

公共^{课程}
规划教材
GENERAL COURSE
BASIC MATERIALS

高等应用数学 (经管类)

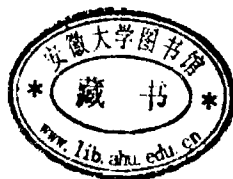
伊 兰 主 编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

“十二五”高等学校公共课程规划教材

高等应用数学（经管类）

伊 兰 主 编
唐春霞 王爱霞 副主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本教材以培养经管类应用型人才为目标,主要内容分为微积分、线性代数、概率论与数理统计三大模块。第一模块为微积分,主要介绍一元函数微分学和积分学;第二模块为线性代数,主要介绍行列式、矩阵及解 n 元线性方程组;第三模块为概率论与数理统计,主要介绍随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征及参数估计与假设检验。

本教材的特点是:采用案例引导,由问题引出数学知识,然后将数学知识应用于处理一些经济、管理问题,案例生活化、通俗化,增强可读性,可使学生将数学知识与实际生活联系在一起。

本教材在各模块中简单介绍了数学软件(Mathematica)的数值功能和图形功能,让学生借助计算机形象地演算一些概念和验证一些基本结论,使学生从感官上更形象地理解所学的数学知识,加深对数学基本概念的认识和理解,这部分可作为选讲内容。

本教材适用于经管类本科院校学生使用,也可供高职高专院校经管类专业学生参考选用。

图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学:经管类/伊兰主编. —北京:中国铁道出版社,2013.2

“十二五”高等学校公共课程规划教材

ISBN 978-7-113-15846-0

I. ①高… II. ①伊… III. ①应用数学-高等学校-教材 IV. ①029

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第015607号

书 名: 高等应用数学(经管类)

作 者: 伊 兰 主编

策 划: 巨 凤

读者热线:400-668-0820

责任编辑:王占清 何 佳

封面设计:一克米工作室

责任印制:李 佳

出版发行:中国铁道出版社(100054,北京市西城区右安门西街8号)

网 址: <http://www.51eds.com>

印 刷:北京昌平百善印刷厂

版 次:2013年2月第1版 2013年2月第1次印刷

开 本:787mm×1092mm 1/16 印张:17.5 字数:401千

印 数:1~3000册

书 号:ISBN 978-7-113-15846-0

定 价:38.00元

版权所有 侵权必究

凡购买铁道版图书,如有印制质量问题,请与本社教材图书营销部联系调换。电话:(010) 63550836

打击盗版举报电话:(010) 63549504

● 目 录

预备知识	1
一、实数	1
二、绝对值	1
三、集合与区间	2
四、连加号与连乘号	3
五、排列数与组合数	4

第一模块 微 积 分

第1章 函数与极限	6
§ 1.1 函数	6
一、函数的概念	6
二、分段函数	7
三、函数的基本性质	8
§ 1.2 初等函数	11
一、基本初等函数	11
二、简单函数与复合函数	14
三、初等函数	15
§ 1.3 几种常用的经济函数	15
一、单利与复利	16
二、多次付息	16
三、贴现	17
四、成本函数	18
五、收益函数与利润函数	19
六、需求函数	20
七、供给函数	21
八、库存函数	22
§ 1.4 函数的极限	22
一、数列的极限	22
二、函数的极限	24
§ 1.5 无穷大量与无穷小量	26
一、无穷大量	26
二、无穷小量	27
三、无穷大量与无穷小量的关系	27
四、无穷小量的比较	28

§ 1.6 极限的性质与运算法则	28
一、函数极限的性质	28
二、函数极限的运算法则	29
三、两个重要极限	31
§ 1.7 函数的连续性	35
一、函数的连续与间断	35
二、函数的间断点	37
三、闭区间上连续函数的性质	40
§ 1.8 数学实验指导	42
一、Mathematica 介绍	42
二、简单操作与帮助	43
三、Mathematica 的基本量	44
§ 1.9 实验 1:一元函数的图形(基础实验)	45
§ 1.10 实验 2:极限与连续(基础实验)	47
§ 1.11 实验 3:求函数的极限	49
小结	50
习题一	51
第 2 章 微分学及其应用	55
§ 2.1 导数的概念	56
一、变化率问题举例	56
二、导数定义	56
三、导数的几何意义	58
四、导数的计算方法	58
五、可导与连续的关系及左、右导数	59
§ 2.2 求导法则	59
一、导数的四则运算法则	59
二、复合函数的求导法则	60
三、反函数的求导法则	61
四、隐函数的求导法	61
五、高阶导数的概念	63
§ 2.3 函数的微分	63
一、微分概念	63
二、微分的几何意义	64
三、微分的运算法则	64
§ 2.4 导数的应用	66
一、中值定理	66
二、函数的单调性	67
三、洛必达法则	68
§ 2.5 函数的极值与最值	70
一、函数极值及求法	70

二、函数的最大值与最小值	71
§ 2.6 曲线的凹凸性与拐点	73
一、二阶导数的几何意义——曲线的凹凸性	73
二、导数在经济学中的应用	74
§ 2.7 实验 4: 导数与微分(基础实验)	78
小结	79
习题二	79
第 3 章 不定积分	82
§ 3.1 不定积分的概念与性质	82
一、原函数的概念	82
二、不定积分的概念	83
三、不定积分的性质	84
四、基本积分公式	84
§ 3.2 换元积分法	86
一、第一换元积分法(凑微分法)	86
二、第二换元积分法(变量置换法)	89
§ 3.3 分部积分法	90
§ 3.4 实验 5: 不定积分(基础实验)	92
小结	92
习题三	94
第 4 章 定积分	97
§ 4.1 定积分概念	97
一、引例	97
二、定积分的定义	98
三、定积分的几何意义	98
四、定积分的性质	99
五、积分中值定理	99
§ 4.2 微积分基本公式	100
一、变上限积分及其导数	100
二、牛顿-莱布尼茨公式	100
§ 4.3 定积分的积分方法	102
一、定积分的换元法	102
二、定积分的分部积分法	103
§ 4.4 无穷区间上的积分	104
§ 4.5 定积分的应用	105
一、微分法	105
二、直角坐标系下计算平面图形的面积	106
三、经济应用问题	108
四、计算旋转体的体积	111
§ 4.6 实验 6: 定积分(基础实验)	112

小结	113
习题四	114

第二模块 线性代数

第5章 行列式与矩阵	118
§ 5.1 行列式的定义	118
一、二阶行列式与三阶行列式	118
二、 n 阶行列式	121
三、一些特殊的行列式	122
§ 5.2 行列式的性质与计算	123
一、行列式的性质	123
二、行列式的计算	126
§ 5.3 克莱姆法则	128
§ 5.4 矩阵的概念	132
一、矩阵的实例	132
二、矩阵的概念	132
三、几种特殊矩阵	133
§ 5.5 矩阵的运算	134
一、矩阵的线性运算	134
二、矩阵的乘法	135
三、线性方程组的矩阵表示	137
四、方阵的幂	137
五、矩阵的转置	138
六、方阵的行列式	138
§ 5.6 逆矩阵	139
一、逆矩阵的概念	139
二、用伴随矩阵求逆矩阵	139
三、用初等变换求逆矩阵	141
四、矩阵方程	145
§ 5.7 分块矩阵	146
一、分块矩阵的概念	146
二、分块矩阵的运算	146
§ 5.8 矩阵的秩	149
一、矩阵的秩	149
二、矩阵的秩的计算	150
小结	151
习题五	152
第6章 线性方程组	156
§ 6.1 消元法	156
一、消元法与初等行变换	156

二、消元法解题举例	158
§ 6.2 向量的线性表示	160
一、 n 维向量及其线性运算	160
二、线性方程组的向量形式	162
三、向量组间的线性表示	163
§ 6.3 向量组的线性相关性	164
一、线性相关性的概念	164
二、线性相关性的判定	164
§ 6.4 向量组的秩	166
一、极大无关组	166
二、向量组的秩	167
三、矩阵的秩与向量组的秩	167
§ 6.5 线性方程组解的结构	168
一、齐次线性方程组解的结构	168
二、非齐次线性方程组解的结构	171
§ 6.6 实验 7: 用 Mathematica 软件求解线性代数问题	174
小结	175
习题六	176

第三模块 概率论与数理统计

第 7 章 随机事件及其概率	180
§ 7.1 随机事件及其运算	181
一、随机试验	181
二、样本空间	181
三、随机事件	182
四、随机事件间的关系与运算	182
§ 7.2 概率的定义及性质	184
一、频率	184
二、概率的统计定义	184
三、概率的性质	185
四、小概率事件	185
§ 7.3 古典概型	186
一、古典概型(等可能概型)	186
二、基本的组合分析公式	186
三、古典概型中事件概率的计算	187
§ 7.4 条件概率与乘法公式	188
一、条件概率	188
二、乘法公式	189
三、全概率公式	189
四、贝叶斯公式	191

§ 7.5 事件的独立性	193
§ 7.6 实验 8: 随机事件概率实验	194
小结	194
习题七	195
第 8 章 随机变量及其分布	198
§ 8.1 随机变量及其分布函数	198
一、随机变量的概念	198
二、分布函数	199
§ 8.2 离散型随机变量的分布	199
一、离散型随机变量的分布律	199
二、几种常用的离散型随机变量的分布律	201
三、离散型随机变量的分布函数	204
四、离散型随机变量函数的分布	204
五、二维离散型随机变量的分布	205
§ 8.3 连续型随机变量的分布	207
一、连续型随机变量和概率密度函数	207
二、密度函数的性质	207
三、几种重要的连续型随机变量的分布	209
§ 8.4 实验 9: 随机变量实验	213
一、需调用 Statistics 'DiscreteDistributions' 软件包才能使用的概率分布和函数	213
二、需调用 Statistics 'ContinuousDistributions' 软件包才能使用的概率分布和函数	213
小结	214
习题八	215
第 9 章 随机变量的数字特征	218
§ 9.1 随机变量的数学期望	219
一、离散型随机变量的数学期望	219
二、连续型随机变量的数学期望	221
三、随机变量函数的数学期望	223
四、二维离散型随机变量的期望	224
五、期望的性质	224
§ 9.2 随机变量的方差及其性质	226
一、随机变量的方差	226
二、二维离散型随机变量的方差	230
三、方差的性质	230
§ 9.3 实验 10: 期望与方差的实验	232
小结	233
习题九	233
第 10 章 参数估计与假设检验	236
§ 10.1 统计量	238

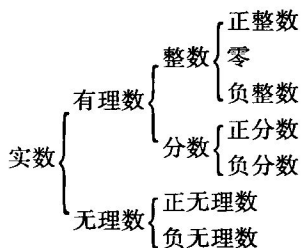
一、总体和样本	238
二、参数和统计量	239
三、样本均值和样本方差	239
四、抽样分布	241
§ 10.2 参数的点估计	244
一、矩估计法	244
二、参数估计的评价标准	245
§ 10.3 参数的区间估计	247
一、区间估计的概念	247
二、正态总体均值 μ 的区间估计	248
三、正态总体方差 σ^2 的区间估计	249
§ 10.4 假设检验	250
一、假设检验的基本思想	250
二、正态总体均值的检验	252
三、正态总体方差的 χ^2 检验	253
四、假设检验的两类错误	254
§ 10.5 实验 11: 求样本均值与方差	255
§ 10.6 实验 12: 区间估计	255
§ 10.7 实验 13: 假设检验	256
小结	256
习题十	257
附表	260
附表 1 标准正态分布表	260
附表 2 泊松分布数值表	261
附表 3 t 分布临界值表	262
附表 4 χ^2 分布临界值表	263
参考文献	264

预备知识

一、实数

由于本门课程,主要是在实数范围内研究微积分、线性代数、概率统计等问题,本部分主要复习与实数有关的一些基础知识.

实数概念:实数按照以下方法分类,形成实数系表.



实数由有理数和无理数组成.

有理数——能表示为两个整数相除形式的数(包括整数、分数);

无理数——无限不循环小数,即不能表示为两个整数相除形式的数.

二、绝对值

1. 数轴与绝对值

规定原点、正方向和长度单位的直线叫做数轴.

数轴上的 O 表示原点,原点右边的点表示正数,原点左边的点表示负数. 数轴上的点与全体实数是一一对应的.

绝对值:正数的绝对值是它本身,负数的绝对值是它的相反数,0 的绝对值是 0. 即实数 a 的绝对值为

$$|a| = \begin{cases} a & \text{当 } a \geq 0 \\ -a & \text{当 } a < 0 \end{cases}$$

例如, $|-19| = 19$, $|3.62| = 3.62$, $|0| = 0$.

2. 绝对值的几何意义

一个数的绝对值,就是数轴上表示这个数的点到原点的距离,记为 $|a|$,如图 0-0-1 所示.

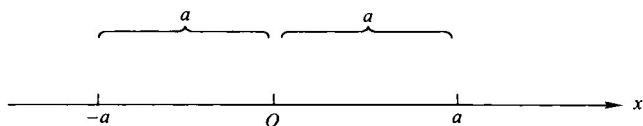


图 0-0-1

3. 绝对值的性质

设 a, b 为任意实数,则有以下性质:

- (1) $0 \leq |a|$;
- (2) $-|a| \leq a \leq |a|$;
- (4) $|ab| = |a| |b|$;
- (5) $|a+b| \leq |a| + |b|$;

$$(3) |-a| = |a|; \quad (6) |a-b| \geq |a| - |b|.$$

特别地,任何一个实数绝对值等于该实数平方后的算术平方根,即 $|a| = \sqrt{a^2}$.

三、集合与区间

集合与区间是经济数学中基本的概念. 在学习微积分和概率论中一些章节的内容时,将涉及集合和区间的有关知识.

1. 集合的基本概念

集合——具有确切含义的若干事物的全体.

元素——组成集合的事物.

用 $A, B, C, \dots$ 表示集合,用 $a, b, c, \dots$ 表示集合的元素. 下面为几个特殊的集合:

$\mathbf{N}$ ——自然数集合, $\mathbf{Z}$ ——整数集合, $\mathbf{Q}$ ——有理数集合, $\mathbf{R}$ ——实数集合.

且有 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

集合的表示方法:

列举法——列出集合的所有元素,并用花括号括起来.

例如: $A = \{a, b, c, \dots, z\}$.

描述法——将集合中元素的共同属性描述出来.

例如: $B = \{x \mid x^2 - 1 = 0, \text{ 且 } x \in \mathbf{R}\}$.

空集——不含任何元素的集合,记作 $\emptyset$.

例如: $\{x \mid x^2 + 1 = 0, \text{ 且 } x \in \mathbf{R}\} = \emptyset$.

因为 $x^2 + 1 = 0$ 无实数解,所以它的实数解集是空集.

全集——在一个具体问题中,如果所涉及的集合都是某个集合的子集,则称这个集合为全集,记作 U .

2. 区间

设 $\mathbf{R}$ 为实数集合, $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$, 有限区间包括以下几种:

开区间:表示为 (a, b) , 满足不等式 $a < x < b$ 的所有实数 x 的集合, 即 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$, 如图 0-0-2 所示.



图 0-0-2

闭区间:表示为 $[a, b]$, 满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的所有实数 x 的集合, 即 $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$, 如图 0-0-3 所示.



图 0-0-3

半开区间:表示为 $[a, b)$ 或 $(a, b]$, 满足不等式 $a \leq x < b$ 或 $a < x \leq b$ 的所有实数 x 的集合, 即 $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$, 如图 0-0-4 所示.

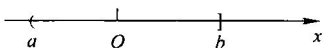


图 0-0-4

$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$, 如图 0-0-5 所示.

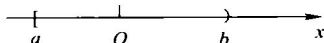


图 0-0-5

区间长度:有限区间右端点 b 与左端点 a 的差 $b-a$. 几何上表示点 a 与点 b 之间的线段长度, 开区间不包括端点, 闭区间包括端点.

引入记号 $+\infty$ (读作“正无穷大”)和 $-\infty$ (读作“负无穷大”), 可以有以下几种无限区间

$$\begin{aligned}(a, +\infty) &= \{x \mid a < x\}, [a, +\infty) = \{x \mid a \leq x\}, \\ (-\infty, b) &= \{x \mid x < b\}, (-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}, \\ (-\infty, +\infty) &= \{x \mid -\infty < x < +\infty\}, \text{即实数集合.}\end{aligned}$$

3. 邻域(点 x_0 的 δ 邻域)

在数轴上以点 x_0 为中心, 长度 δ 为半径的开区间

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$$

称为点 x_0 的 δ 邻域, 记为 $U(x_0, \delta)$ 或 $\dot{U}(x_0)$.

将 $(x_0 - \delta, x_0)$ 和 $(x_0, x_0 + \delta)$ 分别称作点 x_0 的左邻域和右邻域. 一般地, δ 是一个很小的正数. 称区间 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$ 为点 x_0 的 δ 空心邻域或去心邻域, 记为 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 或 $\dot{U}(x_0)$.

例如, $|x - 3| < 2$, 是以点 $x_0 = 3$ 为中心, 半径长度为 2 的邻域, 即开区间 $(1, 5)$; 而 $0 < |x - 3| < 2$ 是以点 $x_0 = 3$ 为中心, 长度为 2 的空心邻域, 即开区间 $(1, 3) \cup (3, 5)$.

四、连加号与连乘号

1. 连加号

$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 表示 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 之和. 连加的结果与脚标选用的记号无关,

即 $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n a_j$. 有如下熟知的公式

$$\sum_{i=1}^n [a_1 + (i-1)d] = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d, \quad \sum_{k=1}^n a_1 q^{n-1} = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} \quad (q \neq 1).$$

2. 双重连加号

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) + (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) + \cdots + (a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn}).$$

显然, 两个连加号可交换: $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}$.

3. 连乘号

$\prod_{i=1}^n b_i = b_1 \cdot b_2 \cdot \cdots \cdot b_n$ 表示 n 个数 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 之积. 特别地

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 1 = \prod_{k=1}^n k,$$

读作 n 的阶乘或者 n 阶乘. 又明显地, $\prod_{i=1}^n a^i = a^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

五、排列数与组合数

1. 排列数 $P_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ 表示从 n 个不同对象中选出 k 个排成一列的方法数; 组合数 $C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \cdots \cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 表示从 n 个不同对象中选出 k 个的方法数, 明显地, $P_n^k = k! C_n^k$, 两者的差别在于是否强调对象的次序.

2. 我们有公式 $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, 这是著名的“杨辉三角”(二项展开式系数 C_n^k 的数字生成方式)的来由.

第一模块

微积分

三百多年前,主要由于受天文学和力学等科学问题的推动和启发,牛顿和莱布尼茨阐发了微积分的概念和方法,使它成为一门独立于古典几何代数的数学分支。三个多世纪过去了,它愈发显示出了强大的生命力。科学的发展表明微积分在处理各类科学和工程技术中的数学问题时具有巨大的威力,而在经济管理专业中,微积分更是显示出了不可磨灭的作用。

本模块是以案例驱动,问题导向为原则,数学概念以案例为背景导入,知识的展开以解决问题为向导,使数学知识来源于实际问题,反过来又应用于实际问题,符合学生的认知规律。模块中突出微积分与经管类专业紧密结合,尽可能应用数学知识解释经济现象,用数学方法解决经济问题,如“融资”和“贴现”问题等,实现教、学、用融为一体,体现数学教学改革精神。

本模块由四部分构成:极限和连续、导数、不定积分、定积分。涉及的基本概念有:函数的极限、函数的连续、导数、积分。要掌握的运算法则和方法:简单的函数极限,求初等函数的导数,利用导数求函数的极值、最值,简单的不定积分与定积分的计算。

例题与习题的精选是本模块的一大特点,题目涉及社会经济、日常生活及管理等方面。本模块融入数学建模思想与数学实验方法,注重学生创新能力与综合素质的培养,增强学生可持续发展能力,渗透数学教育思想,培养学生睿智、细致、坚毅的品质。

结合微积分知识安排相应 Mathematica 软件的实验,每一章的最后一节简单介绍了与该章有关的 Mathematica 软件命令及应用实例,提高学生利用计算机解决问题的能力。

第1章 函数与极限

函数是研究经济现象的重要工具,是应用数学基础的重要概念之一,是高等数学的主要研究对象. 极限概念是微积分的理论基础,极限方法是微积分的基本分析方法,因此,掌握、运用函数和极限的基本知识及有关的基本方法,可为今后的学习奠定必要的基础.



【案例1】

王先生是一家公司的部门经理,月收入6 000元左右,由于工作努力,业绩很好,颇受公司主管赏识. 王先生今年准备买一套两室一厅的商品房,他看好了一套房,结构及地段都很合适,该房价值100万元. 如果王先生自筹40万元,要购房还需贷款60万元,贷款月利率为1%,条件是按月还贷,25年内还清,假如无法偿还,房子归债权人. 请你帮王先生分析,能否贷款购房?



【案例2】

假设你为了孩子的教育,准备在保险公司投入一笔资金,你需要这笔投资12年后价值为100 000元人民币. 如果保险公司以年率9%,以每年支付复利四次的方式付息,你应该投资多少元? 如果复利是连续的,应该投资多少元钱?



【案例3】

把椅子往不平的地面上一放,通常只有三只脚着地,放不稳,然而只需稍挪动几次,就可以使四只脚同时着地放稳. 你能给出椅子能在不平的地面上放稳的数学解释吗?

§ 1.1 函 数

一、函数的概念

1. 函数的定义

在同一研究过程中的几个变量常是相互关联的,某些变量之间可能存在着对应关系. 例如某种商品的价格为常数(p 元/件),则销量 Q (件)与收入 R (元)之间存在着对应关系

$$R = pQ.$$

当销量 Q 取一定值时,收益 R 也对应着一个确定的数值. 收益 R 随销售量 Q 的变化而变化. 这种对应关系称之为函数. 下面给出函数的确切定义.

定义1 设 y 和 x 是两个变量, D 是一个给定的非空数集,如果对于每个数 $x \in D$,变量 y 按照某种对应法则 f ,有唯一确定的数值与之对应,则称 y 是 x 的函数. 记作

$$y = f(x)$$

其中, x 称为自变量, y 称为因变量,数集 D 称为函数 $f(x)$ 的定义域.

对 $x_0 \in D$,按照对应规则 f ,总有确定的 $y_0 = f(x_0)$ 与之对应,称 $f(x_0)$ 为函数在点 x_0 处的函数值. 函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合,称为函数 f 的值域.

决定函数关系的两要素是:函数关系 f 及定义域 D .

函数的表示法有解析法、图象法及列表法.

2. 函数的定义域

当函数用解析法表示时,求函数的定义域的原则是使函数表达式有意义.

例1 已知函数 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$,求:(1) 函数的定义域 D ;

(2) 求函数值 $f(0)$; $f(-3)$; $f\left(\frac{1}{a}\right)$, $a \neq 0$; $f(x+2)$; $f(f(x))$.

解 (1) 要使表达式 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 有意义,要求 $x-1 \neq 0$,即 $x \neq 1$,

所以函数 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 的定义域是 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

$$(2) f(0) = \frac{0+1}{0-1} = -1, \quad f(-3) = \frac{-3+1}{-3-1} = \frac{1}{2},$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\frac{1}{a}+1}{\frac{1}{a}-1} = \frac{1+a}{1-a}, \quad f(x+2) = \frac{x+2+1}{x+2-1} = \frac{x+3}{x+1},$$

$$f(f(x)) = \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = \frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} = \frac{\frac{x+1+x-1}{x-1}}{\frac{x+1-x+1}{x-1}} = x.$$

例2 求函数 $f(x) = \arcsin \frac{x-1}{2}$ 的定义域.

解 要使表达式 $\arcsin \frac{x-1}{2}$ 有意义,要求 $\left|\frac{x-1}{2}\right| \leq 1$,即 $-1 \leq x \leq 3$,

所以函数 $f(x) = \arcsin \frac{x-1}{2}$ 的定义域是 $[-1, 3]$.

例3 求函数 $y = \ln(1-x) + \sqrt{x+3}$ 的定义域.

解 由对数的真数大于零,偶次根式被开方后大于或等于零知

$$\begin{cases} 1-x > 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x < 1 \\ x \geq -3 \end{cases}, \text{即定义域为} [-3, 1).$$

二、分段函数

若函数在其定义域的不同范围内,具有不同的解析表达式,这类函数称为分段函数.

例4 绝对值函数 $y = |x| = \begin{cases} x & \text{当 } x \geq 0 \\ -x & \text{当 } x < 0 \end{cases}$ 的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$,

值域 $W = [0, +\infty)$,函数图如图1-1-1所示.

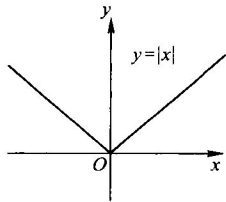


图 1-1-1

例5 税法规定,对适用照顾税率的企业,当月(或季末)应纳税所得额适用税率按下列方法确定:应纳税所得额在10万元(不含)以上的,所缴

税率为33%;应纳税所得额在10万元(含)以下,3万元(不含)以上的,所缴税率为27%;应纳税所