上海电視大学物理系試用教材

高等数学习題介答

第二册

曹偉傑 編

上海电視大学

第六章　导数的应用

第一部分　曲綫的斜率，切綫和法綫

基本内容

1．曲綫的斜率：若曲綫 $y=f(x)$ 在点 (x_1, y_1) 处的切綫的斜率为 m，那么曲綫在此点斜率也是 m，且它的值等于函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_1$ 处的导数 $f'(x_1)$

$$m=\operatorname{tg}\alpha=f'(x_1)。$$

2．曲綫 $y=f(x)$ 在点 (x_1, y_1) 处的切綫方程式

$$y-y_1=f'(x_1)(x-x_1)。$$

3．曲綫 $y=f(x)$ 在点 (x_1, y_1) 处的法綫方程式

$$y-y_1=-\frac{1}{f'(x_1)}(x-x_1)。$$

4．切綫长，法綫长，次切綫，次法綫。

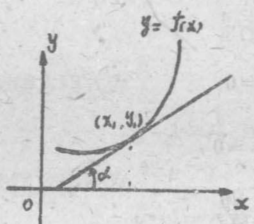

图　6.1.1

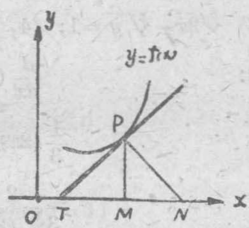

图　6.1.2

若曲綫 $y=f(x)$ 在点 $P(x, y)$ 处的切綫与法綫与 x 軸的交点分别为 T, N，自点 P 作 x 軸垂綫且垂足为 M，次切綫的方程式 $TM=\frac{y}{y'}$，次法綫的方程式 $MN=yy'$，次切綫之长 $\overline{TM}=\left|\frac{y}{y'}\right|$，次法綫之长 $\overline{MN}=|yy'|$，切綫长 $\overline{PT}=\left|\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right|$，法綫长 $\overline{PN}=|y\sqrt{1+y'^2}|$。

习题解答

1．求下列曲綫在已知点处的斜率：

(1) $x^2+3xy+y^2+1=0$; $(2, -1)$

解:
$$\frac{d}{dx}x^2+3\left(x\frac{dy}{dx}+y\frac{dx}{dx}\right)+\frac{d}{dx}y^2=0$$

$$2x+3x\frac{dy}{dx}+3y+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$(3x+2y)\frac{dy}{dx}=-(2x+3y)$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+3y}{3x+2y}$$

斜率为
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2\times2+3(-1)}{3\times2+2(-1)}=-\frac{1}{4}。$$

(2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$; $(4, 9)$

解:
$$\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}}+\frac{d}{dx}y^{\frac{1}{2}}=0$$

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\sqrt{\frac{y}{x}}$$

斜率为
$$\frac{dy}{dx}=-\sqrt{\frac{9}{4}}=-\sqrt{\frac{3^2}{2^2}}=-\frac{3}{2}.$$

(3) $\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{y}=1$; $(4, 1)$

解:
$$\frac{d}{dx}(2x)^{\frac{1}{3}}-\frac{d}{dx}y^{\frac{1}{3}}=0$$

$$\frac{1}{3}(2x)^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x)^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=2\cdot\sqrt[3]{\frac{y^2}{(2x)^2}}$$

斜率为
$$\frac{dy}{dx}=2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{(2\cdot4)^2}}=\frac{1}{2}。$$

2. 求下列各曲綫,在已知点之切綫及法綫之方程式:

(1) $y=x^2-3x+2$; $(0, 2)$

解: $f'(x)=2x-3$, $f'(0)=-3$ 为曲綫在$(0, 2)$点的斜率。

所以切綫方程式为

$$y-2=-3x \text{ 或 } y+3x-2=0$$

法綫方程式为

$$y-2=\frac{1}{3}x, \text{ 或 } x-3y+6=0。$$

(2) $y=\frac{3x}{x+1}$； (2, 2)

解： $$f'(x)=\frac{(x+1)\cdot 3-3x}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2}$$

$f'(2)=\frac{1}{3}$ 为曲綫在(2, 2)点的斜率。

所以切綫方程式为

$$y-2=\frac{1}{3}(x-2) \text{ 或 } x-3y+4=0$$

法綫方程式为

$$y-2=-3(x-2) \text{ 或 } 3x+y-8=0。$$

(3) $x^2-3xy+y^2+1=0$； (2, 1)

解： $$2x-3y-3xy'+2yy'=0$$

$$y'(2y-3x)=3y-2x$$

$$\therefore\ y'=f'(x)=\frac{3y-2x}{2y-3x}$$

$$f'(2)=\frac{3-4}{2-6}=\frac{1}{4}。$$

切綫方程式为

$$y-1=\frac{1}{4}(x-2) \text{ 或 } x-4y+2=0$$

法綫方程式为

$$y-1=-4(x-2) \text{ 或 } 4x+y-9=0。$$

(4) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$； (x_1, y_1)

解： $$2b^2x+2a^2yy'=0, \quad y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

切綫方程式为

$$y-y_1=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1) \text{ 或 } b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2$$

法綫方程式为

$$y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1) \text{ 或 } a^2y_1x-b^2x_1y+(a^2+b^2)x_1y_1=0。$$

3．求曲綫 $y=x-\frac{1}{x}$ 与 x 軸交点处的斜率。

解：首先求曲綫 $y=x-\frac{1}{x}$ 与 x 軸的交点

即解联立方程式：

$$\begin{cases} y=x-\dfrac{1}{x}. & (1) \\ y=0 & (2) \end{cases}$$

(2)代入(1)，得

$$x-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}(x^2-1)=0 \quad \therefore\ x=\pm 1$$

且由 $y=x-\frac{1}{x}$ 知 $y'=f'(x)=1+\frac{1}{x^2}$

故曲綫在 $x=1$，-1 处的斜率是

$$f'(1)=1+\frac{1}{1^2}=2,\quad f'(-1)=1+\frac{1}{(-1)^2}=2$$

即曲綫与 x 軸交点处的斜率为 2。

若曲綫与 x 軸交点处切綫与 x 軸的夹角为 α

$$\alpha=\operatorname{arc\,tg} 2 \doteqdot 63°26' \text{（参考三角函数表）。}$$

4．求下列各曲綫之水平切綫（与 x 軸平行的切綫）及鉛直切綫（与 y 軸平行的切綫）之切点。

首先我們必須明确下面的結果，即水平切綫的斜率为 $y'=0$；鉛直切綫的斜率为 $y'=\pm\infty$ 或 $x'=0$ $y'=\frac{dy}{dx}$，$x'=\frac{dx}{dy}$。

(1) $y=x^2-6x$

解：$y'=2x-6$

$y'=0$ 得 $x=3$，故切点为 $(3,\ -9)$。

(2) $x^2+4y^2-8x=0$

解：将原式求导数：

$$2x+8yy'-8=0$$

$$y'=\frac{8-2x}{8y}$$

設 $y'=0$，得　　　　$x=4$

故切点为 $(4,\ 2)$ 及 $(4,\ -2)$

又　　　　$x'=\dfrac{8y}{8-2x}$

設 $x'=0$，得　$y=0$

故切点为$(0,0)$及$(8,0)$。

(3) $x=3y-y^2$

解：$$x'=3-2y$$

設 $x'=0$，得　$y=\frac{3}{2}$

故切点为$\left(\frac{9}{4},\frac{3}{2}\right)$。

(4) $x^2+4xy-y^2=9$

解：将原式求导数

$$2x+4xy'+4y-2yy'=0$$
$$y'(4x-2y)=-2x-4y$$
$$y'=\frac{2x+4y}{2y-4x}=\frac{x+2y}{y-2x}$$

設 $y'=0$，得 $x+2y=0$，即 $x=-2y$

故水平切綫之切点为 $x+2y=0$ 及 $x^2+4xy-y^2=9$ 之交点，即 $y=$虚数，因而无水平切綫。

又　$$x'=\frac{2y-4x}{2x+4y}=\frac{y-2x}{x+2y}$$

設 $x'=0$，得　$y=2x$

故鉛直切綫之切点为 $y=2x$ 与 $x^2+4xy-y^2=9$ 之交点

$$\therefore\quad x=\pm\frac{3}{5}\sqrt{5}$$

故鉛直切綫之切点为$\left(\frac{3}{5}\sqrt{5},\ \frac{6}{5}\sqrt{5}\right)$及$\left(-\frac{3}{5}\sqrt{5},\ -\frac{6}{5}\sqrt{5}\right)$。

*(5) $y=x^2\sqrt{x+1}$

解：$$y'=2x\sqrt{x+1}+x^2\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{x(5x+4)}{2\sqrt{x+1}}$$

設 $y'=0$，得　$x=0,\ -\frac{4}{5}$

故切点为$(0,0)$及$\left(-\frac{4}{5},\ \frac{16}{25\sqrt{5}}\right)$。

又　$$x'=\frac{2\sqrt{x+1}}{x(5x+4)}$$

設 $x'=0$，得　$x=-1$

故切点为$(-1, 0)$。

注意：本問題的函数的定义域为 $x+1\geqslant 0$，$\therefore x\geqslant -1$。即$[-1, \infty)$。而上边我們所論各点皆在函数定义域內，故为所求。

*5. 設一球之路徑之方程式为 $y=x-\dfrac{x^2}{100}$，距离单位为一米，x 軸为水平綫，原点为擲球起始之点。

(1) 此球之投擲角如何?

(2) 設一直立墙，距离原点 75 米，問球击中此墙时，其角度如何?

(3) 設此球落于 16 米高之水平屋頂上，其击中屋頂时之角度如何?

(4) 設自 24 米高之楼頂上抛擲，問球触地面时成何角度?

(5) 設自傾斜角 45° 之山頂上抛擲，問球触地面时成何角度?

解：
$$y=x-\frac{x^2}{100}$$

(1) $f'(x)=1-\dfrac{x}{50}$

$$f'(0)=1$$

若球之投擲方向与 x 軸所成之角为 θ

$$\operatorname{tg}\theta=1,\quad \theta=\frac{\pi}{4}$$

即球以 $\dfrac{\pi}{4}$ 之方向擲之。(图 6.1.3)

(2) 設球击中此墙时所成之角度为 α。(图 6.1.4)

欲求 α，首先我們考虑球之路徑方程也就是該曲綫在 $x=75$ 处的斜率 $\operatorname{tg}\beta$ 为何?

$$\operatorname{tg}\beta=f'(75)=1-\frac{75}{50}=-\frac{1}{2},\qquad \therefore\ \beta=153°26'$$

那么
$$\alpha=153°26'-90°=63°26'$$

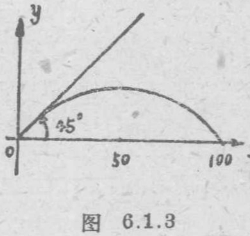

图 6.1.3

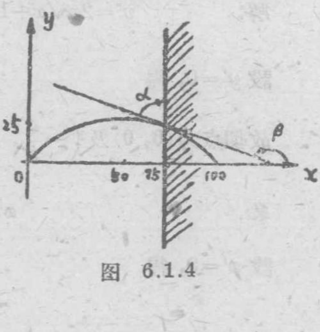

图 6.1.4

(3) 設击中屋頂时角为 θ。(图 6.1.5)

当 $y=16$ 时有：　$16=x-\dfrac{x^2}{100}$，$x=20$ 或 80

则　$\operatorname{tg}\theta_1=f'(20)=1-\dfrac{20}{50}=\dfrac{30}{50}=\dfrac{3}{5}$，　$\theta_1=58°$

又　$\operatorname{tg}\theta_2=f'(80)=1-\dfrac{80}{50}=\dfrac{-30}{50}=-\dfrac{3}{5}$，$\theta_2=122°$

θ 可能有两值 $\theta_1=58°$ 或 $\theta_2=122°$

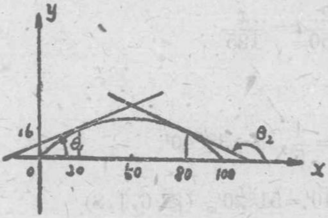

图　6.1.5

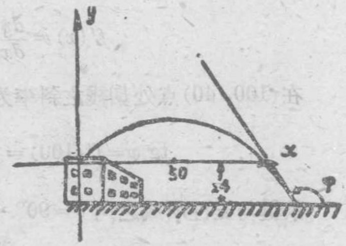

图　6.1.6

(4) 設球触地面时成角度 φ。(图 6.1.6)

当 $y=-24$ 时有：　$-24=x-\dfrac{x^2}{100}$，$x=120$

$$\operatorname{tg}\varphi=f'(120)=1-\frac{120}{50}=-\frac{7}{5}$$

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{7}{5}\right)+\pi。$$

(5) 首先求 $\begin{cases} y=x-\dfrac{x^2}{100} \\ y=-x \end{cases}$ 的交点为 $(200,\ -200)$

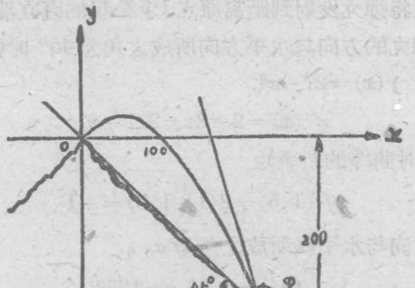

图　6.1.7

$$\operatorname{tg}\varphi=f'(200)=1-\frac{200}{50}=-3$$

卽所求角 $\varphi=\operatorname{arc\,tg}(-3)+\pi$。(图 6.1.7)

6. 設有一吊桥，其鉄鏈成一抛物綫形，两端系于相距 200 尺之支柱上，鉄鏈之最低点在悬点下 40 尺处，求鉄鏈与支柱所成之角。

解：設吊桥之方程式为 $x^2=py$，$100^2=40p$，$p=250$.

抛物綫为 $$x^2=250y$$

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{2}{250}x=\frac{x}{125}$$

在(100, 40)点处切綫之斜率为

$$\operatorname{tg}\varphi=f'(100)=\frac{100}{125}=\frac{4}{5},\ \varphi=38°40'$$

鉄鏈与支柱所成之角 $\theta=90°-38°40'=51°20'$。(图 6.1.8)

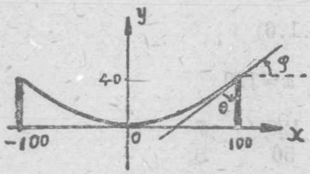

图 6.1.8

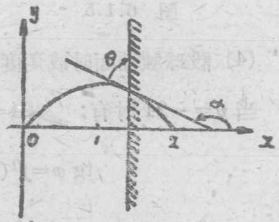

图 6.1.9

7. 已知由原点发射出的彈丸的彈道的方程式为 $y=2x-x^2$，x 軸为水平綫，y 軸为垂直綫，距离的单位为 1 公里。(图 6.1.9)

(1) 由原点将彈丸发射到距离原点 1.5 公里的直立墙上时其角度如何?

(2) 求当彈丸的方向与水平方向所成之角为 45° 时彈丸的位置。

解：(1) $\because f(x)=2x-x^2$

$$f'(x)=2-2x=2(1-x)$$

在 $x=1.5$ 时曲綫的斜率为

$$f'(1.5)=2(1-1.5)=-1$$

若彈丸的方向与水平綫所成之角为 α，

$$\operatorname{tg}\alpha=-1,\ \alpha=135°$$

彈丸方向与直立墙所成之角 $\theta=45°$。

(2) $f'(x)=2(1-x)=\mathrm{tg}\,45^\circ=1$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{2}(=0.5\text{ 公里})$$

$$\therefore\quad y=2\cdot\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}(=0.75\text{ 公里})$$

彈丸的位置在点$\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$。

8. 求下列各曲綫在所示点之切綫及法綫方程式并求其次切綫及次法綫之长。

(1) $y=\frac{x^2}{4}$; $(2,\ 1)$

(2) $x^2+4y^2=25$; $(3,\ 2)$

(3) $xy=12$; $(3,\ 4)$

(4) $x^2-2y^3=18$; $(6-3)$

解: (1) $y=\frac{x^2}{4}$; $(2,\ 1)$

$$y'=f'(x)=\frac{x}{2}$$

$$f'(2)=\frac{2}{2}=1$$

故在$(2,\ 1)$之切綫方程式为 $y-1=x-2$ 或 $x-y-1=0$

在$(2,\ 1)$之法綫方程式为 $y-1=-(x-2)$ 或 $x+y-3=0$

次切綫长$=1$，次法綫长$=1$。

(2) $x^2+4y^2=25$; $(3,\ 2)$

$$2x+8yy'=0$$

$$\therefore\quad y'=-\frac{x}{4y}\qquad y'\Big|_{\substack{x=3\\y=2}}=-\frac{3}{8}$$

故在点$(3,\ 2)$之切綫方程式为 $y-2=-\frac{3}{8}(x-3)$ 或 $3x+8y-25=0$

在点$(3,\ 2)$之法綫方程式为 $y-2=\frac{8}{3}(x-3)$ 或 $3y-8x+18=0$

$$\text{次切綫之长}=\left|\frac{y}{y'}\right|=\left|\frac{2}{-\frac{3}{8}}\right|=\frac{16}{3}$$

$$\text{次法綫之长}=|yy'|=\left|-\frac{3}{8}\cdot 2\right|=\frac{3}{4}$$

(3) $xy=12$; $(3,\ 4)$

$$xy'+y=0$$

$$y'=-\frac{y}{x}=-\frac{4}{3}$$

$\therefore$ 切綫之方程式为 $y-4=-\frac{4}{3}(x-3)$ 或 $4x+3y-24=0$

法綫之方程式为 $y-4=\frac{3}{4}(x-3)$ 或 $4y-3x-7=0$

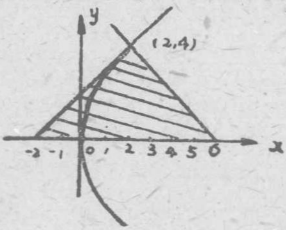

图 6.1.10

次切綫之长$=\left|\frac{4}{-\frac{4}{3}}\right|=3$

次法綫之长$=\left|4\left(-\frac{4}{3}\right)\right|=\frac{16}{3}$。

(4) $x^2-2y^3=18$; $(6,-3)$

$$2x-4yy'=0$$

$$\therefore\quad y'=\frac{x}{2y}=\frac{6}{-6}=-1$$

$\therefore$ 切綫之方程式为 $y+3=-(x-6)$ 或 $x+y-3=0$

法綫之方程式为 $y+3=(x-6)$ 或 $x-y-9=0$

次切綫之长$=\left|\frac{y}{y'}\right|=\left|\frac{-3}{-1}\right|=3$

次法綫之长$=|yy'|=|(-3)(-1)|=3$。

9．求曲綫 $y^2=8x$ 在 $(2,4)$ 点之切綫、法綫与 x 軸所成三角形之面积。

解： $y^2=8x$, $2yy'=8$, $\therefore y'=\frac{8}{2y}=\frac{4}{y}$, $y'\Big|_{\substack{x=2\\y=4}}=1$

切綫之方程式：$y-4=x-2$ 或 $x-y+2=0$，交 x 軸于 -2;

法綫之方程式：$y-4=-(x-2)$ 或 $x+y-6=0$，交 x 軸于 6。

三角形面积 $S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2&4&1\\-2&0&1\\6&0&1\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}-2&1\\6&1\end{vmatrix}=-2(-2-6)=16$,

注：或利用底乘高之半直接求出三角形的面积 $S=\frac{(2+6)\times 4}{2}=16$。

10．求曲綫 $4x^2+y^2=20$ 在 $(1,-4)$ 点之切綫、法綫与 y 軸所成三角形之面积。

解：

$$4x^2+y^2=20$$

$8x+2yy'=0$，$\therefore$ $y'=-\frac{8x}{2y}=\frac{-4x}{y}$，$y'\Big|_{\substack{x=1\\y=-4}}=-\frac{4}{-4}=1$

切綫之方程式：$y+4=x-1$，交 y 軸于 -5；

法綫之方程式：$y+4=-(x-1)$ 或 $y+x+3=0$，交 y 軸于 -3。

所求之面积

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & -4 & 1\\ 0 & -5 & 1\\ 0 & -3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-5 & 1\\ -3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(-5+3)=-1\text{（面积取絕对值）}$$

即
$$S=1$$

或
$$S=\frac{[(-3)-(-5)]\times 1}{2}=1。$$

11. 求下列各組曲綫之交角：

(1) $4y=x^2+4$，　$x^2=8-2y$

解：
$$\begin{cases}4y=x^2+4 & (1)\\ x^2=8-2y & (2)\end{cases}$$

(2)代(1)得

$$4y=8-2y+4$$
$$6y=12,\quad \therefore\ y=2$$

代入(2)得

$$x^2=8-4=4$$
$$x=\pm 2$$

即所求之交点为 $(2, 2)$，$(-2, 2)$。

由(1)　　$4y'=2x,\quad y'=\dfrac{x}{2}$

由(2)　　$2x=-2y',\quad y'=-x$

在点 $(2, 2)$ 处 $4y=x^2+4$ 的斜率为 1；

在点 $(2, 2)$ 处 $x^2=8-2y$ 的斜率为 -2。

設其交角为 θ_1，$\operatorname{tg}\theta_1=\dfrac{-2-1}{1+(1)(-2)}=\dfrac{-3}{-1}=3$

$$\theta_1=71^\circ 34'$$

在点 $(-2, 2)$ 处 $4y=x^2+4$ 的斜率为 -1；

在点 $(-2, 2)$ 处 $x^2=8-2y$ 的斜率为 2。

設其交角为 θ_2，

$$\operatorname{tg}\theta_2=\frac{-1-2}{1+(-1)(2)}=3$$

$$\theta_1=\theta_2=71°\,34'$$

(2) $4y=2x^2-3x$, $4y=x^2+4$

解:
$$\begin{cases}4y=2x^2-3x & (1)\\ 4y=x^2+4 & (2)\end{cases}$$

解之以求交点得

$$x=4,\quad y=5$$

或
$$x=-1,\ y=\frac{5}{4}$$

由(1)得
$$y'=\frac{4x-3}{4}$$

$$y'|_{x=4}=\frac{13}{4}$$

$$y'|_{x=-1}=-\frac{7}{4}$$

由(2)得
$$y'=\frac{x}{2}$$

$$y'|_{x=4}=2$$

$$y'|_{x=-1}=-\frac{1}{2}$$

所以二交角为

$$\theta_1=\text{arc tg}\,\frac{\frac{13}{4}-2}{1+\frac{13}{2}}=\text{arc tg}\,\frac{1}{6}=9°28'$$

$$\theta_2=\text{arc tg}\,\frac{\frac{7}{4}-\frac{1}{2}}{1+\frac{7}{8}}=\text{arc tg}\,\frac{2}{3}=33°41'$$

(3) $y^2=x^3-4$, $x^2+y^2-6x+4=0$

解:
$$\begin{cases}y^2=x^3-4 & (1)\\ x^2+y^2-6x+4=0 & (2)\end{cases}$$

解之以求交点

$$x=2,\ y=\pm 2$$

由(1)
$$y'=\frac{3x^2}{2y}$$

$$y'\Big|_{\substack{x=2\\y=2}}=3$$

$$y'\Big|_{\substack{x=2\\y=-2}}=-3$$

由(2)
$$y'=\frac{-x+3}{y}$$

$$y'\Big|_{\substack{x=2\\y=2}}=\frac{1}{2}$$

$$y'\Big|_{\substack{x=2\\y=-2}}=-\frac{1}{2}$$

所以二交角为

$$\theta_1=\text{arc tg}\,\frac{3-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}}=45°$$

$$\theta_2=\text{arc tg}\,\frac{-3+\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}}=\text{arc tg}(-1)=135°$$

(4) $xy=10$,　$x^2+y^2=29$

解:
$$\begin{cases}xy=10 & (1)\\ x^2+y^2=29 & (2)\end{cases}$$

解之以求交点得(5, 2), (−5, −2), (2, 5), (−2, −5)。

由(1)
$$y'=-\frac{y}{x}$$

$$y'\Big|_{\substack{x=5\\y=2}}=-\frac{2}{5},\quad y'\Big|_{\substack{x=-5\\y=-2}}=-\frac{2}{5},\quad y'\Big|_{\substack{x=2\\y=5}}=-\frac{5}{2},\quad y'\Big|_{\substack{x=-2\\y=-5}}=-\frac{5}{2}$$

由(2)
$$y'=-\frac{x}{y}$$

$$y'\Big|_{\substack{x=5\\y=2}}=-\frac{5}{2},\quad y'\Big|_{\substack{x=-5\\y=-2}}=-\frac{5}{2},\quad y'\Big|_{\substack{x=2\\y=5}}=-\frac{2}{5},\quad y'\Big|_{\substack{x=-2\\y=-5}}=-\frac{2}{5}$$

故其交角　$\theta=\text{arc tg}\dfrac{-\frac{2}{5}+\frac{5}{2}}{1+1}=\text{arc tg}\,\dfrac{21}{20}=41°24'$

12. 求証双曲綫 $x^2-y^2=5$ 与椭圓 $4x^2+6y^2=60$ 之交角为直角。

証：
$$\begin{cases} x^2-y^2=5 & (1) \\ 4x^2+6y^2=60 & (2) \end{cases}$$

解之以求交点

$$x=\pm 3,\ y=\pm 2$$

由(1)　$2x-2yy'=0$，$m_1=y'=\left.\dfrac{x}{y}\right|_{\substack{x=\pm 3\\ y=\pm 2}}=\dfrac{3}{2}$

由(2)　$8x+12yy'=0$，$m_2=y'=-\left.\dfrac{8x}{12y}\right|_{\substack{x=\pm 3\\ y=\pm 2}}=-\dfrac{2}{3}$

$$\because\quad m_1\cdot m_2=\frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)=-1$$

∴　双曲綫 $x^2-y^2=5$ 与椭圓 $4x^2+6y^2=60$ 之交角为直角。

13．求証曲綫 $x^3+y^3=3axy$ 在与抛物綫 $y^2=ax$ 之交点的切綫平行于 y 軸。

証明：
$$\begin{cases} x^3+y^3=3axy & (1) \\ y^2=ax & (2) \end{cases}$$

解之以求交点 $(x,\ y)$ 得 $x=0$，$y=0$，$x=\sqrt[3]{4}\,a$，$y=\sqrt[3]{2}\,a$

由(1)
$$3x^2+3y^2y'=3axy'+3ay$$
$$y'=\frac{3x^2-3ay}{3ax-3y^2}=\frac{x^2-ay}{ax-y^2}$$

在点 $(0,\ 0)$，$(\sqrt[3]{4}\,a,\ \sqrt[3]{2}\,a)$ 处导数为无窮，故切綫平行于 y 軸。

14．求抛物綫 $y^2=16x$ 与 x 軸成 45° 之法綫方程式。

解：
$$y^2=16x,$$
$$2y\frac{dy}{dx}=16,\quad \therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{8}{y}$$
$$-\frac{y}{8}=1,\ y=-8,\ x=4$$

所以法綫之方程式为
$$y+8=x-4$$
或
$$y-x+12=0$$

15．求圓 $x^2+y^2=41$ 平行于直綫 $4x+5y=12$ 之切綫方程式。

解：
$$x^2+y^2=41,\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

又直綫 $4x+5y=12$ 之斜率为 $-\dfrac{4}{5}$，　$\therefore\ y=\dfrac{5}{4}x$

$$x^2+\frac{25}{16}x^2=41$$

$$x^2=16, \quad y^2=25$$

$$\therefore \quad x=\pm 4, \quad y=\pm 5$$

所以切綫方程式为

$$y-5=-\frac{4}{5}(x-4) \text{ 或 } 4x+5y=41;$$

$$y+5=-\frac{4}{5}(x+4) \text{ 或 } 4x+5y=-41。$$

16．求双曲綫 $4x^2-y^2=36$，垂直于直綫 $x+2y=4$ 之切綫之方程式。

解：
$$4x^2-y^2=36$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x}{y}$$

又直綫 $x+2y=4$ 之斜率为 $-\frac{1}{2}$

$$\frac{4x}{y}=2, \quad y=2x$$

切綫方程式为

$$y-y_1=2(x-x_1) \text{ 又 } y_1=2x_1;$$

$$y-2x_1=2x-2x_1 \quad \text{或} \quad y=2x。$$

17．求証抛物綫 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ 上任一点之切綫在坐标軸上的截距之和为常数，等于 a。

証：
$$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$$

假定抛物綫 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ 上 (x_1, y_1) 处考虑其切綫方程式

$$y-y_1=-\frac{y_1^{\frac{1}{2}}}{x_1^{\frac{1}{2}}}(x-x_1)$$

在 x 軸上的截距为

$$y=0 \text{ 时，} \quad x=x_1+y_1^{\frac{1}{2}}x_1^{\frac{1}{2}}。$$

在 y 軸上的截距为

$$x=0 \text{ 时，} \quad y=y_1+x_1^{\frac{1}{2}}y_1^{\frac{1}{2}}。$$

截距之和为

$$x_1+y_1+2x_1^{\frac{1}{2}}y_1^{\frac{1}{2}}=(x_1^{\frac{1}{2}}+y_1^{\frac{1}{2}})^2=(a^{\frac{1}{2}})^2=a。$$

18. 求証内擺綫 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 上任一点之切綫，其介于二軸間之部分为常数，等于 a。

証：$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$，在 (x_1, y_1) 处斜率 $\frac{dy}{dx}=-\frac{y_1^{\frac{1}{3}}}{x_1^{\frac{1}{3}}}$

切綫之方程式为

$$y-y_1=-\frac{y_1^{\frac{1}{3}}}{x_1^{\frac{1}{3}}}(x-x_1)$$

令 $y=0,\ x=x_1+x_1^{\frac{1}{3}}y_1^{\frac{2}{3}}$

令 $x=0,\ y=y_1+x_1^{\frac{2}{3}}y_1^{\frac{1}{3}}$

$$\therefore\quad \sqrt{x^2+y^2}=(x_1^{\frac{2}{3}}+y_1^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}}=a。$$

19. 曲綫的参数方程为 $x=\frac{3t}{1+t^3}$，$y=\frac{3t^2}{1+t^3}$，求当 $t=2$ 所对应曲綫上的点的切綫、法綫方程式。

解：
$$\frac{dx}{dt}=\frac{3(1+t^3)-3t\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}=\frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2},$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{6t(1+t^2)-3t^2\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}=\frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2}=\frac{2(2-2^3)}{1-2\cdot 2^3}=\frac{4}{5}$$

$t=2$ 时
$$x=\frac{3\cdot 2}{1+2^3}=\frac{2}{3},$$

$$y=\frac{3\cdot 2^2}{1+2^3}=\frac{4}{3}。$$

$\therefore$ 切綫方程式为 $y-\frac{4}{3}=\frac{4}{5}\left(x-\frac{2}{3}\right)$ 或 $4x-5y+4=0$；

法綫方程式为 $y-\frac{4}{3}=-\frac{5}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)$ 或 $15x+12y-26=0$。

20. 証明：抛物綫的次切綫长被其頂点二等分，次法綫长为定值。

解：設抛物綫方程为 $y^2=4cx$（取 $c>0$）