"十二五"应用型本科系列规划教材

高等数学（上册）

Advanced mathematics

杜洪艳　姚维山　主　编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

“十二五”应用型本科系列规划教材

高 等 数 学

上 册

主　编　杜洪艳　姚维山
副主编　高　萍
参　编　张家莲　董烈勋　刘　军　胡满姑

机械工业出版社

本书是以国家教育部高等工科数学课程教学指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》为标准编写而成的. 书中渗透了不少现代数学观点及数学文化，增加了部分数学实验的内容，以培养学生的专业素质、提高学生应用数学的能力为目的，充分吸收了编者多年来的教学实践与教学改革成果.

本书内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程. 节后配有相应的习题，每章末配有综合练习，书末附有部分习题的参考答案.

本书适用于普通高等院校本、专科高等数学课程的教学，也可作为科技工作者的参考用书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上册/杜洪艳，姚维山主编. —北京：机械工业出版社，2012.8

“十二五”应用型本科系列规划教材

ISBN 978-7-111-38641-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①杜…②姚… Ⅲ.①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 145554 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰 李 乐
版式设计：霍永明 责任校对：张 媛
封面设计：路恩中 责任印制：乔 宇
北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）
2012 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
184mm×240mm · 20.25 印张 · 348 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-38641-4
定价：36.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：（010）88361066	教 材 网：http://www.cmpedu.com
销 售 一 部：（010）68326294	机工官网：http://www.cmpbook.com
销 售 二 部：（010）88379649	机工官博：http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线：（010）88379203	**封面无防伪标均为盗版**

前　　言

科学的飞速发展和计算机的快速普及，使得数学在其他科学领域中的应用空前广泛，社会各个领域对数学的需求也越来越多，对各专业人才的数学素养要求也越来越高．本书是以国家教育部高等工科数学课程教学指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》为标准，以提高学生的专业素质为目的，在充分吸收编者多年来的教学实践和教学改革成果的基础上编写而成的．

“高等数学”是高校的基础课程之一，这门课程的思想和方法是人类文明发展史上理性智慧的结晶，它不仅提供了解决实际问题的有力的数学工具，同时还给学生提供了一种思维的训练方法，帮助学生提高作为应用型、创造型、复合型人才所必需的文化素质和修养．本书在编写过程中，注重强调数学的思想方法，重点培养学生的数学思维能力，并力求提高学生的数学素养，从而体现出数学既是一种工具、同时也是一种文化的思想．在内容选取上删去了传统本科教材中难而繁的内容，保留了高等数学在传统领域中的知识内容，渗透了不少现代数学观点，增加了一批各学科领域中的应用型例题以及以往传统教材中没有的数学实验，以利于学生更好地利用计算机来应用数学．通过对本书的学习，学生不仅达到会数学、更达到会用数学的目的．

本书对数学的基本概念和原理的讲述通俗易懂，同时又兼顾了数学的科学性与严谨性；对定义和定理等的叙述准确、清晰，并在节后配有相应的习题，每章末配有综合练习．本书适用于普通高等院校本、专科高等数学课程的教学，也可作为科技工作者的参考用书．

参加本书编写的人员有杜洪艳、姚维山、高萍、张家莲、董烈勋、刘军、胡满姑等．全书的框架结构由主编杜洪艳负责，统稿及定稿由主编杜洪艳和姚维山负责．

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请专家及读者批评指正．

编　者

目　录

第 1 章

函数与极限

函数是微积分学的主要研究对象，而极限是相应的研究工具．本章将在高中所学知识的基础上介绍函数、极限和函数的连续性等概念及它们的性质．

1.1 函数

1.1.1 预备知识

1. 区间

设 a, b 是两个实数，且 $a<b$，满足不等式 $a<x<b$ 的一切实数 x 的全体构成的数集称为开区间，记为 (a, b)，即 $(a, b)=\{x \mid a<x<b\}$；满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的一切实数 x 的全体构成的数集称为闭区间，记为 $[a, b]$，即 $[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$；满足不等式 $a<x \leqslant b$ 或 $a \leqslant x<b$ 的一切实数 x 的全体构成的数集，称为半开区间，记为 $(a, b]$ 或 $[a, b)$.

除了上述这些有限区间外，还有无限区间，例如 $(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数构成的集合；$(a, +\infty)$ 表示所有大于 a 的实数构成的数集；$(-\infty, a)$ 表示所有小于 a 的实数构成的数集；$[a, +\infty)$ 表示所有大于或等于 a 的实数构成的数集；$(-\infty, a]$ 表示所有小于或等于 a 的实数构成的数集．

2. 绝对值

设 a 是一个实数，a 的绝对值用记号 $|a|$ 表示，即有定义

$$|a|=\begin{cases}a, & 当\ a\geqslant 0\ 时,\\ -a, & 当\ a<0\ 时,\end{cases}$$

由此可知，$|a|\geqslant 0$，且有

$$|a|=\sqrt{a^2}$$

其**几何意义**是：$|a|$表示数轴上点 a 与原点 O 之间的距离．

下面两式经常用到：

$$|x|\leqslant a\Leftrightarrow -a\leqslant x\leqslant a;$$

$$|x|\geqslant a\Leftrightarrow x\leqslant -a\ 或\ x\geqslant a.$$

这里我们假定 $a>0$. 由$|x|$的**几何意义**可知，$|x|\leqslant a$ 表示点 x 与原点 O 之间的距离不超过 a，而$|x|\geqslant a$ 表示点 x 与原点 O 之间的距离不小于 a.

3. 邻域

设 a 和 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，所有满足不等式

$$|x-a|<\delta$$

的一切实数 x 的全体构成的数集称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\ \delta)$或 $U(a)$，即

$$U(a,\ \delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

点 a 称为该邻域的中心，δ 称为该邻域的半径.

如果仅仅研究 x 在点 a 邻近的变化情况，就需要用到邻域．有时 $x\neq a$,则需要把邻域的中心去掉．去掉中心后的点 a 的 δ 邻域，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作$\mathring{U}(a)$，即

$$\mathring{U}(a,\ \delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

1.1.2　函数的概念

在研究某一现象或变化过程时，有些量始终取不变的值即常量(一般用字母 a，b，c，…表示)，还有一些量可取变化的值即变量(一般用字母 x，y，z，…表示)，它们之间相互关联，遵从一定的变化规律．

下面我们来考察几个实例．

成本问题　设某厂生产某产品，日产 x 单位，它的日固定成本为 130 元，生产一个单位产品的成本为 6 元，那么该厂日产量 x 与日总成本 C 之间的依赖关系由 $C=130+6x$ 给出，当 $x=30$ 单位时，$C=310$ 元；当 $x=50$ 单位时，$C=430$ 元，即当产量 x 变化时，成本 C 也随之而变化．

自由落体问题　设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s. 假定开始下落的时刻为 $t=0$，那么 s 与 t 之间的关系由 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 给出，其中 g 是

重力加速度．在这个关系中，距离 s 随时间 t 的变化而变化．例如，当 $t=1\text{s}$ 时，$s=\frac{1}{2}g$；当 $t=3\text{s}$ 时，$s=\frac{9}{2}g$，等等．当下落时间 t 取定一个值 t_0 时，对应的距离 $s=\frac{1}{2}gt_0^2$ 的值也就确定了．

上面列举的实际例子中，抽去所考察问题的具体背景，我们看到，在上述关系中，当其中一个变量在某一范围内每取定一个数值时，另一个变量就有唯一确定的值与之对应．这种两个变量之间的对应关系就是函数概念的实质．

我们还需注意到，在上面的实例中，变量的取值都有一定的范围．成本问题中，产品的日产量 x 取自然数，成本 C 取正实数；自由落体问题中，时间 t 不能取负值，s 也不能取负值．可见，在每一个确定的关系中，变量都具有明确的取值范围．

下面，我们给出函数的定义．

定义 1.1　设 x，y 是两个变量，当变量 x 在非空数集 D 中任意取定一个数值时，如果依照某种对应法则 f，变量 y 有唯一确定的数值与之对应，那么，称 y 是 x 的函数，记为

$$y=f(x),$$

其中，x 称为自变量，y 称为函数（或因变量）．数集 D 称为函数的定义域．

当 x 取 D 中的数值 x_0 时，与 x_0 对应的 y 值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$．

当 x 遍取 D 中每一个值时，对应的函数值全体组成的数集

$$W=\{y \mid y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数的值域．

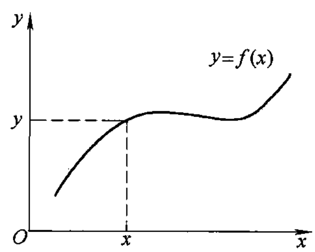

图　1-1

借助于图像的直观形象来研究函数是很有益的．为此，应弄清楚什么是函数的图像，函数与其图像是什么关系．

给定函数 $y=f(x)$，点集，$\{(x,\ y) \mid y=f(x)\}$所构所的图形，即为函数 $y=f(x)$ 的图像（图 1-1）．

函数与其图像的关系是：图像上任一点$(x,\ y)$的纵坐标 y 是横坐标 x 对应的函数值 $y=f(x)$．

这样我们可以通过分析函数图像的形态来研究函数．

根据函数的定义，函数的定义域和对应法则是确定函数的两个**重要因素**．在实际问题中，函数的定义域应根据问题的实际意义来确定；对于用一个解析式表示的函数，它的定义域可由函数表达式本身来确定，即要使运算有意义．若函数的自变量在不同范围内取值时有不同的解析式（称为分段函数），则它的定义域是其自变量各取值范围的并集．

例 1　求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{9-x^2}+\sqrt{x+1}$；

(2) $y=\lg(x^2-5x+6)$；

(3) $y=\arcsin\dfrac{x+1}{2}$.

解　(1) 由 $9-x^2\neq 0$ 得 $x\neq\pm 3$，

又由 $x+1\geqslant 0$ 得 $x\geqslant -1$，

所以函数的定义域为 $[-1,3]\cup(3,+\infty)$.

(2) 由 $x^2-5x+6>0$ 得 $x>3$ 或 $x<2$，

所以函数的定义域为 $(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$.

(3) 由 $-1\leqslant\dfrac{x+1}{2}\leqslant 1$ 得 $-2\leqslant x+1\leqslant 2$，

即
$$-3\leqslant x\leqslant 1,$$
所以函数的定义域为 $[-3,1]$.

例 2　作分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ x+1, & x<0\end{cases}$$

的图像，并指出其定义域．

解　在一个坐标系中作出对应区间上的图形（图 1-2），因为 x 取 $(-\infty,0)\cup[0,+\infty)=(-\infty,+\infty)$，所以此分段函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

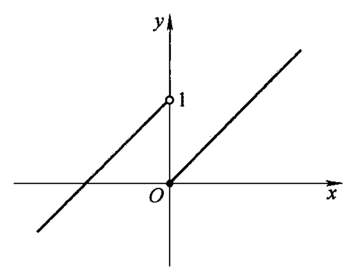

图　1-2

1.1.3　函数的基本性质

1. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果对于区间 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调增加（或单调减少）的．单调增加（或单调减少）的函数统称为单调函数.

单调增加(或单调减少)函数的图像是沿 x 轴正向逐渐上升(或下降)的(图 1-3).

例如，函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,\ +\infty)$ 内不是单调函数(图 1-4)，但在区间 $(-\infty,\ 0]$ 内是单调减少的，而在区间 $[0,\ +\infty)$ 内是单调增加的.

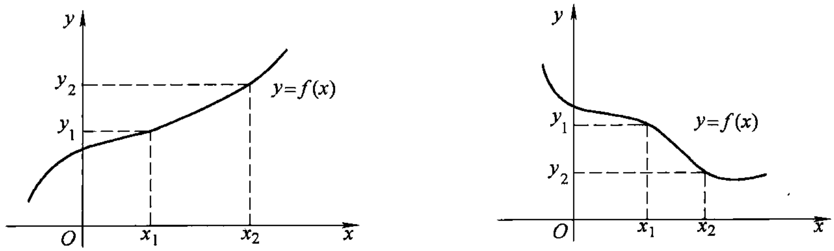

图　1-3

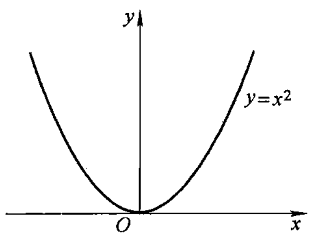

图　1-4

2. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一 $x\in D$，$f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数；如果对于任一 $x\in D$，$f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数.

例如，$f(x)=x^3$ 是奇函数，因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$；而 $f(x)=x^2$ 是偶函数，因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$.

奇函数的图像是关于原点对称的．因为，如果 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$. 如果 $A(x,\ f(x))$ 是图像上的点，那么它关于原点对称的点 $A'(-x,\ -f(x))$ 也必在图像上(图 1-5a).

偶函数的图像是关于 y 轴对称的，因为如果 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(-x)=f(x)$. 如果 $A(x, f(x))$ 是图像上的点，那么它关于 y 轴对称的点 $A'(-x,\ f(x))$ 也必在图像上(图 1-5b).

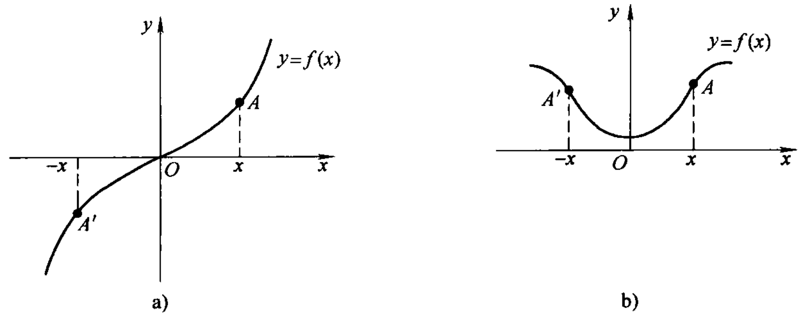

图 1-5

有的函数既非奇函数又非偶函数，称为非奇非偶函数，如 $y=2x+3$ 等.

而 $y=0$ 既是奇函数又是偶函数.

3. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在一个正数 M，使得对于区间 (a,b) 内的任意 x，对应的函数值 $f(x)$ 恒有 $|f(x)|\leqslant M$，就称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界；如果这样的数 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内无界.

例如，函数 $f(x)=\sin x$，$f(x)=\cos x$，$f(x)=\arctan x$，$f(x)=\operatorname{arccot} x$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的；函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $\mathring{U}(0,\delta)$ 内是有界的.

而函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是无界的，函数 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内也是无界的，等等.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的数 l，使得对于任一 $x\in D$，有 $(x\pm l)\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则函数 $f(x)$ 称为周期函数，l 称为这个函数的周期. 通常我们所说的周期指的是最小正周期.

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$，$\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

一个周期为 l 的周期函数，它的图像在定义域内每个长度为 $|l|$ 的相邻区间上有着相同的形状(图 1-6).

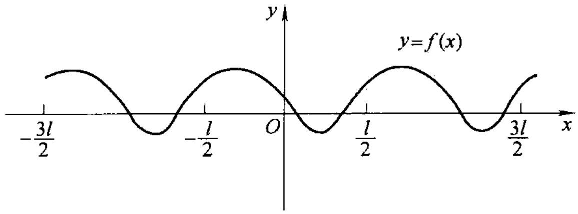

图　1-6

1.1.4　反函数

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$ 是定义在数集 D 上的单调函数，值域为 W；如果对于 W 中的每一个 y 值，恰有一个数 $x\in D$，使得 $f(x)=y$，那么，我们把这个 x 记作 $f^{-1}(y)$，即 $x=f^{-1}(y)$，这样所确定的以 y 为自变量的函数，叫做 $y=f(x)$ 的反函数. 它的定义域为 W，值域为 D.

习惯上，函数的自变量用 x 表示。所以，$y=f(x)$ 的反函数通常表示为 $y=f^{-1}(x)$.

反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像，与函数 $y=f(x)$ 的图像关于(在 x，y 轴的单位长度相等的同一坐标系中)直线 $y=x$ 对称(图 1-7).

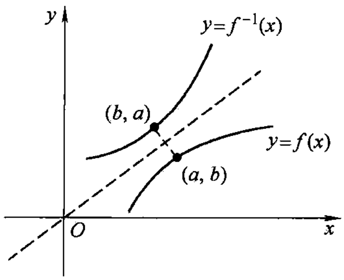

图　1-7

例 3　求函数

$y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 的反函数.

解　由 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 得

$$e^{2x}-2ye^x-1=0,$$

有
$$e^x=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2+4}}{2}=y\pm\sqrt{y^2+1}.$$

因 $e^x>0$，则

$$e^x=y+\sqrt{1+y^2},$$

于是
$$x=\ln(y+\sqrt{1+y^2}).$$

故函数 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 的反函数为

$$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2}),\quad x\in\mathbf{R}.$$

数学中称 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 为双曲正弦函数，它的反函数称为反双曲

正弦函数，分别记为

$$\sinh x=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x}),\ \operatorname{arsinh} x=\ln(x+\sqrt{1+x^{2}}).$$

类似地，有

$$\text{双曲余弦函数}\quad \cosh x=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x});$$

$$\text{双曲正切函数}\quad \tanh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}.$$

它们的反函数是

反双曲余弦函数　$\operatorname{arcosh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right)$；

反双曲正切函数　$\operatorname{artanh} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

1.1.5 初等函数

1. 基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数，统称为基本初等函数．它们的定义、定义域、图像及特性见附录 C.

另外，常用到线性函数 $f(x)=kx+b$，其图像为平面上的一条直线，定义域为 $(-\infty,+\infty)$．当 $k>0$ 时，为单调递增函数；当 $k<0$ 时，为单调递减函数；k 称为直线的斜率．

2. 复合函数

设 y 是 u 的函数，$y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数，$u=\varphi(x)$，用 D 表示 $\varphi(x)$ 的定义域或其中一部分．如果对于 x 在 D 上取值时所得对应的 u 值，函数 $y=f(u)$ 是有定义的，则 y 成为 x 的函数，记为

$$y=f(\varphi(x)).$$

这个函数称为函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 的复合函数，它的定义域为 D，变量 u 称作这个复合函数的中间变量.

例如，$y=\sin^{2}x$ 是由 $y=u^{2}$ 及 $u=\sin x$ 复合而成的复合函数，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，也是 $u=\sin x$ 的定义域；又如，$y=\sqrt{1-x^{2}}$ 是由 $y=u^{\frac{1}{2}}$ 及 $u=1-x^{2}$ 复合而成的复合函数，它的定义域是 $[-1,1]$，只是 $u=1-x^{2}$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 的一部分.

必须注意，并不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的．例如，函数 $y=\arcsin u$ 及 $u=2+x^{2}$，就不能复合成一个复合函数．因为对于 $u=2+x^{2}$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 中任何 x 值所对应的 u 值（均大于或

等于 2 ），$y=\arcsin x$ 都没有定义.

复合函数不仅可以由两个函数复合而成，也可以由更多个函数复合而成. 例如，$y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$ 就是由 $y=\ln u$，$u=1+v$，$v=w^{\frac{1}{2}}$，$w=1+x^2$ 复合而成的复合函数，它的定义域与 $w=1+x^2$ 的定义域同为 $(-\infty, +\infty)$.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合所形成的并且可以用一个式子表示的函数，称为初等函数.

本书所讨论的函数主要是初等函数.

1.1.6 建立函数关系式举例

在解决实际问题时，通常需要建立函数关系式. 为此，需要明确问题中的自变量与因变量，再根据相关规律建立函数关系式. 下面列举一些简单的实际问题，说明建立函数关系式的过程.

例 4 用铁皮做一个容积为 V 的圆柱形罐头盒，试将它的表面积表示成底面半径的函数.

解 设底面半径为 x，表面积为 y，如果罐头盒的高为 h，由题意知 $\pi x^2 h=V$，那么

$$h=\frac{V}{\pi x^2}$$

从而

$$y=2\pi x\cdot\frac{V}{\pi x^2}+2\pi x^2,$$

即

$$y=2\left(\frac{V}{x}+\pi x^2\right),\quad x\in(0, +\infty).$$

例 5 弹簧受力则伸长，由实验知，在弹性限度内，伸长量与受力大小成正比. 现已知一弹性限度为 P 的弹簧受力 9.8N 时，伸长量为 0.02m. 求弹簧的伸长量与受力之间的函数关系.

解 设弹簧受力 F 时，其伸长量为 l，由实验知，l 与 F 成正比，即

$$l=kF\quad(k\text{ 为比例常数}).$$

由已知条件 $F=9.8\text{N}$ 时，$l=0.02\text{m}$，代入上式，得

$$0.02=k\cdot 9.8,\ \text{即}\ k=\frac{1}{490}.$$

故有 l 与 F 间的函数关系：

$$l=\frac{F}{490},\ F\in[0,\ P].$$

例 6　某运输公司的货物运价为：距离在 $a$km 以内，每千米的运价为 k 元；距离超过 $a$km，超过部分的运价为$\frac{4}{5}k$ 元/千米．求总的运费 m 和距离 s 之间的函数关系．

解　根据题意，在不同距离范围内运价是不同的.

当 $0<s\leqslant a$ 时，$m=ks$；当 $s>a$ 时，$m=ka+\frac{4}{5}k(s-a)$，故 m 和 s 之间的函数关系为

$$m=\begin{cases}ks, & 0<s\leqslant a,\\ ka+\frac{4}{5}k(s-a), & s>a.\end{cases}$$

这是一个分段函数，定义域为$(0,\ +\infty)$.

例 7　在机械中常用一种曲轴连杆机构(图 1-8)，当主动轮转动时，连杆 AB 带动滑块 B 作往复直线运动. 设主动轮半径为 r，转动的匀角速度为 ω，连杆长度为 l，求滑块 B 的运动规律.

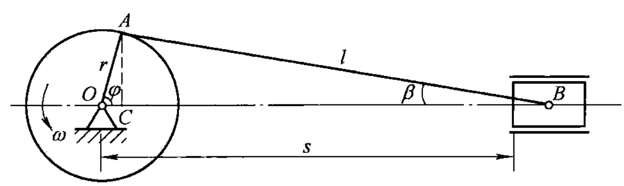

图　1-8

解　设运动开始后，经过时间 t，滑块 B 离 O 点的距离为 s，求滑块 B 的运动规律就是建立 s 与 t 之间的函数关系.

设主动轮开始旋转时，A 点正好在 OB 的连线上，经过时间 t 后，主动轮转了角 φ(rad)，那么 $\varphi=\omega t$，由于 $s=OC+CB$，而 $OC=r\cos\varphi=r\cos\omega t$，$CB=\sqrt{AB^2-CA^2}$，从而 $CB=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}$，故得

$$s=r\cos\omega t+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t},\ t\in[0,\ +\infty).$$

建立函数关系式的方法很多．总的来说，分析已知条件，设立未知变量，从实验或已知规律建立相应等式，再整理化简后，就得到函数关系式. 当然，还应加以证明或验证.