高等工科数学系列课程教材

计算技术与程序设计

孙振绮 总主编 / 金承日 孙振绮 主 编

COMPUTING AND PROGRAMMING

第2版

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高 等 工 科 数 学 系 列 课 程 教 材

计算技术与程序设计

第 2 版

总主编　孙振绮
主　编　金承日　孙振绮
副主编　曲荣宁　于战华　丁效华

机 械 工 业 出 版 社

本书介绍了计算机上常用的数值算法和程序设计技术，取材适当，由浅入深，通俗易懂，便于教学。全书共分 8 章，内容包括：误差与算法、非线性方程求根、矩阵计算、代数插值与曲线拟合、数值积分与数值微分、常微分方程的数值解法、数学物理方程的差分解法、程序设计等，每一节都配有一定数量的习题，从第 2 章至第 7 章章末均配有一定数量的上机实习题，书末还附有数值算例的 C 程序和部分习题答案。

本书可作为高等学校工科各专业计算方法课程的教材，也可作为工程技术人员以及其他科技人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

计算技术与程序设计/金承日，孙振绮主编．—2 版．—北京：机械工业出版社，2013．2

高等工科数学系列课程教材

ISBN 978-7-111-34404-9

Ⅰ．①计…　Ⅱ．①金…　②孙…　Ⅲ．①计算技术-高等学校-教材　②程序设计-高等学校-教材　Ⅳ．①O121　②TP311．1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 018028 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：郑　玫　责任编辑：郑　玫
版式设计：张　薇　责任校对：薛　娜
封面设计：鞠　杨　责任印制：杨　曦

北京玥实印刷有限公司印刷
2013 年 4 月第 2 版第 1 次印刷
169mm×239mm·13．5 印张·260 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-34404-9
定价：25．00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：（010）88361066	教材网：http：//www．cmpedu．com
销售一部：（010）68326294	机工官网：http：//www．cmpbook．com
销售二部：（010）88379649	机工官博：http：//weibo．com/cmp1952
读者购书热线：（010）88379203	**封面无防伪标均为盗版**

第2版前言

本书是在《计算技术与程序设计》第1版的基础上经过修改和补充而成的。经过修改和补充，该书第2版的结构更加合理，条理更加清晰，内容更加丰富，更加便于教学和读者阅读，更加有利于指导上机实习，书中的内容更具有实用性。

与第1版相比，第2版有以下变动：

增加了绪论部分，简单介绍了这门课程的地位和特点。

对第1版第1章进行了压缩和精简，其中的1.1节基本保持原样。将1.2节和1.3节合并成1.2节，并删去了一些内容。将1.4节改为1.3节，并进行了修改。

将第1版第2章改为第8章。

将第1版第3章改为第2章，并做了局部修改。

将第1版第4章改为第3章，对原有的内容进行了重组和修改，并增加了3.6节求矩阵主特征值的乘幂法的内容。由于这一章包含的内容比原来更加广泛，所以对章标题和节标题都进行了相应的修改。

将第1版第5章改为第4章，将5.3节的内容分散到4.1节和4.2节，将5.4节改为4.3节，将5.5节改为4.4节，新增4.5节三次样条插值的内容（在工程中常用），将5.6节改为4.6节。

将第1版第6章改为第5章，并新增三节内容，即5.5节广义积分的计算、5.6节二重积分的计算、5.7节数值微分。

将第1版第7章改为第6章，并增加6.3节单步法的收敛性与稳定性的内容。

将第1版第8章改为第7章，并根据所讨论方程的物理背景将原来的内容由三节划分为四节。

总之，第2版对第1版中1.2、1.3、1.4、4.4、5.1、5.2、5.3、8.2节的内容做了较大的修改，并增加了6节（即第2版中的3.6、4.5、5.5、5.6、5.7、6.3节）内容。

本书除了介绍常用的数值算法及理论外，还特别注重算法的实现。为此，专门用一章的篇幅介绍了程序设计方面的知识。书末还附有数值算例的C程序，以便读者在实际编写程序进行计算时参考。此外，从第2章至第7章章末均增加了上机实习题，便于布置和指导上机作业。

书末增加了部分习题的参考答案。

本书可作为高等学校工科各专业计算方法课程的教材，也可供工程技术人员及其他科技人员参考。讲授全书大约需要50学时。

本书由金承日、孙振绮任主编，曲荣宁、于战华、丁效华任副主编。参加本书编写的还有李宝家、邹巾英、孙建邵。崔明根教授仔细审阅了全书，并提出了许多宝贵的意见和建议。

本书在编写与试用过程中，得到了学校有关领导和专家的大力支持，在此深表谢意。

虽然编者认真撰写，仔细校对，但由于水平有限，不妥以及错漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

第1版前言

为适应科学技术进步的要求，培养高素质人才，必须改革工科数学课程体系与教学方法。为此，我们进行了十多年的教学改革实践，先后在哈尔滨工业大学和黑龙江省教委立项，长期从事“高等工科数学教学过程的优化设计”课题研究。该课题曾获哈尔滨工业大学优秀教学研究成果奖，本系列课程教材正是这一研究成果的最新总结，包括：《工科数学分析教程》（上，下）、《空间解析几何与线性代数》、《概率论与数理统计》、《复变函数论与运算微积》、《数学物理方程》、《最优化方法》、《计算技术与程序设计》等。

这套教材在编写时广泛吸取国内外知名大学的教学经验，特别是吸取了莫斯科理工学院、乌克兰人民科技大学（原基辅工业大学）等的教学改革经验，提高了知识起点，适当地扩大了知识信息量，加强了基础，并突出了对学生的数学素质与学习能力的培养。具体地：①加强对传统内容的理论叙述；②适当运用近代数学观点来叙述古典工科数学内容，加强了对重要数学思想方法的阐述；③加强了系列课程内容之间的相互渗透与交叉，注重培养学生综合运用数学知识解决实际问题的能力；④把精选教材内容与编写典型计算题有机地结合起来，从而加强了知识间的联系，形成了课程的逻辑结构，扩展了知识的深广度，使内容具有较高的系统性和逻辑性；⑤强化对学生科学工程计算能力的培养；⑥加强了对学生数学建模能力的培养；⑦突出工科特点，增加了许多现代工程应用数学方法；⑧注意到课程内容与工科研究生数学的衔接与区别。

本套教材由孙振绮任总主编。

随着科学技术的不断进步以及电子计算机的迅速发展，计算技术在科学研究与工程设计中发挥着越来越大的作用，科学计算已经成为与理论分析和科学实验并列的第三种科学研究手段。因此，计算技术与程序设计已经成为科研工作者和工程技术人员必须掌握的基本技能。《计算技术与程序设计》就是在校内讲义的基础上经过多次修改完善而成的。

本书除了介绍常用的数值算法及理论外，还特别注重算法的实现。为此，本书专门用一章的篇幅介绍了程序设计方面的知识，书末还附有数值算例的C程序，以便读者在实际编写程序进行计算时参考。本书可作为高等学校工科各专业计算方法课程的教材，也可供工程技术人员及其他科技人员参考。讲授全书大约需要50学时。

本书由金承日、孙振绮任主编，丁效华任副主编。参加本书编写的还有

李宝家、邹巾英、孙建邹。崔明根教授仔细审阅了全书，并提出了许多宝贵的意见和建议。

本书在编写与试用过程中，得到了学校有关领导和专家的大力支持，在此深表谢意。

虽然编者认真撰写，仔细校对，但由于水平有限，不妥以及错漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

目　录

绪　论

计算技术与程序设计是随着电子计算机的迅速发展而崛起的一门新兴学科，在科学研究与工程设计中发挥着越来越重要的作用．它的研究内容是如何用电子计算机计算各种数学问题．

一般来说，人们在用电子计算机解决实际问题时要经过以下几个步骤：

第一步，建立数学模型．对于在科学研究或工程领域中提出的复杂问题，抓住主要因素，忽略次要因素，建立描述实际问题的数学模型．这一步需要相关的专业知识和数学知识．

第二步，提出算法．对于上一步建立的数学模型，提出在电子计算机上可以实现的、行之有效的算法，并进行理论分析．这一步需要计算技术方面的知识．

第三步，设计程序．将上一步提出的算法转化为电子计算机可以接受的程序语言，并上机进行调试，保证程序的正确性．这一步需要程序设计语言和程序设计技巧．

第四步，上机计算．在电子计算机上运行计算程序，获得计算数据，并对计算数据进行分析，获得所求问题的数值结果．

从以上步骤可以看出，计算技术与程序设计面对的是数学问题，采用的计算工具是电子计算机．

随着科学技术的不断进步与发展，人们在科学研究和工程领域中提出的问题规模越来越大，计算要求越来越高．因此，计算技术与程序设计已经成为科研工作者和工程技术人员必须掌握的基本技能．科学计算已经成为与理论分析和科学实验并列的第三种科学研究手段．

计算方法是用简单的运算解决复杂的数值求解问题的方法，它是一门兼具理论性与实践性的学科，它既有严谨的数学理论，又有实验的特性．学习本课程需要具备高等数学、线性代数、计算机程序语言等知识．

计算方法课程主要讨论求数学问题的近似解的算法，讨论算法的数学原理、误差、收敛性和稳定性等，并利用计算机程序语言在计算机上进行计算实验、分析实验结果．但要注意的是，从提出算法到在计算机上实现算法并算出结果，要求读者具备基本的编程及上机调试的能力，这是学习本课程必不可少的基础．为此，本书用一章的篇幅专门介绍了程序设计方面的知识，书末还附有数值算例的 C 程序，以便读者在学习时作为参考．只要读者能够使用某一种程序语言

熟练而准确地在计算机上实现各种算法，就达到了学习本课程的目的.

与纯数学的理论方法不同，用计算方法求得的结果往往不是所求解问题的精确解或解析解表达式，而是所求解问题的近似解或数值解. 这是因为许多实际问题用当前的知识和理论无法得到精确解或解析解表达式. 例如，在科学研究和工程领域中得到的各种微分方程的定解问题，大多数情况下不能求出解的解析表达式，因此只能计算它们的数值解，以满足实际应用的需要.

现在，数值计算方法正越来越多地应用在科学研究和工程技术研究中，以解决复杂的问题，因此学习和掌握计算技术与程序设计对理工科学生有着十分重要的意义.

第1章 误差与算法

1.1 误差知识

1.1.1 误差的来源

在用数值计算方法解决科学技术中的具体问题时，经常会遇到各种各样的误差，这些误差的来源主要有以下四个途径.

1. 模型误差

将一个实际问题转化成数学模型时，往往要抓住主要因素，忽略次要因素. 例如，用抛物线来描述抛射体的运动轨迹时忽略了空气阻力. 这种在一定条件下理想化了的模型，与实际问题之间总存在误差，这种误差称为模型误差或描述误差.

2. 观测误差

在各种计算公式中，经常含有一些参量，如光速、声速、重力加速度或其它一些参量，而这些参量往往都是由观测或实验得到的，和实际值之间有误差，这种误差称为观测误差.

3. 舍入误差

由于计算机的字长有限，所以在计算过程中对超过计算机字长的数字要进行舍入. 例如，用 2.71828 代替 e，用 1.414 代替$\sqrt{2}$，用 2.518736 代替 2.518736204187931081 等，这样产生的误差叫做舍入误差.

4. 截断误差

在科学计算中经常遇到超越运算，它们要求用极限或无穷过程来求得，而实际计算只能用有限次运算来求得其近似值. 例如，取

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{100!}$$

这种由有限过程逼近无限过程所产生的误差称为截断误差或方法误差.

在误差的来源当中，前两种误差是计算工作者不能独立解决的，因此下面着重讨论后两种误差.

1.1.2 绝对误差与相对误差

1. 绝对误差

定义 1.1 设 $\tilde{x}$ 代表准确值 x 的一个近似值，则称

$$e = x - \tilde{x} \tag{1.1}$$

为近似值 $\tilde{x}$ 的绝对误差，简称误差. 绝对误差的值可正可负，所以不要将绝对误差认为是误差的绝对值.

一般地，准确值 x 是不知道的，所以绝对误差的真值 e 也无法得到，只能根据具体测量或计算的情况估计出 e 的范围，即估计 $|e|$ 的上界.

定义 1.2 如果有已知的常数 $\varepsilon > 0$，使得

$$|e| = |x - \tilde{x}| \leqslant \varepsilon \tag{1.2}$$

则称 ε 为近似值 $\tilde{x}$ 的绝对误差限，简称误差限.

显然，一个近似值 $\tilde{x}$ 的误差限有无穷多个. 在实际应用中，误差限应取得尽量小，而且要简洁明了.

此外，有时还用

$$x = \tilde{x} \pm \varepsilon \tag{1.3}$$

表示近似值 $\tilde{x}$ 的误差限是 ε，此时准确值 x 的取值范围是 $[\tilde{x} - \varepsilon, \tilde{x} + \varepsilon]$.

绝对误差是有量纲的量，它反映误差的大小情况.

2. 相对误差

上述绝对误差的概念还不能完全反映近似值的准确程度. 例如，设

$$x = 10 \pm 1$$

$$y = 1000 \pm 3$$

则近似值 $\tilde{x} = 10$ 的误差限 $\varepsilon(\tilde{x}) = 1$ 虽然比近似值 $\tilde{y} = 1000$ 的误差限 $\varepsilon(\tilde{y}) = 3$ 小，但考虑到近似值本身的大小，还是觉得 $\tilde{y} = 1000$ 更准确. 这就说明，在考虑一个近似值的准确度时，不仅要看其误差值的大小，还要看其近似值本身的大小. 为此，引入相对误差的概念.

定义 1.3 设 $\tilde{x}$ 代表准确值 x 的一个近似值，则称

$$e_r = \frac{e}{\tilde{x}} = \frac{x - \tilde{x}}{\tilde{x}} \tag{1.4}$$

为近似值 $\tilde{x}$ 的相对误差.

相对误差是无量纲的量，它说明了 $\tilde{x}$ 的误差 e 与 $\tilde{x}$ 本身比较起来所占的比例（常用百分比来表示），因此可以反映近似值的准确程度.

与绝对误差一样，通常不能求出相对误差的大小，只能估计它的取值范围.

定义 1.4 如果有已知的常数 $\varepsilon_r > 0$，使得

$$|e_r| = \left|\frac{e}{\tilde{x}}\right| \leqslant \varepsilon_r \tag{1.5}$$

则称 ε_r 为近似值 $\tilde{x}$ 的相对误差限.

因为

$$\left|\frac{e}{\tilde{x}}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\tilde{x}|}$$

所以相对误差限可以取

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{|\tilde{x}|} \tag{1.6}$$

由此定义，上例中 $\tilde{x}$ 与 $\tilde{y}$ 的相对误差限分别为

$$\varepsilon_r(\tilde{x}) = \frac{1}{10} = 10\%$$

$$\varepsilon_r(\tilde{y}) = \frac{3}{1000} = 0.3\%$$

可见，$\tilde{y}$ 比 $\tilde{x}$ 更精确.

1.1.3 有效数字

在表示一个近似数时，为了同时反映它的准确程度，经常用到“有效数字”的概念.

定义 1.5 设准确值 x 的某一近似值为

$$\tilde{x} = \pm(0.a_1a_2\cdots a_n\cdots)\times 10^m \tag{1.7}$$

其中，a_1，a_2，…，a_n，…都是 0，1，2，…，9 这十个数字之一，且 $a_1 \neq 0$，n 是正整数，m 是整数. 若 $\tilde{x}$ 的绝对误差满足

$$0.05\times 10^{m-n} = 0.5\times 10^{m-n-1} < |x-\tilde{x}| \leqslant 0.5\times 10^{m-n} \tag{1.8}$$

则称 $\tilde{x}$ 作为 x 的近似值具有 n 位有效数字，其中 a_1，a_2，…，a_n 均称为 $\tilde{x}$ 的有效数字. 此时，也称 $\tilde{x}$ 是具有 n 位有效数字的近似值，或称 $\tilde{x}$ 准确到第 n 位.

需要注意的是，近似值 $\tilde{x}$ 具有 n 位有效数字的前提条件是，在式（1.7）中从第一个非零数字 a_1 开始起，往右至少应具有 n 个数字.

由定义 1.5 可知，如果近似值

$$\tilde{x} = \pm(0.a_1a_2\cdots a_n)\times 10^m \quad (a_1 \neq 0) \tag{1.9}$$

是由精确值 x 经过四舍五入得到的，则 a_1，a_2，…，a_n 均为有效数字. 另外，由定义 1.5 还可以知道，若 x 的某一近似值 $\tilde{x}$ 的绝对误差限是 k 位的半个单位

（例如，十位的半个单位是 5，个位的半个单位是 0.5，小数点后第一位的半个单位是 0.05，小数点后第五位的半个单位是 0.000005），则 $\tilde{x}$ 中从左往右第一个非零数字起直到 k 位为止的所有数字均为有效数字.

例 1.1 设 $\tilde{x}_1=3.14$，$\tilde{x}_2=3.141$，$\tilde{x}_3=3.142$ 均为 $x=3.1415926\cdots$ 的近似值，试问 $\tilde{x}_1$，$\tilde{x}_2$，$\tilde{x}_3$ 分别有几位有效数字.

解 因为

$$\tilde{x}_1=0.314\times10^1 \qquad (m=1)$$

$$\tilde{x}_2=0.3141\times10^1 \qquad (m=1)$$

$$\tilde{x}_3=0.3142\times10^1 \qquad (m=1)$$

$$0.05\times10^{1-3}<|x-\tilde{x}_1|=0.00159\cdots\leqslant0.5\times10^{1-3} \qquad (n=3)$$

$$0.05\times10^{1-3}<|x-\tilde{x}_2|=0.00059\cdots\leqslant0.5\times10^{1-3} \qquad (n=3)$$

$$0.05\times10^{1-4}<|x-\tilde{x}_3|=0.000407\cdots\leqslant0.5\times10^{1-4} \qquad (n=4)$$

所以 $\tilde{x}_1$ 和 $\tilde{x}_2$ 具有三位有效数字，而 $\tilde{x}_3$ 具有四位有效数字.

例 1.2 设 $\tilde{x}_1=36.9$，$\tilde{x}_2=36.900$，$\tilde{x}_3=36.9000000$ 均为 $x=36.8999978$ 的近似值，则它们分别有三位、五位和七位有效数字. 这是因为 $\tilde{x}_1$ 和 $\tilde{x}_2$ 均可由 x 经四舍五入得到，而

$$|x-\tilde{x}_3|=0.0000022=0.22\times10^{-5}$$

不超过小数点后第五位的半个单位 0.5×10^{-5}，所以 $\tilde{x}_3$ 准确到小数点后第五位，加上个位和十位，共有七位有效数字. 值得注意的是，在 $\tilde{x}_3$ 小数点后六个零中前四个是有效数字，而后两个则不是有效数字.

在本书中如不特别说明，则所出现的所有近似值均准确到最末位数字. 但要注意，近似值 2100 与 2.1×10^3 的精确度是不同的，前者具有四位有效数字，而后者只有两位有效数字.

1.1.4 误差估计

设 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 分别为精确值 x 和 y 的近似值，而且误差限分别为 $\varepsilon(\tilde{x})$ 和 $\varepsilon(\tilde{y})$，即

$$|e(\tilde{x})|=|x-\tilde{x}|\leqslant\varepsilon(\tilde{x})$$

$$|e(\tilde{y})|=|y-\tilde{y}|\leqslant\varepsilon(\tilde{y})$$

1. 和、差的误差估计

因为

$$e(\tilde{x}\pm\tilde{y})=(x\pm y)-(\tilde{x}\pm\tilde{y})=(x-\tilde{x})\pm(y-\tilde{y})=e(\tilde{x})\pm e(\tilde{y})$$

$$|e(\tilde{x}\pm\tilde{y})|\leqslant|e(\tilde{x})|+|e(\tilde{y})|\leqslant\varepsilon(\tilde{x})+\varepsilon(\tilde{y}) \tag{1.10}$$

所以

$$\varepsilon(\tilde{x}\pm\tilde{y})=\varepsilon(\tilde{x})+\varepsilon(\tilde{y}) \tag{1.11}$$

即和、差的绝对误差限等于各近似值的绝对误差限之和.

注意：$\tilde{x}-\tilde{y}$ 的相对误差

$$\left|\frac{e(\tilde{x}-\tilde{y})}{\tilde{x}-\tilde{y}}\right|\leqslant\frac{\varepsilon(\tilde{x})+\varepsilon(\tilde{y})}{|\tilde{x}-\tilde{y}|}=\left|\frac{\varepsilon(\tilde{x})}{\tilde{x}}\right|\left|\frac{\tilde{x}}{\tilde{x}-\tilde{y}}\right|+\left|\frac{\varepsilon(\tilde{y})}{\tilde{y}}\right|\left|\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}-\tilde{y}}\right|$$

当 $\tilde{x}$ 与 $\tilde{y}$ 比较接近时，$\left|\frac{\tilde{x}}{\tilde{x}-\tilde{y}}\right|$或$\left|\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}-\tilde{y}}\right|$可能很大，这时 $\tilde{x}-\tilde{y}$ 的相对误差也可能很大. 由此可见，两个相近的近似值相减，可能会造成有效数字的严重损失. 例如，若用四位有效数字计算，得

$$\sqrt{1001}-\sqrt{1000}\approx31.64-31.62=0.02$$

而精确值为 $\sqrt{1001}-\sqrt{1000}=0.0158074\cdots$. 可见，近似值 0.02 只有一位有效数字. 为了提高运算精度，采用如下方法（不用减法！）计算：

$$\sqrt{1001}-\sqrt{1000}=\frac{1}{\sqrt{1001}+\sqrt{1000}}\approx\frac{1}{31.64+31.62}\approx0.01581$$

这个结果具有四位有效数字.

2. 乘积的误差估计

$$\begin{aligned}e(\tilde{x}\tilde{y})&=xy-\tilde{x}\tilde{y}=xy-\tilde{x}y+\tilde{x}y-\tilde{x}\tilde{y}\\&=ye(\tilde{x})+\tilde{x}e(\tilde{y})\\&=[\tilde{y}+e(\tilde{y})]e(\tilde{x})+\tilde{x}e(\tilde{y})\\&=\tilde{y}e(\tilde{x})+\tilde{x}e(\tilde{y})+e(\tilde{x})e(\tilde{y})\end{aligned}$$

$$|e(\tilde{x}\tilde{y})|\leqslant|\tilde{y}|\varepsilon(\tilde{x})+|\tilde{x}|\varepsilon(\tilde{y})+\varepsilon(\tilde{x})\varepsilon(\tilde{y}) \tag{1.12}$$

故乘积 $\tilde{x}\tilde{y}$ 的绝对误差限为

$$\varepsilon(\tilde{x}\tilde{y})=|\tilde{y}|\varepsilon(\tilde{x})+|\tilde{x}|\varepsilon(\tilde{y})+\varepsilon(\tilde{x})\varepsilon(\tilde{y}) \tag{1.13}$$

3. 商的误差估计

$$e\left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}\right)=\frac{y}{x}-\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}=\frac{y\tilde{x}-x\tilde{y}}{x\tilde{x}}=\frac{y\tilde{x}-\tilde{x}\,\tilde{y}+\tilde{x}\,\tilde{y}-x\tilde{y}}{x\tilde{x}}$$

$$=\frac{\tilde{x}e(\tilde{y})-\tilde{y}e(\tilde{x})}{[\tilde{x}+e(\tilde{x})]\tilde{x}}=\frac{\tilde{x}e(\tilde{y})-\tilde{y}e(\tilde{x})}{\tilde{x}^2}\,\frac{\tilde{x}}{\tilde{x}+e(\tilde{x})}$$

$$=\frac{\tilde{x}e(\tilde{y})-\tilde{y}e(\tilde{x})}{\tilde{x}^2}\,\frac{1}{1+e_r(\tilde{x})}=\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}\,\frac{e_r(\tilde{y})-e_r(\tilde{x})}{1+e_r(\tilde{x})}$$

可见，当$\left|\dfrac{\tilde{y}}{\tilde{x}}\right|$很大时，$e\left(\dfrac{\tilde{y}}{\tilde{x}}\right)$也可能很大，因此在计算过程中应尽量避免大数与小数（按绝对值）之间的除法运算.

4. 一般运算的误差估计

设 $\tilde{x}_i$是精确值 x_i的近似值，$u=f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$，则由多元函数的 Taylor 展开式得误差的近似估计式

$$\begin{aligned}e(\tilde{u})&=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-f(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_n)\\&\approx\sum_{i=1}^{n}f'_{x_i}(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_n)\cdot e(\tilde{x}_i)\end{aligned}\tag{1.14}$$

其中，f'_{x_i}是多元函数f关于变量 x_i的一阶偏导数. 由式（1.14）可得 $\tilde{u}$ 的误差限

$$\varepsilon(\tilde{u})=\sum_{i=1}^{n}\left|f'_{x_i}(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_n)\right|\cdot\varepsilon(\tilde{x}_i)\tag{1.15}$$

例 1.3 测得一个长方形的长度为 $\tilde{x}=120\text{cm}$，宽度为 $\tilde{y}=60\text{cm}$，如图 1.1 所示，已知其误差限分别为 $\varepsilon(\tilde{x})=0.2\text{cm}$ 和 $\varepsilon(\tilde{y})=0.1\text{cm}$. 求此长方形的面积 A，并给出相对误差限.

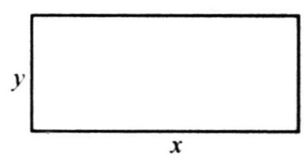

图 1.1

解 面积的近似值

$$\tilde{A}=\tilde{x}\,\tilde{y}=120\text{cm}\times 60\text{cm}=7200\text{cm}^2$$

由式（1.13）求得其绝对误差限

$$\varepsilon(\tilde{A})=60\text{cm}\times 0.2\text{cm}+120\text{cm}\times 0.1\text{cm}+0.2\text{cm}\times 0.1\text{cm}=24.02\text{cm}^2$$

故相对误差限