阵可逆的充分条件	121
	习题 5.2	123
5.3	初等矩阵	124
5.3.1	初等矩阵的概念与性质	124
5.3.2	等价矩阵的概念与性质	128
5.3.3	利用初等变换求矩阵的逆	131
	习题 5.3	134
5.4	分块矩阵	134
5.4.1	分块矩阵的概念与运算	134
5.4.2	分块矩阵的应用	138
	习题 5.4	141
	总练习题 5	142
第 6 章	向量空间	145
6.1	向量空间的概念与简单性质	145
6.1.1	向量空间的引入	145
6.1.2	向量空间的定义	146
6.1.3	向量空间的基本性质	148
	习题 6.1	149
6.2	在向量空间 V 中向量组的线性关系	149
6.2.1	线性相关与线性无关	149
6.2.2	向量组之间的线性关系	151
6.2.3	向量空间 V 中的极大线性无关组	153
	习题 6.2	154
6.3	基、维数与坐标	155
6.3.1	向量空间的基与维数	155
6.3.2	坐标	157
	习题 6.3	159
6.4	基变换与坐标变换	159
6.4.1	基变换	159
6.4.2	坐标变换	161
	习题 6.4	163
6.5	子空间	164
6.5.1	子空间的概念	164

6.5.2 生成子空间	165
习题 6.5	167
6.6 子空间的交与和	168
6.6.1 子空间的交与和的概念	168
6.6.2 子空间的维数公式	171
6.6.3 子空间的直和	172
习题 6.6	174
6.7 向量空间的同构	174
6.7.1 映射	174
6.7.2 同构映射	175
6.7.3 向量空间的同构	178
习题 6.7	179
总练习题 6	179
第 7 章 线性变换	182
7.1 线性变换的概念与性质	182
7.1.1 线性变换的概念	182
7.1.2 线性变换的性质	183
习题 7.1	187
7.2 线性变换的运算	188
7.2.1 线性变换的线性运算	188
7.2.2 线性变换的乘法	190
7.2.3 线性变换的逆	192
习题 7.2	194
7.3 线性变换的矩阵	194
7.3.1 线性变换与其矩阵的概念	195
7.3.2 线性变换与其矩阵的性质	197
习题 7.3	200
7.4 不变子空间	201
7.4.1 不变子空间的概念	201
7.4.2 用不变子空间寻找简单相似矩阵	203
习题 7.4	205
7.5 特征值与特征向量	205
7.5.1 特征值与特征向量的概念	205
7.5.2 特征多项式	207

习题 7.5	211
7.6 矩阵的对角化	211
7.6.1 矩阵可对角化的第一个等价条件	211
7.6.2 矩阵可对角化的第二个等价条件	214
习题 7.6	216
7.7 若尔当标准形介绍	217
7.7.1 若尔当矩阵	217
7.7.2 若尔当标准形	219
习题 7.7	221
总练习题 7	221
第 8 章 欧氏空间	225
8.1 欧氏空间的定义及度量	225
8.1.1 欧氏空间的定义	225
8.1.2 欧氏空间的度量	227
习题 8.1	230
8.2 规范正交基	230
8.2.1 规范正交基的概念	230
8.2.2 规范正交基的存在性	232
习题 8.2	235
8.3 子空间的正交关系	235
8.3.1 向量与子空间的正交关系	235
8.3.2 子空间与子空间的正交关系	239
习题 8.3	241
8.4 正交变换	241
8.4.1 正交变换的概念与性质	241
8.4.2 正交变换的分类	244
8.4.3 欧氏空间的同构	244
习题 8.4	246
8.5 对称变换与对称矩阵	247
8.5.1 对称变换的概念与性质	247
8.5.2 实对称矩阵的对角化	248
8.5.3 实对称矩阵的对角化步骤	249
习题 8.5	251
8.6 酉空间与酉变换介绍	252

8.6.1 酉空间的概念与性质	252
8.6.2 酉变换与对称变换	253
习题 8.6	254
总练习题 8	255
第 9 章 二次型	258
9.1 二次型及其矩阵	258
9.1.1 二次型的定义	258
9.1.2 二次型的化简与对称矩阵的合同	260
9.1.3 矩阵的相似与合同之间的关系	263
习题 9.1	263
9.2 用可逆替换简化二次型	264
9.2.1 配方法	264
9.2.2 矩阵法	267
习题 9.2	270
9.3 规范形	270
9.3.1 规范形的概念	271
9.3.2 惯性定理	272
习题 9.3	274
9.4 正定二次型	274
9.4.1 正定二次型的概念	274
9.4.2 二次型正定的等价条件	275
9.4.3 利用矩阵的顺序主子式判别其正定性	276
习题 9.4	279
9.5 双线性映射	279
9.5.1 量度矩阵的概念与性质	279
9.5.2 双线性映射与二次型	282
习题 9.5	284
总练习题 9	285
参考文献	287

绪 论

高等代数是高等院校数学专业的一门基础主干课,其思想、内容和方法是学习后续课程的基础.掌握其思想、内容和方法是学习高等代数的基本目标.

尽管目前高等代数的教材、教参、辅导书版本众多,但基本上是大同小异,缺乏帮助刚入学的学生去认识教材中基本概念的背景与意义、领悟重要理论的思维方法、掌握概念之间的有机联系以及解决问题的理论依据与基本方法.

从中学步入大学的学生,往往用中学的学习方法去面对大学的知识,从而产生不少的困惑.诱导学生转变学习方法是学习新知识的第一步.为了做到这一点,在本书的第1章中,对数学归纳法的介绍,就让学生认识到高等代数的要求与中学数学的要求不同,即中学偏重于应用,而大学偏重于说理.

解方程是数学中一个重要的课题.方程的类型较多,如代数方程、微分方程、积分方程、矩阵方程等,其中较简单的是代数方程.在代数方程中,早期的研究对象就是一元高次方程与多元一次方程组的求解理论,由此发展形成了线性代数学.高等代数介绍的内容就是线性代数学中的基本理论与应用.

数学常用的一种方法称为转型,如现实生活中某一条路行不通后,得另辟蹊径一样.向量、行列式、矩阵等就是高等代数中研究的对象在转型中的产物.

我们知道,多项式

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

与其系数(含常数项)获得的有序数组

$$(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

构成一一对应关系,即每一个多项式唯一确定了一个有序数组,每一个有序数组又唯一确定一个多项式,所以有序数组就是多项式转型的产物.换句话说,有序数组是多项式经抽象而得到的数学模型,而多项式是有序数组的一个实际背景.同样地,我们也可以说,在线性方程组中,经抽象而获得了矩阵、行列式等概念.

当获得如向量、矩阵、行列式等这些数学模型后,数学的处理手段是在每一个模型中赋予运算,使之成为一个代数系统.值得注意的是,所赋予的运算源于背景.例如当不理解向量的加与数乘向量时,想一想两个多项式相加的结果以及一个数与多项式相乘;当不理解矩阵的初等变形时,想一想方程组中加减消元的过程.一句话,那就是:如不理解,请回到最原始的地方去看一看吧!

当然,有一些背景,犹如戏台上的背景一样,是根据剧情而设的.诚然,背景的设置,要看一个人的理解程度,但认真地去挖掘,就会让我们面对深奥的知识而寻找到粗浅的解释.

举个例子吧.诗经中有一首诗:

投我以木瓜,报之以琼琚,匪报也,永以为好也!

为了理解这首诗,我们设想:有一对男女青年郊游,也可以说是在谈情说爱.当他们的情感升华到不能用语言表达的时候(这就是背景),女方从树上摘了一个木瓜,投向男方(不懂的人以为女子是一个疯子).男方接到木瓜后,立即从身上取下贵重的琼琚给了女方(不懂的人以为男子是一个傻子).他们的举动不是为了报答,而是为了永结同心呀.

看了上面的解释,我们可以得到这样的结论:没有背景的理解会让一个人的思维产生偏差!这就是有的学生感到高等代数难学的原因.

面对曾抽象获得的向量、矩阵等对象,也不过是线性空间中一个个具体的例子而已.一个代数系统成为线性空间的条件,就是从向量、矩阵等赋予的线性运算中总结出来的,于是向量、矩阵等又成了线性空间的背景.打开思维的闸门,线性空间讨论的对象又何止向量、矩阵呢?函数、数列、线性变换等,赋予运算后,也分别构成一个个线性空间,也可以分别构成一个个欧氏空间.

一个个台阶的逾越,给我们留下了很多概念.一步步成功的探索,让我们获得了很多丰硕的果实.有什么用呢?这就是学生常提出的问题.

回答挺简单,那就是:

知道抽象的过程,就可以获得应用的方法.

换句话说,谈应用就得回头看.例如,知道了线性空间的性质,就可以得到向量、矩阵的性质,从而得到多项式、线性方程组的性质.如可解性与解的结构等.二次型的讨论就是对称矩阵的一个应用而已.

由于我们在学习中是一步一步地向上爬,当回头看时,有的人就会有“一览众山小”的感觉,但有的人却有“高处不胜寒”的感觉.

如何让学生改变“高处不胜寒”的感觉,方法就是挖掘数学模型的背景.

让学生看有背景的戏,其乐无穷.

让学生学习有背景的知识,其趣无穷.

以上就是写这本教材的宗旨.

高孝忠

2013年2月

第/1/章

基 本 概 念

高等代数是大学数学的基础课程之一,是中学数学的继续与提高.通过对高等代数的学习,我们将会发现,它与中学数学有很大的不同.这种不同不仅表现在内容的深度上,更重要的是体现在思维与方法上.

在高等数学里,每一个概念都是由具体事物经抽象而得到的.在学习这些概念时,就要寻找这些概念的背景,才能获得对这些概念的深刻认识.

1.1 数学归纳法

数学归纳法是数学中一个非常重要的证明方法.在中学的学习中,我们只知道用数学归纳法去证明有关正整数的命题,但不知道其原因.如果有人问:“为什么能证明有关正整数的命题?”回答只能是:“老师教的.”进入大学后,我们可不能用这样的回答来应付,于是就应该寻求数学归纳法的依据.

由于数学归纳法论证的对象是有关正整数集

$$\mathbb{N}^+ = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$$

的命题,于是数学归纳法的依据就应该是正整数集的属性.

1.1.1 正整数集

什么是正整数呢?

正整数——从1开始,一个接一个地数,数出来的数称为正整数.

所有正整数构成的集合称为**正整数集**.

这是一个粗浅的解释,其实质是:

- (1) 正整数集有一个初始元1;
- (2) 正整数集中的任一个数 a 有继元 $a+1$.

上面两条属性是皮亚诺总结出来的,所以称为皮亚诺公理.在我们给出的粗浅解释中,“一个接一个”就体现了“有继元”.

ie: 如果集合 A 有初始元1,且 A 中任一元素 a 的继元 $a+1$ 也属于 A ,则 A 就是正整数集.

由此,我们通过“类比”的思维方法,就得到了下面的归纳原理.

归纳原理 如果正整数集 $\mathbb{N}^+$ 的初始元1具有属性 P ,且当 $\mathbb{N}^+$ 中任一元素 n 具有属性 P 时, n 的继元 $n+1$ 也具有属性 P ,则正整数集中的所有元素都具有属性 P .

为了证明归纳原理,我们还得介绍正整数集的公理与最小数原理.

自然公理 $\forall n \in \mathbb{N}^+$, 数集 $\{1, 2, \dots, n\}$ 是有限集.

什么叫公理? 在中学的解释是: 大家公认的道理. 这个解释不确切. 为了解释公理, 我们还得从数学的要求说起.

在数学王国里, 有一个规定, 即: 不允许有循环的解释与循环的论证.

什么是循环的解释呢? 例如在中文里,

多者, 不少也; 少者, 不多也.

这就是一个循环的解释. 由于不允许有循环的解释就产生了最基本的概念; 由于不允许有循环的论证就产生了最基本的道理. 我们把最基本的道理称为公理.

在这里, 还有一个问题不能解决, 即: 什么叫有限集? 可以说, 对“有限集”的认识, 还停留在“只可意会, 不可言传”的阶段. 只有在学习实变函数这门课程后才有深刻的了解.

定理 1.1.1 (最小数原理) 正整数集 $\mathbb{N}^+$ 的任一非空子集必存在最小数.

对于一个定理, 首先要解读它, 然后才能证明它. 定理 1.1.1 指出, S 是 $\mathbb{N}^+$ 中的任意一个非空的子集, 则 S 中必有最小的数 n_0 . 所谓最小数, 必定在 S 中, 而且 S 中所有数都不会比 n_0 小. 用数学语言来描述就是:

$$\forall S \subseteq \mathbb{N}^+, S \neq \emptyset, \text{ 则 } \exists n_0 \in S, \ni \forall n \in S, n \geq n_0.$$

从这里, 你可以看到, 用数学语言描述的简捷性、准确性了吧. 在高等数学的学习中, 要学会说理, 更重要的是, 要学会用简捷的数学语言去描述, 做到“天衣无缝, 滴水不漏”. 在下面的证明中, 我们用日常用语与数学语言两种格式给出, 让大家从日常用语的描述很快地转到数学语言的描述上来.

证 (日常用语) 对于正整数集 $\mathbb{N}^+$ 中的任一个子集 S , 因为 S 不是空集, 所以 S 中必定有一个数 m . 把 S 中不超过 m 的正整数汇集在一起构成一个集合并命名为 S_m , 显然 S_m 是 S 的子集, 而且集合 S_m 必定是一个有限集. 于是我们可以通过比较法获得集合 S_m 中的最小数 n_0 . 比较法可行吗? 我们说是可行的, 是因为只有有限个数, 所以才可行. 就如我们班的所有同学的身高构成一个数集 A , 我们可以通过比较找出最矮者, 最矮者的身高就是数集 A 中的最小数.

当找到 S_m 中的最小数 n_0 后, n_0 是不是 S 中的最小数呢? 回答是肯定的. 因为 S 中的任一个数 n , 要么在 S_m 中, 要么不在 S_m 中. 如果在 S_m 中, 则因为 n_0 是 S_m 中的最小数, 所以 n 不会比 n_0 小. 如果不在 S_m 中, 则 n 必定比 m 大, 这是因为 S 中不超过 m 的数都在 S_m 中. 从而 S 中的所有数都不会比 n_0 小. 故正整数集的任意一个非空的子集必有最小数.

证 (数学语言) $\forall S \subseteq \mathbb{N}^+, S \neq \emptyset, \exists m \in S$. 于是数集

$$S_m = S \cap \{1, 2, \dots, m\}$$

是有限集,从而通过比较可获得 S_m 中的最小数 n_0 . 所以 $\forall n \in S$.

如果 $n \in S_m$, 则 $n \geq n_0$; 如果 $n \notin S_m$, 则 $n > m \geq n_0$.

故结论成立.

对照两种描述,我们可以悟出,要理解数学语言的证明,必须把证明中字里行间的道理挖掘出来,才能说你看懂了. 看懂后,还要理清证明的过程,即思维方法. 如这个定理的证明过程是: 先构造一个有限集,从而获得这个有限集的最小者 n_0 ,再论证有限集的最小者 n_0 就是我们要找的数.

我们可以把上面的方法称为“先读厚,再读薄”. 读厚的实质是挖掘字里行间的道理,读薄的实质是总结思维的过程.

以后的证明我们不再像这样赘述,完全靠大家去“悟”,并在悟中一步一步地走向成熟.

1.1.2 数学归纳法

定理 1.1.2 (数学归纳法原理) 设 P 是一个有关正整数 n 的命题,如果:

(1) 当 $n=1$ 时,命题 P 成立;

(2) 假设 $n=k$ 时,命题 P 成立,能导出 $n=k+1$ 时,命题 P 也成立,则命题 P 对所有正整数都成立.

证 假设 $\exists k \in \mathbb{N}^+$, 命题 P 对 k 不成立,则由已知条件知 $k \neq 1$,且命题 P 对 $k-1$ 也不成立. 继之推出命题 P 对 $k-2$ 也不成立.

由自然数公理知,数集 $\{1, 2, \dots, k\}$ 是有限集,所以我们可以一直推到 $k=1$ 时,命题 P 也不成立. 矛盾,故命题 P 对所有正整数都成立.

在定理 1.1.2 的证明中,我们用到了数理逻辑中“逆否命题”的结论,即

命题: P 对 n 成立 $\Rightarrow P$ 对 n 的继元 $n+1$ 成立.

逆否命题: P 对 n 的继元 $n+1$ 不成立 $\Rightarrow P$ 对 n 不成立.

结论: 当一个命题为真时,其逆否命题亦为真.

在定理 1.1.2 中,“当 $n=1$ 时,命题 P 成立”称为归纳基础. 如果换为“当 $n=c$ 时,命题 P 成立”,则所得结论是

$\forall n \geq c$, 命题 P 对 n 都成立.

例 1.1.1 证明: n 边形的内角和等于 $(n-2)\pi$.

证 当 $n=3$ 时,结论成立. 假设 $n=k$ 时,结论成立,则 $n=k+1$ 时,如图 1.1,连接 A_1A_3 ,于是 $k+1$ 边形的内角和等于 k 边形的内角和再加上 $\triangle A_1A_2A_3$ 的内角和,即

$$(k-2)\pi + \pi = [(k+1)-2]\pi.$$

故结论成立.

例 1.1.2 证明: 含有 n 个元素的集合的所有子集的个数等于 2^n .

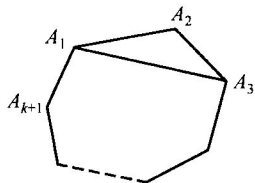


图 1.1