普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

理工类

张曙翔 主编

科学出版社

内 容 简 介

本书是编者充分考虑了理工类专业对线性代数课程的需求，并结合自身多年教学经验编写而成的. 内容包括：矩阵、可逆矩阵及矩阵的秩、线性方程组与向量组的线性相关性、特征值与特征向量、线性空间与线性变换、二次型. 本书内容精炼、讲解详实、例题丰富、通俗易懂.

本书可供综合性大学及师范院校理工类非数学各专业学生学习使用，也可作为相关专业学生及科技工作者的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数：理工类/张曙翔主编．—北京：科学出版社，2012

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-035267-5

Ⅰ.①线… Ⅱ.①张… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 184387 号

责任编辑：胡云志 任俊红 唐保军 / 责任校对：赵桂芬

责任印制：阎 磊 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 8 月第 一 版 开本：720×1000 B5

2012 年 8 月第一次印刷 印张：13 1/4

字数：257 000

定价：26.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序　言

当今中国高等教育已从传统的精英教育发展到现代大众教育阶段.高等学校一方面要尽可能满足民众接受高等教育的需求,另一方面要努力培养适应社会和经济发展的合格人才,这就导致大学的人才培养规模与专业类型发生了革命性的变化,教学内容改革势在必行.高等数学课程是大学的重要基础课,是大学生科学修养和专业学习的必修课.编写出具有时代特征的高等数学教材是数学教育工作者的一项光荣使命.

科学出版社"十二五"教材出版规划的指导原则与云南省大部分高校的高等数学课程改革思路不谋而合,因此我们组织了云南省具有代表性的十所高校的数学系骨干教师组成项目专家组,共同策划编写了新的系列教材,并列入科学出版社普通高等教育"十二五"规划教材出版项目.本系列教材以大众化教育为前提,以各专业的发展对数学内容的需要为准则,分别按理工类、经管类和化生地类编写,第一批出版的有高等数学(理工类)、高等数学(经管类)、高等数学(化生地类)、概率论与数理统计(理工类)、线性代数(理工类),以及可供各类专业选用的数学实验教材.教材的特点是,在不失数学课程逻辑严谨的前提下,加强了针对性和实用性.

参加教材编写的教师都是在教学一线有长期教学经验积累的骨干教师.教材的第一稿已通过一届学生的试用,在征求使用本教材师生意见和建议的基础上作了进一步的修改,并通过项目专家组的审查,最后由科学出版社统一出版.在此对试用本教材的师生、项目专家组以及科学出版社表示衷心感谢.

高等教育改革无止境,教学内容改革无禁区,教材编写无终点.让我们共同努力,继续编出符合科学发展、顺应时代潮流的高质量教材,为高等数学教育做出应有的贡献.

郭　震

2012年8月1日于昆明

前　言

本书是为综合性大学及师范院校理工类非数学各专业编写的.全书内容精炼，重点突出、讲解详实、例题丰富，叙述注重直观、通俗易懂，在注重强化基础知识及其训练的基础上，适当降低理论推导，尽可能地突出数学的思想方法，做到了深入浅出.教材内容包括:矩阵、可逆矩阵及矩阵的秩、线性方程组与向量组的线性相关性、特征值与特征向量、线性空间与线性变换、二次型.

本书参考学时为72学时.对不足72学时的教学班级，可对第5章内容进行适当删减;书中部分例子、习题与定理证明带有“*”号，主讲教师可酌情删减.教材各章节均配有适量的习题，并在每章后配有自检题，所有习题均在书末附有参考答案，便于读者学习与提高.本书的使用对象可以是开设线性代数课程的师范院校及理工类院校本、专科学生，也可以是相关专业的学生.

本书由云南省多所高等院校教学经验丰富的教师编写而成.其中第1章由红河学院刘伟老师编写，第2章由红河学院黄晓昆老师编写，第3章由昆明学院谢芳老师编写，第4章由玉溪师范学院刘云老师编写，第6章由云南师范大学数学学院蔡翠老师编写，云南师范大学数学学院张曙翔老师编写了第5章，并负责全书的统稿及审定工作.

本书的编写得到了云南省数学学会、云南师范大学和云南省多所高等师范院校的大力支持，科学出版社龚剑波、任俊红两位编辑为本书的出版做了大量繁杂而细致的工作，在此一并表示感谢!

由于我们水平所限，编写时间较紧，书中存在的问题，敬请读者和同行批评指正.

编　者

2012年7月

目　　录

第1章 矩　　阵

矩阵是从许多实际问题中抽象出来的一个重要数学概念，是代数学研究的主要对象，是数学很多分支研究及应用的重要工具. 它贯穿于线性代数的各个部分，是代数学中必不可少的基本概念，它在数学的其他分支以及相关专业的理论及实践中有着重要的应用.

本章主要介绍矩阵的概念、性质、运算及其方阵的行列式的概念和相关的性质与计算.

1.1 矩阵的概念

在日常生活中，我们经常使用一系列的表格来记录和传递信息. 例如，一家工厂同时生产 a_1,a_2,a_3 三种产品，在某年的生产量就可用下面一个简单的矩形数表表示：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3,4)$ 为该工厂的 a_i 产品在第 j 季度的产量.

反之，若对如上的一个矩形数表的行和列赋予一定的现实意义，该数表就可用来反映相应的一些实际问题；将上述矩形数表单独抽象出来，就得到下面矩阵的概念.

定义 1.1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,\cdots,m;j=1,2,\cdots n)$（通常称其为元素）排列成如下 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ **矩阵**，简记为 $(a_{ij})_{m\times n}$，其中 a_{ij} 表示矩阵的第 i 行第 j 列的元素.

矩阵通常用大写英文字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 表示；m 行 n 列矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$. 显然，矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 共有 mn 个元素.

元素都为实（复）数的矩阵称为**实（复）矩阵**.

元素全为 0 的矩阵称为零矩阵，记为 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$，有时简记为 $\boldsymbol{O}$.

只有 1 行元素的矩阵 $\boldsymbol{A}_{1\times n}=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$ 称为**行矩阵**(**或行向量**)；只有 1 列元素的矩阵

$$\boldsymbol{A}_{m\times 1}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

称为**列矩阵**(**或列向量**).

行数和列数都是 n 的矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 称为 n **阶矩阵**或 n **阶方阵**. 在 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 中元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所在的直线称为方阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 的**主对角线**. 特别地，$n=1$ 时，对应的 1 阶方阵记为 (a_{11}).

主对角线元素都是 1，其他元素都是 0 的 n 阶矩阵称为 n **阶单位矩阵**，记作 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$，即

$$\boldsymbol{E}_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

行数和列数相同的两个矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}_{m\times n}$ 称为**同型矩阵**.

如果两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 所有 $m\times n$ 个对应位置上的元素都相同，即

$$a_{ij}=b_{ij}\quad (i=1,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例 1.1　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1+x & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & y \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 相等，计算 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$.

解　由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 得 $x+1=3,y=0$ 从而 $x=2,y=0$. 于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

习　题　1.1

1. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} x+y & 0 \\ 0 & 2x-y \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{E}_2$ 相等，计算 x,y.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1+x & x+y \\ 2 & y+3 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & z \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ 相等，求 $\boldsymbol{A}$.

1.2 矩阵的运算

1.2.1 矩阵的加(减)法

定义 1.2 设两个同型矩阵

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

则矩阵

$$\boldsymbol{C}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的**和**，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

注 由定义 1.2 知，只有同型矩阵才能进行加法运算.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，则矩阵 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**，记作 $-\boldsymbol{A}$.

利用负矩阵可定义矩阵的减法为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$$

容易验证矩阵的加(减)法满足下列性质：

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为同型矩阵，$\boldsymbol{O}$ 是与 $\boldsymbol{A}$ 同型的零矩阵，则

(1) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

(2) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}$；

(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

1.2.2 矩阵的数量乘法

定义 1.3 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$k$ 为任意常数，则矩阵 $(ka_{ij})_{m\times n}$ 称为常数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**数量乘法**(简称为数乘)，记作 $k\boldsymbol{A}$，即

$$k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

容易验证矩阵的数乘满足下列性质：

设 k,l 为任意实数，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，则

(1) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；

(2) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；

(3) $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$；

(4) $1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A},(-1)\cdot\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$.

例 1.2　求矩阵 $\boldsymbol{X}$，使得 $2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{B}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\4&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}6&3\\4&2\end{pmatrix}$$

解　根据矩阵加(减)法及数乘法的运算律，由 $2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{B}$ 得 $2\boldsymbol{X}=3\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$，从而

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}(3\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})$$

故

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}\left[3\begin{pmatrix}6&3\\4&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\4&0\end{pmatrix}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}18&9\\12&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\4&0\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}16&8\\8&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&4\\4&3\end{pmatrix}$$

1.2.3　矩阵的乘法

在讨论二次曲线时，如果先进行坐标变换 $\begin{cases}x=a_{11}x'+a_{12}y'\\y=a_{21}x'+a_{22}y'\end{cases}$，该变换可看作由矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ 决定；然后再进行坐标变换 $\begin{cases}x'=b_{11}x''+b_{12}y''\\y'=b_{21}x''+b_{22}y''\end{cases}$，该变换可看作由矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}$ 决定；那么这两次变换累积而成的变换为

$$\begin{cases}x=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})x''+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})y''\\y=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})x''+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})y''\end{cases}$$

观察到两次累积的坐标变换可看做由矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}$ 决定，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}(i,j=1,2)$，它是由矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 中的元素按照某一运算关系所确定. 我们把这种运算关系推广到一般情形，就得到了矩阵的乘法：

定义 1.4　设 $m\times l$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $l\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 如下：

$$\boldsymbol{A}=(a_{ik})_{m\times l}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1l}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2l}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{ml}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=(b_{kj})_{l\times n}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{l1}&b_{l2}&\cdots&b_{ln}\end{pmatrix}$$

若记

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{lj}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

则矩阵

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{m1}&c_{m2}&\cdots&c_{mn}\end{pmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积. 记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

注 由矩阵乘积的定义可见,只有 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数时,乘积 $\boldsymbol{AB}$ 才有意义.

利用矩阵及其运算可以简洁地表示一些数学表达式.

例如,前面的坐标变换$\begin{cases}x=a_{11}x'+a_{12}y'\\y=a_{21}x'+a_{22}y'\end{cases}$可以写成矩阵的乘积形式:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix},\quad 其中\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$$

同样,坐标变换$\begin{cases}x'=b_{11}x''+b_{12}y''\\y'=b_{21}x''+b_{22}y''\end{cases}$可以写成

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix},\quad 其中\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}$$

这两次累积的坐标变换

$$\begin{cases}x=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})x''+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})y''\\y=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})x''+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})y''\end{cases}$$

则可以写成

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix},\quad 其中\ \boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$$

又如,对于线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\qquad\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

若记

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

则此线性方程组可简写成

$$AX=B$$

例 1.3　设 $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$. 求 AB 和 BA.

解　$AB=\begin{pmatrix}0\times0+1\times0&0\times2+1\times0\\0\times0+0\times0&0\times2+0\times0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}0\times0+2\times0&0\times1+2\times0\\0\times0+0\times0&0\times1+0\times0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

例 1.4　设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\\2&0\end{pmatrix}$. 求 AB 和 BA.

解　$AB=\begin{pmatrix}1\times1+0\times(-1)+1\times2&1\times1+0\times1+1\times0\\2\times1+1\times(-1)+0\times2&2\times1+1\times1+0\times0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}1\times1+1\times2&1\times0+1\times1&1\times1+1\times0\\(-1)\times1+1\times2&(-1)\times0+1\times1&(-1)\times1+1\times0\\2\times1+0\times2&2\times0+0\times1&2\times1+0\times0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&1&-1\\2&0&2\end{pmatrix}$

例 1.5　设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$. 求 AB 和 BA.

解　$AB=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)$

$BA=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_2b_1&\cdots&a_nb_1\\a_1b_2&a_2b_2&\cdots&a_nb_2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1b_n&a_2b_n&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix}$

由以上三个例子可以看出，矩阵乘法的一些特殊性：

(i) 矩阵 $AB=O$，但 A 与 B 都可以不为 O，即由 $AB=O$ 不能推出 $A=O$ 或 $B=O$. 由此可得：乘法的“消去律”不成立，即若 $A\neq O$，由 $AB=AC$ 不能推出 $B=C$.

(ii) 矩阵的乘法运算不满足交换律，即 $AB\neq BA$.

特殊地，若矩阵 A，B 满足等式 $AB=BA$，则称矩阵 A 与 B 是**可交换的**.

容易验证，矩阵的乘法满足下列性质(设 A，B，C 为矩阵；λ 为数)：

(1) $(AB)C=A(BC)$；

(2) $A(B+C)=AB+AC$，$(A+B)C=AC+BC$；

(3) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$；

(4) $A_{m\times n}E_n=E_mA_{m\times n}=A$；

(5) $A_{m\times n}O_{n\times p}=O_{m\times p}, O_{q\times m}A_{m\times n}=O_{q\times n}$.

倘若 A 为方阵，由矩阵的乘法运算可定义 n 阶方阵 A 的幂运算：

定义 1.5 设 A 是 n 阶方阵，k 是任意非负整数，则称 k 个 A 的乘积为 A 的 k **次幂**，记作 A^k，即 $A^k=\underbrace{AA\cdots A}_{k个}$；其中规定 $A^0=E$.

易见，矩阵的幂运算满足下列性质：

(1) $A^k\cdot A^l=A^{k+l}\quad(l,k\in\mathbf{Z}^+)$；

(2) $(A^k)^l=A^{kl}\quad(l,k\in\mathbf{Z}^+)$.

注 由于矩阵的乘法运算不满足交换律，所以 $(AB)^k$ 与 A^kB^k 不一定相等；从而，公式 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 与 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 不一定成立.

进一步，如果 A 为方阵，则可引入矩阵多项式的概念.

定义 1.6 设 $f(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$ 是 x 的 m 次多项式，A 是 n 阶方阵，则称矩阵 $f(A)=b_0E_n+b_1A+b_2A^2+\cdots+b_mA^m$ 为 A 的 m 次多项式.

显然，n 阶方阵 A 的 m 次多项式 $f(A)$ 仍是一个 n 阶方阵.

例 1.6 若 $f(x)=x^2+x-2$，$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$，计算 $f(A)$.

解
$$f(A)=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&3\\0&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4\\0&4\end{pmatrix}$$

1.2.4 矩阵的转置

定义 1.7 设 $m\times n$ 矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$，将矩阵 A 对应的行与列依次互换，所得到的 $n\times m$ 矩阵称为矩阵 A 的**转置矩阵**，记作 A^{T}. 即

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

例如，若 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$，则 $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$.

容易验证,矩阵的转置运算满足下列性质(设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为矩阵;λ 为数):

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(3) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

证明 (1)~(3)是显然成立的;下面证明性质(4):

假设 $\boldsymbol{A}=(a_{ik})_{m\times s}$,$\boldsymbol{B}=(b_{kj})_{s\times n}$,且 $\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times n}$,由矩阵的乘法定义知

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$

故$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 第 i 行第 j 列元素为 $a_{j1}b_{1i}+\cdots+a_{js}b_{si}$.

又因为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 中第 i 行第 k 列元素为 b_{ki},$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 k 行第 j 列元素为 a_{jk},所以 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 中第 i 行第 j 列元素也是

$$\sum_{k=1}^{s}b_{ki}a_{jk}=a_{j1}b_{1i}+\cdots+a_{js}b_{si}$$

由 i,j 选择的任意性得$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

习 题 1.2

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\0&2&2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\3&1&2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&4&0\\2&3&0\end{pmatrix}$,求$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 及 $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}$.

3. 求出所有与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$交换的矩阵.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,如果对任意 $n\times 1$ 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 均有 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$. 证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

5. 举例说明下列命题错误:

(1) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$; (2) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$,且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$.

6. 若 $f(x)=x^2-x-1$,$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$,计算 $f(\boldsymbol{A})$.

7. 已知 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&0&3\\2&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,计算 $f(1,0,2)$.

1.3　几种特殊矩阵

本节将介绍几种特殊而重要的 n 阶方阵，并给出它们的一些简单性质.

1.3.1　对称矩阵

如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对称矩阵**.

显然，若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对称的，则其元素 a_{ij} 适合 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，即 $\boldsymbol{A}$ 必形如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

例如 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 分别为 2 阶与 3 阶对称矩阵.

例 1.7　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵，证明：$\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵的充分必要条件为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

证明　已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵，故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$.

必要性　若 $\boldsymbol{AB}$ 对称，即 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{AB}$. 又因为 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}$，所以 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

充分性　若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}$，所以 $\boldsymbol{AB}$ 是对称的.

1.3.2　反对称矩阵

如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**反对称矩阵**.

显然，若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是反对称的，则其元素 a_{ij} 适合

$$\begin{cases} a_{ij}=0, & i=j \\ a_{ij}=-a_{ji}, & i\neq j \end{cases}(i,j=1,2,\cdots,n)$$

即 $\boldsymbol{A}$ 形如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

例如 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ 分别为 2 阶与 3 阶反对称矩阵.

同样，读者可以自行证明：

若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为反对称矩阵,则 $\boldsymbol{AB}$ 仍是反对称矩阵的充要条件为 $\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{BA}$.

若方阵 $\boldsymbol{A}$ 既是对称矩阵又是反对称矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 是零矩阵.

1.3.3 对角矩阵

如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中除主对角线外的所有元素都是 0,即 $a_{ij}=0,i\neq j(i,j=1,2,\cdots,n)$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对角矩阵**. 通常把对角矩阵记作 $\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$,即

$$\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对角矩阵是一种特殊的对称矩阵;对于矩阵运算,它具有良好的性质:

(1) 两个 n 阶对角矩阵的和(差)仍是对角矩阵;

(2) 一个数与对角矩阵的数乘仍是对角矩阵;

(3) 两个 n 阶对角矩阵的乘积仍是对角矩阵;

(4) 对角矩阵的转置仍是对角矩阵;

(5) 两个 n 阶对角矩阵必是可交换的.

例如,若 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$\boldsymbol{B}=\mathrm{diag}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,$\lambda$ 为任意常数,k 为任意正整数,则有

$$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=\mathrm{diag}(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,\cdots,a_n\pm b_n),\quad \lambda\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(\lambda a_1,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n)$$

$$\boldsymbol{AB}=\mathrm{diag}(a_1b_1,a_2b_2,\cdots,a_nb_n),\quad \boldsymbol{A}^k=\mathrm{diag}(a_1^k,a_2^k,\cdots,a_n^k)$$

1.3.4 数量矩阵

如果 n 阶对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中主对角线的元素 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=k$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**数量矩阵**,即

$$\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(k,k,\cdots,k)=\begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

显然,数量矩阵是一种特殊的对角矩阵,且 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(k,k,\cdots,k)=k\boldsymbol{E}_n$.

1.3.5 上(下)三角形矩阵

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 形如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**上三角形矩阵**；

同样地，若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 形如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**下三角形矩阵**.

容易验证，上(下)三角矩阵具有性质：

(1) 上(下)三角矩阵的和仍是上(下)三角矩阵；

(2) 任意常数与上(下)三角矩阵的数乘仍是上(下)三角矩阵；

(3) 两个 n 阶上(下)三角矩阵的乘积仍是上(下)三角矩阵；

(4) 上(下)三角矩阵的转置是下(上)三角矩阵.

习　题　1.3

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 是对角矩阵，证明：$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 也是对角矩阵.
2. 证明：任意方阵都可表示成一对称矩阵和一反对矩阵之和.
3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为反对称矩阵，证明：$\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.
4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵，证明：$\boldsymbol{A}^2$ 为对称矩阵，$\boldsymbol{A}^3$ 为反对称矩阵.
5. 证明：两个 n 阶上三角矩阵的乘积仍是上三角矩阵.

1.4　分块矩阵

对于某些矩阵，把它分成若干小块会使得矩阵的结构变得简单清晰，便于理解和计算，同时又能使书写表示更为简捷. 本节将介绍分块矩阵的相关知识.

1.4.1　分块矩阵的概念

在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行和列之间用若干纵线和横线将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分成许多小块，每一小块看做一个小矩阵，将其称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**子块**，以子块为元素的矩阵称为**分块矩阵**.

例如，一家工厂同时生产 a_1,a_2,a_3 三种产品，在某年的生产量用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3,4)$ 表示该工厂的第 a_i 种产品在第 j 季度的产量. 可