江苏省小学教师进修教材

算术理论

（修订本）

江苏省中小学教师进修教材编写组主编

目　录

第三章　分数（百分数）集

第一章 整数集

第一节 整数的认识

一 自然数

1. 自然数的起源和概念

自然数的概念导源于“集合”的概念。现在我们先介绍集合的简单概念。

集合就是具有某种共同特征的一些单独物体组成的整体。组成集合的单独物体，叫做这个集合的**元素**。例如一只手的所有手指，就可以作为一个集合，每个手指就是这个集合里的元素。一条直线上所有的点也可以作为一个集合，每一个点就是这个集合里的元素。也可以把太阳系的九大行星作为一个集合，每一个行星就是这个集合里的元素。

如果一个集合里的每一个元素，都可以在另一个集合里找到一个唯一的元素和它相配，并且反过来，第二个集合里的每一个元素，都可以在第一个集合里找到一个唯一的元素和它相配，我们就说这两个集合里的元素**一一对应**。例如电影院里全部座位组成的集合与一场电影票的全部位号组成的集合，建立了一一对应的关系。如果两个集合间能依照某种法则建立起一一对应的关系，我们就说这两个集合是**等价集合**。例如左手手指的集合与右手手指的集合，就是等价集合，但是一只手的手指的集合和一个人的耳朵的集合，它们之间的元素不能建立一一对应的关系，所以不是等价集合。因此，

两个等价集合里的元素的个数是相等的，反之，如果两个集合里的元素的个数相等，它们就是等价的。

如果第一个集合和第二个集合等价，第二个集合和第三个集合等价，那么第一个集合和第三个集合也等价，这就是等价集合的传递性。根据这一性质，我们可以把所考察的集合进行分类，把彼此等价的集合放在这一类里。例如，人体上的眼睛的集合、耳朵的集合、手的集合和足的集合，彼此是等价的，放在一类的集合里。而左手和右手上的手指、左足和右足上的足趾，彼此也是等价的，可以放在另一类的集合里。人们为了计数，开始用彼此等价的集合中的一个集合作为与之等价集合的代表，例如，看见两只鹿逃走了，便说有耳朵只鹿逃走了；打死了两只兔子，便说打死了耳朵只兔子，这样“耳朵”便成了这一等价集合的标记。用这个标记的名称“耳朵”来表示元素的多少。

虽然我们现在已经无法了解到自然数的名称（一类等价集合的标记）的原始意义，但在各民族的语言中还不难找出些蛛丝马迹来。例如，汉语中的“一”就是“余”（是我的意思），“二”就是“尔”（是你的意思，含有你我两个人的意思）的假借，也有用“日”、“耳”等分别作为“一”和“二”一类等价集合的标记的。

在社会发展的最初阶段，人们在生产劳动中，例如，狩猎、捕鱼、牲畜饲养和劳动工具制造等，需要计数生产量和分配量，就逐渐从等价集合的标记中产生了数的概念。这时，计数还紧紧地和实物连系在一起，没有从实物中抽象出来。随着人类社会的发展，人们对于计数的认识也不断发展，数与具体物体的集合才逐渐分离开来，并且采用了数字符号。数字的引进是人类对数的认识的突变和飞跃，它标志着“数”

已从具体事物中抽象出来，具有独立的地位，并且开始形成了反映物体个数的数的概念，即“一、二、三、四……”，这就是**自然数**。由此可见，每一个自然数实际上是一类等价集合的有限集合的标记，它表示了一类等价集合中任一集合里的元素的个数。

“一”是自然数的单位，“二”是两个单位所组成的集合，“三”是三个单位所组成的集合，……。因此，每一个自然数都可以把它看作是一个或几个单位组成的集合。

2. 自然数列及其性质

在单位“一”上添上一个单位就得到两个单位，再添上一个单位就得到三个单位，这样依次添上去，就可以得到依次排列着的一列数：一、二、三、四……，这样由依次排列着的全体自然数组成的集合，叫做**自然数列**。如果用A表示自然数列这个集合，则有

A = { 一、二、三、四…… }

每个自然数都是自然数列里的一个元素。

自然数列有以下性质：

(1) 自然数列是有始的　自然数列最前面的一个自然数是“一”，它是自然数列里最小的一个数，它不跟随任何一个自然数。所以说自然数列是有始的。

(2) 自然数列是有序的　自然数列里的自然数都是按照一定的顺序排列着的。每一个自然数后面都有一个并且只有一个后继数；每个自然数（除“一”以外）都有一个并且只有一个先行数。所以说自然数列是有序的。

(3) 自然数列是无限的　自然数列里不存在最后的数，即自然数列里的元素是无限的，自然数列是一个无限集合。

根据上面的性质可知，每一个自然数在自然数列里的位

置是确定不移的，所以每一个自然数可以由它在自然数列里所占有的位置来确定。很明显，如果某一个自然数的后继数是a或b，那么a、b是同一个自然数。

3. 数数原则

为了要知道某种事物的多少，我们就须从“一”开始，按自然数列的顺序数一数。例如，我们不知道教室里有多少张课桌，我们就把教室里的一张课桌和自然数“一”相对应，把它叫做第一张课桌，再把另一张课桌和自然数“二”相对应，把它叫做第二张课桌，如此继续下去，使每一张课桌依次都和已经对应过的自然数后面的一个自然数相对应，这种过程，就是计数的过程。如果教室里的课桌的集合和“一”到“四十八”这些自然数都一一对应，那么教室里课桌的集合和“一”到“四十八”这些自然数的集合是等价集合。

因为自然数列里的自然数是按照一定的顺序排列着的，所以可以把所用到的最后一个自然数“四十八”作为课桌这一等价集合元素多少的标记。

由这样的计数，我们就知道教室里课桌的数目是四十八。因此，计数的过程就是把所要研究的集合的元素和自然数列里的自然数，从一开始，建立起一一对应的关系，而最后所得的数，就是计数的结果。

数数有以下的原则：

(1) 数事物时，只要每个事物都数到，并且只数一次，那么所得结果是唯一的，它与数的次序无关；

(2) 数事物时，可以用其他等价集合的事物，代替要数的事物，所得的结果是不变的；

(3) 数事物时，说出的最后一个数，就是数的结果。但

是数数的过程是无限的，如果再有要数的事物，还能继续数下去，这就是说自然数可以无限制的数下去。

我们在数事物时，为了数起来方便，不一定一个一个地数，也可以一组一组地数，——两个两个地数，五个五个地数，十个十个地数等等。

4．基数与序数

我们计数的时候，一方面确定了所要研究的元素的数量（例如数教室里课桌的多少），另一方面又进行了元素的编号（例如第一张，第二张……），确定了先后的顺序。所以自然数有两种意义，两种用法。

用来表示集合中元素多少的数叫做**基数**；用来表示集合中元素的次序（即第几号）的数叫做**序数**。因为作用不同，自然数用来表示次序的时候，往往在它们的前面（或后面）加上一个“第”（或“号”）等字样，如第一、第二（或一号、二号）等。

二　零与扩大自然数列

零　自然数可以用来表示已知集合中含有元素的个数，但是我们常常会遇到集合中一个元素也没有．例如，教室里一个学生也没有，停车场上一辆汽车也没有，这样成了一个元素也没有的集合，这样的集合叫做**空集合**，简称**空集**。为了表示“没有”就产生了一个新的数——**零**。数零是空集合的标记。

数零表示没有，仅是最初的含义，随着人类不断实践，对零的认识也有了发展。例如摄氏零度，就不能理解为没有温度，它表示一个非常确定的温度——在标准状态下水的冰点。

我们不能从自然数里得到零，所以零不是自然数。如果

把它和自然数列里的数放在一起，我们就把它放在“一”的前面写成零、一、二、三、……这就成了**扩大的自然数列**。

零是数的一次扩张，引进了零以后，我们把自然数和零都叫做**整数**，它们组成了**整数集**。很显然，自然数集和空集都是整数集的真子集。

三　进位制

对于每一个自然数如果都用一个独立的名称来读出它，那是非常不便的。因此，大多数民族在文化发展的最初阶段，由于实际生活的需要，都已经感到有必要创立一种读数记数制度。通过长期的实践不断总结创造了各种进位制。

现今世界上通用的大多是十进位制。

1.　十进位制

人们常常用十个手指来计数，所以创造出一种“十进”的计数方法，叫做**十进位制**。它的特点是每十个某一单位就组成和它相邻的较高级的一个单位，简称“**满十进一**”。

(1) 整数的读数与记数原则

自然数里最初的**九**个数，各有一个独立的名称，就是：

一、二、三、四、五、六、七、八、九。

十个一叫做“十”，十个十叫做“百”，十个百叫做“千”，十个千叫做“万”，万以上的单位依次是“十万”、“百万”、“千万”、“亿”、“十亿”、“百亿”、“千亿”等。**这是按照“满十进一”规定的计数单位**。

我们利用这些数的名称和计数单位，可以读出其他的整数来。这就是读数原则。例如，一个数含有五个万、三个千、四个百、六个十和七个一，就读做五万三千四百六十七。

用来记数的符号叫做**数字**。现在我们常用1、2、3、

4、5、6、7、8、9和0这十个数字，来分别表示一、二、三、四、五、六、七、八、九和零。

一个数字所占的位置叫做**数位**。同一个数字随着它在所记的数里的位置不同，所表示的数值也就不同。就是说每一个数字除了本身的值以外，还有一个“位置值”，这就是**位值原则**。把十个数字和位值原则结合起来，就可以写出一切整数来。这就是**写数原则**。在所记的数里，从右到左，第一位是个位，第二位是十位，第三位是百位，第四位是千位等。越是向左，数位越高。个位的单位是一，十位的单位是十，百位的单位是百，千位的单位是千等。每个数位上的数字表示这个数位上的单位的个数，例如，五万三千四百六十七记为53467。在35760这个数中3是万位上的数，5是千位上的数，7是百位上的数，6是十位上的数，它们分别表示3个万、5个千、7个百、6个十。个位上一个单位也没有，就用0表示，所以“0”还有一个补位的作用。

用一个数字记出的数（不是0），叫做一位数，如1、3、7等；用两个数字，三个数字……记出的数（左端的数字不是0），分别叫做两位数，三位数……，如34是两位数，202是三位数等。所以在一个数中数字的个数是几(最左端的数字不是0)，这个数就叫做几位数。

在一个数里，记在某一位上的数字，我们把它说成是“某位数字”。如35中的3是十位数字，5是个位数字。但十位数字与十位数的意义是不同的，前者表示十位上的一个数字，而后者表示这个数中含有十个数位（最左端的数字不是0）。

（2）整数的读法与写法

①　整数的读法

我国的读数法则采用四位分级制，从个位起每四个计数单位作为一级，每一级都含有个，十，百，千。第一级包含个位，十位，百位，千位，叫做个级；第二级包含万位，十万位，百万位，千万位，叫做万级；第三级包含亿位，十亿位，百亿位，千亿位，叫做亿级等。整数数位列表如下：

………	千百十兆 兆兆兆 位位位位	千百十亿 亿亿亿 位位位位	千百十万 万万万 位位位位	千百十个 位位位位	数 位
………	兆　级	亿　级	万　级	个　级	级名

根据四位分级制，我国的读数法则如下：

四位以内数的读法，从最高位起顺着数位顺序读。例如，3279读做三千二百七十九。

四位以上数的读法，可以从右到左，每四位分级，然后从最高级起，按照上面的方法，顺着数位顺序读出各级里的数和相应的级名，例如，3184573读作三百十八万四千五百七十三。如果一个数中间有一个零或几个零，只读一个零，末尾不管有几个零，通常不读。例如，2300800读作二百三十万零八百，不读作二百三十万零零八百。

② 整数的写法

从最高位起，顺着数位顺序记出各级各位的数字，如果某一位没有单位，就记一个“0”。例如，一千三百五十四万零八百七十六记作13540876；九百二十八亿零六千三百记作92800006300。

有些国家没有“万”这个名称，把万叫做十千。他们采用三位分级，因此国际上为了读、写整数的便利，从右向

，每三位用一逗号“，”，这个逗号叫做分节号。例如1,875,369；3,638,003,152等。第一个分节号左边一位是千位；第二个分节号左边一位是百万位；第三个分节号左边一位是十亿位等等。

例如，1,875,369　　　　3,638,003,152

1,875,369		3,638,003,152		
↑	↑	↑	↑	↑
百万位	千位	十亿位	百万位	千位

中央人民政府1950年曾有通知：“为取得全国一致，并和国际习惯符合起来，今特规定数字的分位方法为三位制……”。所以，在写数的时候，也可用三位分节的方法。

(3)整数的一般表示法

十进位制的数可以用它的各数位上单位的和的形式来表示，例如，

$$78946 = 70000 + 8000 + 900 + 40 + 6$$
$$= 7\times10^4 + 8\times10^3 + 9\times10^2 + 4\times10 + 6^*$$

因此，任意一个整数A都可以表示为

$$A = a_n\cdot10^n + a_{n-1}\cdot10^{n-1} + \cdots\cdots + a_1\cdot10 + a_0$$

的形式，这里a_n，a_{n-1}，a_{n-2}，……，a_1，a_0各代表从0到9十个数字里的一个，n是自然数。有时也可以这样表示：

$$\overline{a_na_{n-1}a_{n-2}\cdots\cdots a_1a_0}$$

(4) 整数在数轴上的表示法

任意画一条直线（一般是水平直线），规定这条直线的

$*10^4 = 10\times10\times10\times10 = 10000$

$10^3 = 10\times10\times10 = 1000$

$10^2 = 10\times10 = 100$

这些数分别叫做10的四次幂、10的三次幂、10的二次幂。

一个方向（一般取从左到右的方向）为正方向，用箭头表示；在直线上任取一点O为零，这点叫做**原点**；再取适当长的线段l作为单位长度。象这样规定了方向、原点和单位长度的直线，叫做**数轴**。我们可以用数轴上的点来表示整数。

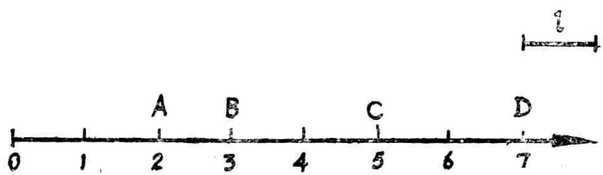

图1—1

例如在数轴上表示2、3、5、7等整数。从原点向右取两个单位，这点用A表示，则A点就表示整数2；从原点向右取三个单位，这点用B表示，则B点就表示整数3；依此类推，C点表示整数5，D点表示整数7。

（5）整数大小的比较

①在扩大的自然数列中，如果数a在b之后，那么数a大于b，写作$a>b$，读作“a大于b”；如果数a在数b之前，那么数a小于数b，写作$a<b$，读作“a小于b”；如果数a和数b表示相同的数，那么数a等于数b，写作$a=b$。有时两个符号联合使用，如$a\leqslant 5$表示a小于5或等于5。符号“$\leqslant$”读做“小于或等于”，也可以读做“不大于”。又如$b\geqslant 7$，表示数b大于7或等于7，符号“$\geqslant$”读做“大于或等于”，也可以读做“不小于”。

除了上面所说的$>$、$<$、$=$的符号以外，用符号“$\neq$”表示两个数不等的关系，如$a\neq b$读做a不等于b。