

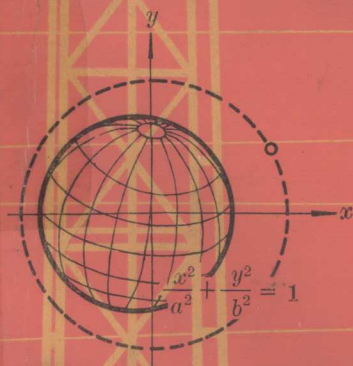
0225711

0225711

上海市中学课本

数学

第七册



上海人民出版社

目 录

第一章 指数函数与对数函数	1
第一节 指数函数	1
第二节 对数函数	6
第二章 二次曲线	12
第一节 曲线和方程	12
第二节 抛物线	22
第三节 椭圆和双曲线	39
第三章 其他一些常用曲线	64
第一节 等速螺线	64
第二节 渐开线和摆线	81
第四章 平面向量	96
第一节 向量的图形表示法和向量的加减运算	96
第二节 向量的数量表示法	106

G634.6/0106-7

江南大学图书馆



91195366

第一章 指数函数与对数函数

我们已经学了一次函数、二次函数、幂函数和三角函数的图象、性质，以及它们在生产实际中的应用。但是，在生产斗争和科学实验中，还存在着另一些函数——如指数函数和对数函数，它们在细菌的繁殖、放射性元素的衰变等问题中，有着广泛的应用。本章将研究指数函数和对数函数的图象、性质，以及它们在生产中的应用。

第一节 指数函数

我们来看下面两个问题：

(1) 在农用微生物的研究中，已知某种细菌每小时的繁殖率是 30%，如果原来的细菌数是 1 千只，那末， x 小时后的细菌数为

$$y = 1 \times (1 + 30\%)^x,$$

即

$$y = 1.3^x.$$

上式中，当 x 每取一确定值时， y 就有确定的值与 x 对应。这就是说，细菌数 y 是时间 x 的函数。

(2) 1 克放射性元素经过 t 年的衰变之后，所剩下的重量记为 q ，根据实验可以知道， q 与 t 的关系是

$$q = e^{-\lambda t}$$

上式中, e 是自然对数的底, λ 为正的常数. 当 t 每取一确定值时, q 就有确定的值和它对应. 这就是说, q 是 t 的函数.

以上两个函数关系式, 都可以归结成 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的形式. 我们把

$y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 叫做指数函数. 其中, 指数 x 是自变量, 幂 y 是因变量, 常数 a 是底. 如果以 e 为底, 就可以得到形如 $y = e^x$ 的指数函数.

下面来研究指数函数的图象和性质.

【例 1】 在同一平面直角坐标系中, 画出函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和 $y = 10^x$ 的图象.

解: 分别取 x 、 y 的一些对应值, 列成下表:

x		-3	-2	-1	0	1	2	3	
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$		8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	

x		-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	
$y = 10^x$		0.1	0.32	1	1.8	3.2	5.6	10	

然后, 根据上述的对应值表, 描点画出它们的图象 (图 1.1).

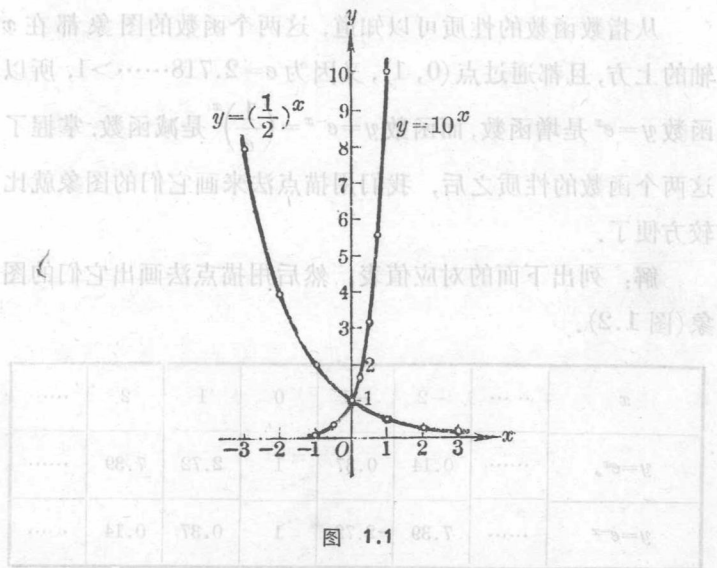


图 1.1

试一试：画出函数 $y=2^x$ 和 $y=1.3^x$ 的图象。

从这些具体的指数函数图象中，可以看出指数函数 $y=a^x$ 有以下一些性质：

(1) 图象都在 x 轴的上方。这就是说，函数 $y=a^x$ 的值总是大于零的。

(2) 图象都通过点 $(0, 1)$ 。

(3) 函数 $y=10^x$ 的图象是上升的，而函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象是下降的。一般地说，当底数 $a>1$ 时，函数 $y=a^x$ 是增函数；当底数 $a<1$ 时，函数 $y=a^x$ 是减函数。

在生产斗争和科学实验中，以 e 为底的指数函数，有着广泛的应用，下面我们来画这个函数的图象。

【例 2】 画出 $y=e^x$ 和 $y=e^{-x}$ 的图象.

从指数函数的性质可以知道, 这两个函数的图象都在 x 轴的上方, 且都通过点 $(0, 1)$, 又因为 $e=2.718\cdots > 1$, 所以函数 $y=e^x$ 是增函数, 而函数 $y=e^{-x}=\left(\frac{1}{e}\right)^x$ 是减函数. 掌握了这两个函数的性质之后, 我们用描点法来画它们的图象就比较方便了.

解: 列出下面的对应值表, 然后用描点法画出它们的图象(图 1.2).

x	...	-2	-1	0	1	2	
$y=e^x$		0.14	0.37	1	2.72	7.39	
$y=e^{-x}$		7.39	2.72	1	0.37	0.14	

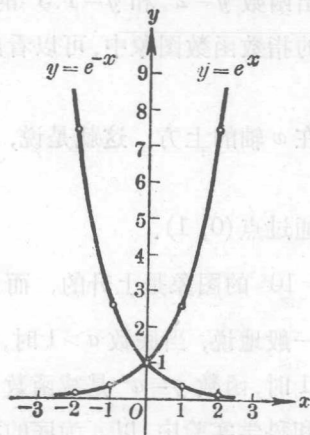


图 1.2

【例3】在电容器放电过程中，端电压 u 与时间 (t) 秒的关系是

$$u = u_0 e^{-\frac{t}{RC}},$$

当 $u_0 = 5$, $R = 10 \times 10^3$, $C = 100 \times 10^{-6}$ 时，画出这个函数的图象。根据电学中的规定，当 u 降到原电压 u_0 的 5% 时，就算放电结束，试从图象上查出从放电开始到放电结束需要多少时间。

解：从已知条件知道， u 与 t 的函数关系应是

$$u = 5e^{-t}.$$

根据问题的实际意义， $t \geq 0$ 。应用对数计算，列出 $t \geq 0$ 的对应值表，并描点画图(图 1.3)。

t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
u	5.00	3.03	1.84	1.12	0.68	0.41	0.25	0.15

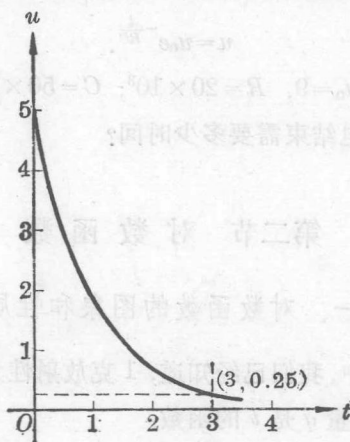


图 1.3

原电压的 5% 为

$$5 \times 5\% = 0.25.$$

从图象中可以查出, $u=0.25$ 时, $t \approx 3$. 所以从放电开始到放电结束, 约需要 3 秒时间.

练习一

1. 在同一平面直角坐标系中, 画出下列函数的图象:

$$(1) y=3^x; \quad (2) y=\left(\frac{1}{3}\right)^x.$$

2. 在同一平面直角坐标系中, 画出下列函数的图象:

$$(1) y=e^{2x}; \quad (2) y=e^{-2x}.$$

3. 1 克放射性元素, 经过 t 年的衰变后, 所剩下的重量 q 与 t 的关系为: $q=e^{-\lambda t}$. 问 1 克镭(放射性元素)经过 5000 年的衰变后还剩下多少? ($\lambda=0.044\%$)

4. 电容器放电过程中, 端电压 u 与时间 t 的关系是

$$u=u_0 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

试求出当 $u_0=9$, $R=20 \times 10^3$, $C=50 \times 10^{-6}$ 时, 从放电开始到放电结束需要多少时间?

第二节 对数函数

一、对数函数的图象和性质

在上一节中, 我们已经知道, 1 克放射性元素经过 t 年衰变后, 剩下的重量 q 是 t 的函数:

$$q=e^{-\lambda t}.$$

在科学实验中,有时还要研究它的相反问题:知道了衰变后剩下的重量 q , 求衰变时间 t .

由于指数运算与对数运算是互为逆运算的, 因此, 可用下式求得 t :

$$t = -\frac{1}{\lambda} \ln q.$$

这里 t 、 q 都是变量, 当 q 取一确定值时, t 就有确定的值与它对应, 所以 t 是 q 的函数.

我们把函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1, x > 0$), 叫做对数函数. 这里 x 是自变量, y 是因变量, a 是常量.

【例 1】 在同一平面直角坐标系中, 画出 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 和 $y = \lg x$ 的图象.

解: 为了计算方便, 我们用这样的方法来作出对应值表: 把函数关系 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 化成 $x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$, 然后给定 y 以一些确定的值(如…… $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ ……), 再算出 x 的对应值, 把算出的结果列成下表:

x		8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	
y		-3	-2	-1	0	1	2	3	

对于 $y = \lg x$, 亦即 $x = 10^y$, 同样可以列出下表:

x		0.1	0.32	1	1.8	3.2	5.6	10	
y		-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	

根据上面的表,可以描点画出它们的图象(图 1.4).

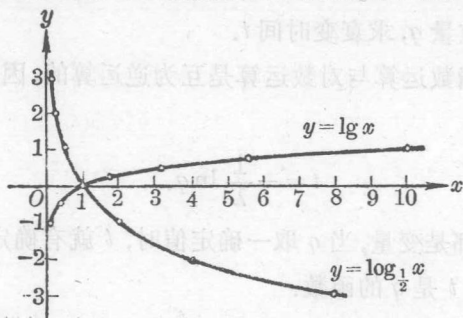


图 1.4

由图 1.4 可以看出,函数 $y = \log_a x$ 有以下一些性质:

- (1) 零与负数没有对数;
- (2) 1 的对数等于零,即 $\log_a 1 = 0$;
- (3) 底数本身的对数总等于 1,即 $\log_a a = 1$;
- (4) 当底数 $a < 1$ 时, $y = \log_a x$ 是减函数;底数 $a > 1$ 时, $y = \log_a x$ 是增函数.

试一试: 画出 $y = \log_2 x$ 的图象.

二、反函数

在指数函数 $y = a^x$ 中, x 是自变量, y 是因变量. 反过来, 如果我们把 y 看成自变量, x 看成因变量, 就得到了对数函数 $x = \log_a y$. 我们把这两个函数叫做互为反函数. 因为在习惯上是用 x 表示自变量, y 表示因变量的, 所以对数函数 $x = \log_a y$ 可改写成 $y = \log_a x$. 这就是说, 在 $y = a^x$ 中, 如果把自变量 x 与因变量 y 的位置对调, 便成为 $x = a^y$, 从而得到 $y = a^x$ 的反函数 $y = \log_a x$.

以前我们所学过的正弦函数 $y=\sin x$ 和反正弦函数 $y=\arcsin x$ 也是互为反函数的。

一般地说,

在函数 $y=f(x)$ 中,把自变量 x 与因变量 y 的位置对调,所得到的函数 $y=\varphi(x)$ 与 $y=f(x)$ 互为反函数.

试一试, 写出下列函数的反函数:

(1) $y=2x$;

(2) $y=\cos x$.

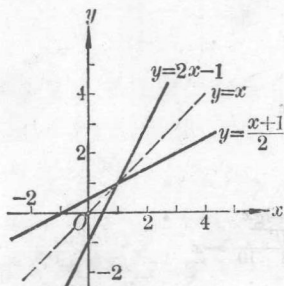
【例 2】 在同一平面直角坐标系中, 分别画出下列函数和它的反函数图象, 并加以比较.

(1) $y=2x-1$;

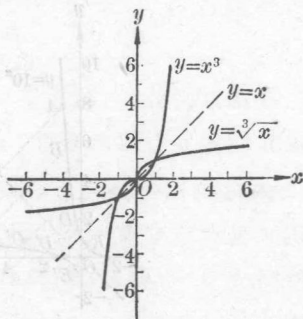
(2) $y=x^3$.

解: (1) 在 $y=2x-1$ 中, 把 x 与 y 对调, 得 $x=2y-1$. 因此, 它的反函数是 $y=\frac{x+1}{2}$. 这两个函数的图象如图 1.5(1) 所示;

(2) 在 $y=x^3$ 中, 把 x 与 y 对调得 $x=y^3$. 因此, 它的反函数是 $y=\sqrt[3]{x}$. 这两个函数的图象如图 1.5(2) 所示.



(1)



(2)

图 1.5

从图 1.5 可以看出, 直线 $y=2x-1$ 和 $y=\frac{x+1}{2}$ 关于直线 $y=x$ 对称. 曲线 $y=x^3$ 和 $y=\sqrt[3]{x}$ 也关于直线 $y=x$ 对称.

一般地说, 如果 $y=f(x)$ 和 $y=\varphi(x)$ 互为反函数, 那末, 它们的图象关于直线 $y=x$ 对称.

在画两个互为反函数的函数图象时, 我们只要先画出其中一个函数的图象, 再利用上述对称性, 就可以画出它的反函数图象.

【例 3】 在同一平面直角坐标系中, 画出函数 $y=10^x$ 和它的反函数 $y=\lg x$ 的图象.

解: 具体画法如下(图 1.6):

- (1) 先画出 $y=10^x$ 的图象;
- (2) 在 $y=10^x$ 的图象上取 A 、 B 、 C 、 D 、 E 五点, 再找出这五点关于直线 $y=x$ 的对称点 A' 、 B' 、 C' 、 D' 、 E' ;
- (3) 用光滑曲线连接 A' 、 B' 、 C' 、 D' 、 E' , 就得到 $y=\lg x$ 的图象.

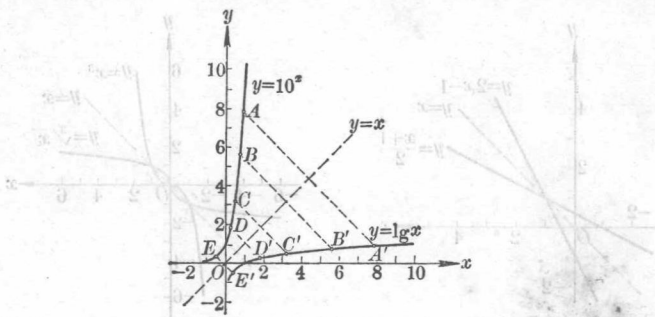


图 1.6

练 习 二

1. 画出函数 $y = \log_3 x$ 的图象.

2. 写出下列函数的反函数:

(1) $y = 5^x$;

(2) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$;

(3) $y = \frac{2}{3}x - 5$;

(4) $y = \lg x$;

(5) $y = 2x^3 + 1$;

(6) $y = \cos 2x$;

(7) $S = \pi r^2$;

(8) $W = W_0 e^{kt}$ (t 是自变量, W 是因变量).

3. 在同一平面直角坐标系中, 画出下列函数和它的反函数的图象:

(1) $y = x + 1$;

(2) $y = \frac{1}{8}x^3$;

(3) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$;

(4) $y = e^x$.

第二章 二次曲线

二次曲线(抛物线、椭圆和双曲线)在三大革命运动中用途很广。在这一章中,我们将研究这些曲线,通过直角坐标系上点与数(坐标)之间的对应关系,从曲线的某些性质出发,根据运动的观点建立它们的方程;然后,通过对方程的研究,进一步说明曲线的性质,并运用它们解决一些生产实际问题。

第一节 曲线和方程

数和形的概念都是从现实世界中得来的,它们之间有着一定的联系。在“一次函数”一章中,我们已经学过了直线方程。在平面直角坐标系中,直线 l 就可以用一个二元一次方程 $Ax+By+C=0$ 来表示,并且运用直线方程解决了一些生产实际问题。在生产斗争和科学实验中,除了直线图形外,还大量用到圆弧、抛物线等曲线图形。长期的生产斗争实践告诉我们:通过坐标系,把曲线表示为方程,再对方程进行数量分析,是研究曲线以解决生产实际问题的有效方法之一。

现在我们以圆为例,进一步说明曲线和方程之间的内在联系,以及如何通过直角坐标系把曲线表示为方程。

在直角坐标系里,我们以 $P(1, 2)$ 为圆心、 $R=5$ 为半径,用圆规画一个圆(图 2.1)。从画圆的过程中可以看到,圆规铅

芯与纸面接触的那个动点 M ，始终与定点 P 保持距离 5。这就是说，可以把圆这一曲线看成是动点 M 遵循一定的规律（与定点保持一定距离）而运动的轨迹。

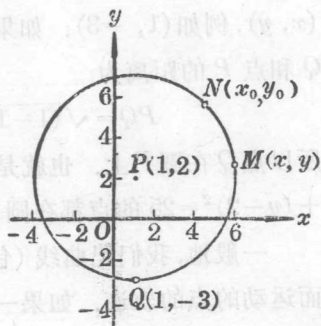


图 2.1

设动点 M 的坐标为 (x, y) ，
那末根据动点 M 的运动规律，
即到定点 P 的距离等于 5，可以得到等式

$$MP=5.$$

而

$$MP = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2},$$

$$\therefore \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 5.$$

化简后，即得方程

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25.$$

下面我们来分析方程 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ 和圆 P 之间的关系：

(1) 设点 $N(x_0, y_0)$ 为圆 P 上的任意一点。显然，它和点 P 的距离 $NP=5$ ，即

$$\sqrt{(x_0-1)^2 + (y_0-2)^2} = 5,$$

$$(x_0-1)^2 + (y_0-2)^2 = 25.$$

这说明，点 $N(x_0, y_0)$ 是适合方程 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ 的。
也就是说，圆 P 上任意一点的坐标都适合方程

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25.$$

(2) 设有适合于方程 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ 的一对实数

(x, y) , 例如 $(1, -3)$. 如果以 $(1, -3)$ 为坐标的点是 Q , 则点 Q 和点 P 的距离为

$$PQ = \sqrt{(1-1)^2 + (-3-2)^2} = 5,$$

所以点 Q 在圆 P 上. 也就是说, 凡是坐标适合方程 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ 的点都在圆 P 上.

一般地, 我们把曲线 (包括直线) 看成是遵循着某种规律而运动的点的轨迹. 如果一条曲线和一个方程间有如下的关系:

(1) 曲线上所有点的坐标都适合这个方程;

(2) 坐标适合于方程的所有点, 都在这条曲线上, 那末, 这个方程就叫做这条曲线的方程, 而这条曲线也就叫做这个方程所表示的曲线. 例如方程 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ 就叫做圆 P 的方程, 而圆 P 就叫做方程 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ 所表示的曲线.

【例 1】 下列两点是否在方程 $x^2 + y^2 = 25$ 所表示的曲线上:

(1) $P(3, -4)$; (2) $Q(-2\sqrt{5}, 2)$.

解: (1) $\because 3^2 + (-4)^2 = 25$,

即点 P 的坐标适合方程 $x^2 + y^2 = 25$, 所以点 P 是在方程 $x^2 + y^2 = 25$ 所表示的曲线上.

(2) $\because (-2\sqrt{5})^2 + 2^2 = 20 + 4 = 24 \neq 25$,

即点 Q 的坐标不适合方程 $x^2 + y^2 = 25$, 所以点 Q 不在方程 $x^2 + y^2 = 25$ 所表示的曲线上.

【例 2】 某一曲线的方程为 $y^2 = px$, 它通过点 $(1, -2)$, 试确定 p 的值, 并用描点法画出这条曲线.



解：因为点(1, -2)在这曲线上，所以 $x=1, y=-2$ 适合方程 $y^2=px$ 。以 $x=1, y=-2$ 代入方程 $y^2=px$ ，即

$$(-2)^2 = p \times 1,$$

$$\therefore p=4.$$

这就是说，这条曲线的方程为

$$y^2=4x.$$

从这方程中解出 y ，得

$$y = \pm 2\sqrt{x}.$$

列表(x 在 $x \geq 0$ 的范围内取值)：

x	0	1	2	3	4	5	6	
y	0	± 2	± 2.83	± 3.46	± 4	± 4.47	± 4.90	

根据上面的对应数值表，描点画出曲线(图 2.2)。

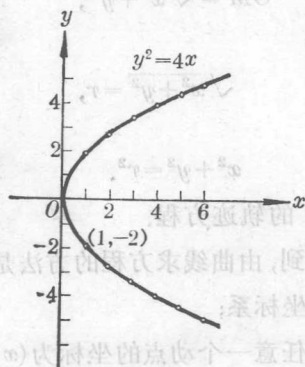


图 2.2

【例 3】 一根长为 $2r$ 的棒 AB ，它的两端各在互相垂直的两根轴上滑动(图 2.3)，试说出棒的中点 M 的运动轨迹，并