名师随堂

漓江出版社
广西师范大学出版社

高三数学

名师教案精品　同步辅导精华

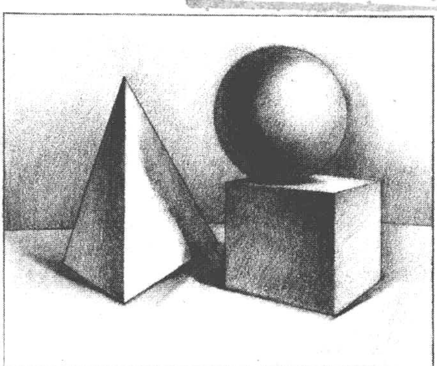
课课通　节节通

主编　黄金标

本册主编　岑志林

◉高三数学

名师题堂



漓 江 出 版 社
广西师范大学出版社

名 师 随 堂

高三数学

本册主编　岑志林

漓　江　出　版　社　出版　(广西桂林市南环路 159－1 号)　邮政编码: 541002
广西师范大学出版社　　　(广西桂林市中华路 36 号)　　　　　　　541001
全国各地新华书店经销　　　　　　　　　荔浦县印刷厂印刷

*

开本:850×1168　1/32　印张:10.375　插页:　字数:370.000
1998年9月第1版　　　　1998年9月第1次印刷
印　数:1－20000册
ISBN7－5407－2327－0/G・784

定价:9.90元

编委会名单

前　　言

目前中学生负担过重,这是有目共睹的现象。对此,应该怎么办? 这是亟待解决的问题。

一些在教育第一线工作几十年的老同志常常在一起研讨学生负担过重的原因,大多数人认为有两个主要因素:其一,教材问题。现行教材分"必修"和"选修",与高考的要求距离较大;在高中阶段进行两次循环,广大师生难以接受。于是,重点高中普遍采用"一步到位"的教学方式(将必修与选修教材综合起来讲授)。还有不少地区(包括北京地区)自编地方性教材。现行统编教材存在的一些问题或多或少都会给中学教学带来一些不良影响,都会影响到统编教材的权威性,造成学生负担过重。其二,师资情况。由于历史上的原因,目前中学师资"青黄不接"的情况比较严重,老教师年纪大了,而且人数少,青年教师比较多,但经验不足,大多数学校都出现明显的"中间断代"现象。青年教师教学上要适应目前高考要求,而处理现行教材难度又很大,于是只得发起"题海"战(这是应试教学中最低劣的战术),学生的负担怎能不重呢!

我们编写的《名师随堂》(高中部分),其目的就是想解决上述两项矛盾,即让老师在备课中有一本好的教学参考书,让学生在学习中有一本较好的学习辅导用书,使"教"与"学"中所需解决的问题,在书

中都能得到较为满意的解答。

这套书在内容上注意了如下统一安排并力求突出其特点：

[教材剖析] 对知识点做精辟分析,并从知识结构上阐述各知识点的地位以及要求掌握的程度。

[能力训练举例] 指出本节的能力要求并举出典型训练例题,让读者从中悟出解题(思路)的一般规律,以起较强的示范作用。

[随堂练习] 根据能力训练要求,选编一定量的课后练习题。题中涉及的知识点力求做到内容全、题型全。

[章末验收试题] 不经过验收,心中便没有底数,通过验收,能肯定成绩,找出不足,达到不可低估的强化作用。

[参考答案] 对练习和试题提供准确答案,对难题有较详细的提示,以便读者对照检查。

由于编写比较仓促,书中难免存在错漏,敬请广大读者批评指正。

编　者

1998 年 5 月于沈阳

目 录

◉代数部分

◉立体几何部分

◉平面解析几何部分

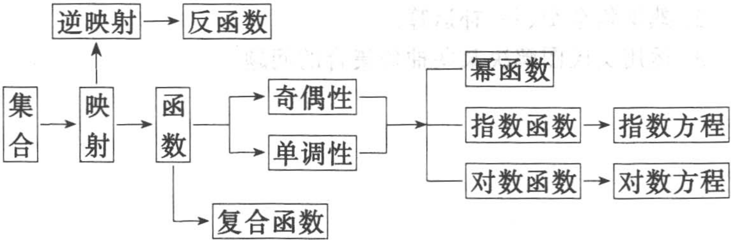
代数部分

第1章 幂函数、指数函数和对数函数

教材剖析

本章主要内容有集合，子集，交集，并集，补集，映射与函数，函数的单调性，函数的奇偶性，反函数的概念与图象，幂函数，指数函数，对数函数，简单的指数方程和对数方程等，共13个知识点.

知识结构



本章要求

(1)理解集合、子集、交集、并集、补集的概念,了解空集和全集的意义,了解属于、包含、相等关系的意义,能掌握有关的术语和符号,能正确地表示一些较简单的集合.

(2)了解映射的概念,在此基础上理解函数及其有关的概念,掌握互为反函数的函数图象间的关系.

(3)理解函数的单调性和奇偶性的概念,并能判断一些简单函数的单调性和奇偶性,能利用函数的奇偶性与图象的对称性的关系描绘函数图象.

(4)掌握幂函数、指数函数、对数函数的概念及其图象和性质,并会解简单的指数方程和对数方程.

1.1 集 合

教材剖析

集合是中学数学最基本的概念之一.集合的思想渗透于中学数学内容的各个方面.集合作为工具在函数、方程、不等式、排列组合及曲线、轨迹等知识中有广泛的运用.

1.掌握集合的有关概念,了解空集与全集的概念、元素与集合、集合与集合之间的关系.

2.熟练集合交、并、补运算.

3.运用文氏图解决某些抽象集合的问题.

能力训练举例

例 1 已知集合 $M=\{y\mid y=x-1, x\geqslant 0\}$, $N=\left\{y\mid y=\log_{\frac{1}{2}}x, \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right\}$,则(　　).

(A)$M\cap N=\varnothing$　　(B)$M\cap N=M$

(C)$M\cup N=\mathrm{R}$　　(D)$N\subset M$

解 $\because$ $M=\{y\mid y=x-1, x\geqslant 0\}=\{y\mid y\geqslant -1\}$, $N=\left\{y\mid y=\log_{\frac{1}{2}}x, \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right\}=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 1\}$,淘汰(A)、(B)、(C),应选(D).

注 对于用描述法给定的集合,它的元素是由集合的指示元素所决定的. 集合 M 与 N 分别是函数 $y=x-1, x\geqslant 0$ 及函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x, \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$ 的值域.

例 2 设全集 $I=\{(x,y)\mid x,y\in\mathrm{R}\}$,集合 $M=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x-3}{x-2}=1\right\}$, $N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$,那么$\overline{M\cup N}$等于(　　).

(A)$\varnothing$　　(B)$\{(2,3)\}$

(C)$(2,3)$　　(D)$\{(x,y)\mid y=x+1\}$

分析 本题集合中的指示元素是(x,y),集合 M 是由直线 $y=x+1$(不含点$(2,3)$)上的所有点的坐标组成的集合;集合 N 是坐标平面内直线 $y=x+1$ 以外所有点的坐标组成的集合,所以$\overline{M\cup N}$等于单元素集合$\{(2,3)\}$,故应选(B).

注意 $\{(2,3)\}$与$(2,3)$的区别,前者集合中仅有一个元素,而后者为数集$\{x\mid 2<x<3\}$.

例 3 已知集合 $A=\{x\mid x^2-ax\leqslant x-a\}$, $B=\{x\mid 1\leqslant \log_2(x+1)\leqslant 2\}$, $C=\{x\mid x^2+bx+c>0\}$.

(1)若 $A\cap B=A$,求实数 a 的取值范围;

(2)若 $B\cap C=\varnothing$ 且 $B\cup C=\mathrm{R}=\mathrm{I}$,求 b、c 的值.

解 (1)由 $A\cap B=A$ 知$A\subseteq B$.

若 $a\geqslant 1$,则 $A=\{x\mid x^2-ax\leqslant x-a\}=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant a\}$,

$B=\{x\mid 1\leqslant \log_2(x+1)\leqslant 2\}=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$.

由 $A\subseteq B$ 得 $1\leqslant a\leqslant 3$.

若 $a<1$,则 $A=\{x\mid a\leqslant x\leqslant 1\}$,$A\not\subseteq B$.

(2)由 $B\cap C=\varnothing$ 且$B\cup C=\mathrm{R}=\mathrm{I}$ 可知 $C=\overline{B}$.

$\because$ $B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$,$C=\overline{B}=\{x\mid x<1$ 或 $x>3\}$

$\therefore$ $b=-(1+3)=-4$,$c=1\times 3=3$.

例4 设含有8个元素的集合 A 的全部子集数为S,其中含5个元素的子集数为 T,求$\dfrac{T}{S}$的值.

分析 集合 A 的全部子集数$S=C_8^0+C_8^1+C_8^2+\cdots+C_8^8=2^8$,其中含5个元素的子集数 $T=C_8^5$,所以$\dfrac{T}{S}=\dfrac{C_8^5}{2^8}=\dfrac{C_8^3}{2^8}=\dfrac{7}{32}$.

一般地,若集合 M 中含有n 个元素,那么集合 M 的全部子集数为 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$ 个.

随堂练习

一、选择题

1. 集合 $M=\{x\mid \mathrm{tg}^2x=1\}$,$N=\left\{x\mid x=\dfrac{k\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathrm{Z}\right\}$则(　　).

(A)$M=N$　　(B)$M\supset N$

(C)$M\subset N$　　(D)$M\cap N=\varnothing$

2. 若集合 $M=\{y\mid y=2^x,x\in\mathrm{R}\}$,$N=\{y\mid y=x^2,x\in\mathrm{R}\}$则(　　).

(A)$M\cap N=\{2,4\}$　　(B)$M\cap N=\{4,16\}$

(C)$M\supset N$　　(D)$N\supset M$

3. 若全集 $I=\{(x,y)\mid x,y\in\mathrm{R}\}$,$A=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{y-1}{x-1}=2,x,y\in\mathrm{R}\right\}$,$B=\{(x,y)\mid 2x-y-1=0,x,y\in\mathrm{R}\}$则$\overline{A}\cap B$是(　　).

(A)$\overline{A}$　　(B)B　　(C)$\varnothing$　　(D)$\{(1,1)\}$

4. 设全集 $I=\{(x,y)\mid x,y\in\mathrm{R}\}$,$f(x)=\sin x$,$g(x)=\cos x$,$M=$

$\{x|f(x)\neq 0\}$，$N=\{x|g(x)\neq 0\}$，那么集合$\{x|f(x)\cdot g(x)=0\}$等于(　　).

(A)$\overline{M}\cap\overline{N}$　　(B)$\overline{M}\cup N$　　(C)$M\cup\overline{N}$　　(D)$\overline{M}\cup\overline{N}$

5. 集合 $M=\{x|x>2\}$、$N=\{x|x<3\}$，那么“$x\in M$ 或 $x\in N$”是“$x\in M\cap N$”的(　　).

(A)充分但不必要条件　　(B)必要但不充分条件

(C)充要条件　　(D)既不充分也不必要条件

二、填空题

1. 若全集 $I=\mathrm{R}$，集合 $A=\{x|\sqrt{x+1}\leqslant 0\}$，$B=\{x|\lg(x^2-2)=\lg x\}$，则 $A\cap\overline{B}=$________.

2. 已知全集 $I=\{x|x^2-5x+6\leqslant 0\}$，$M=\{x|\lg(x-2)\leqslant 0\}$，$N=\left\{x\left|\frac{x-2}{3-x}\geqslant 0\right.\right\}$，则 $\overline{M}\cup\overline{N}=$________.

3. 设含有 4 个元素的集合 A 的全部真子集数为 S，其中含有 2 个元素的子集数为 T，则 $\frac{T}{S}=$________.

4. 已知集合 $E=\{x|\cos x<\sin x, 0\leqslant x\leqslant 2\pi\}$，$F=\{x|\operatorname{tg} x<\sin x\}$，那么 $E\cap F=$________.

5. 已知集合 $M=\left\{(x,y)|y=\sqrt{16-x^2}, y\neq 0\right\}$，$N=\{(x,y)|x-y-a=0\}$，如果 $M\cap B\neq\varnothing$，则 a 满足的条件是________.

三、解答题

1. 已知集合 $A=\{x, xy, \lg(xy)\}$，$B=\{0,|x|,y\}$且 $A=B$，求 x 与 y 的值.

2. 若全集为 $I=\mathrm{R}$，集合 $A=\left\{x\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x-6}>1\right.\right\}$，$B=\{x|\log_3(x-a)<2\}$，若 $A\subseteq B$ 时，求 a 的取值范围.

3. 已知集合 A、B 各有 10 个元素，$A\cap B$ 含有 4 个元素，集合 C 中含有 3 个元素，且满足 $C\subset A\cup B$ 及 $C\cap B\neq\varnothing$，求集合 C 的个数.

1.2 映射与函数

教材剖析

1. 了解映射的概念,映射是特殊的对应.映射有三要素:原象集合 A,象的集合 B 及 A 到 B 的对应法则.

2. 理解函数的概念,函数是特殊的映射.函数的三要素:定义域 A、值域 B 及 A 到 B 的对应法则.能根据函数三要素判断两个函数是否为同一函数.

3. 掌握函数的表示方法,会求函数的定义域及某些简单函数的值域.

4. 会求某些函数的反函数,掌握互为反函数的函数图象间的关系.

5. 会用定义判定函数的单调性与函数的奇偶性,能利用函数的单调性,奇偶性与函数图象的关系描绘函数图象.

能力训练举例

例1 已知集合 $A=\mathrm{R}, B=\{y \mid y \geqslant -1\}$,映射 $f: x \rightarrow y=4^{x}-2^{x+1}, A \rightarrow B$,求在 f 的作用下,象 0 的原象.

解 由映射的概念,有 $4^{x}-2^{x+1}=0$,解得 $x=1$,所以,在 f 的作用下,象 0 的原象是 1.

例2 设集合 $A=\{a, b, c\}, B=\{1,2,3\}$,求出从集合 A 到集合 B 的映射的个数.

分析 集合 A 中元素 a 的象可以是集合 B 的元素 1,2,3 中的任一个,共有 3 种取法,同理集合 A 中的元素 b 和 c 的象也分别有 3 种取法,根据乘法原理,使集合 A 中的任何一个元素在集合 B 中都有唯一的元素和它对应,共有 $3 \times 3 \times 3=27$ 种方法,所以从集合 A

到集合 B 的映射共有 27 个.

注 如果集合 A 中有 m 个元素,B 中有 n 个元素,那么从集合 A 到集合 B 的映射共有 n^m 个.

例 3 下列函数是否为同一函数?为什么?

(1)$f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$;

(2)$f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, g(x)=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$;

(3)$f(x)=x^2, g(x)=(x-1)^2$;

(4)$f(x)=e^{\ln x}, g(x)=\dfrac{x^2}{(\sqrt{x})^2}$.

分析 (1)中的 $f(x)$ 与 $g(x)$ 定义域不同;(2)中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 值域不同;(3)中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应法则不同,所以(1)、(2)、(3)中的两个函数都不表示同一个函数.而函数 $f(x)=e^{\ln x}$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2}{(\sqrt{x})^2}$ 的定义域、值域、对应法则都相同,所以表示同一个函数.

例 4 求下列函数的定义域:

(1)$y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(4x-3)}$;

(2)$y=\dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^x-3^{1-x}-10}}$.

解 (1)为使函数有意义,需满足:

$\log_{\frac{1}{2}}(4x-3)\geqslant 0$, $\therefore\ 0<4x-3\leqslant 1$.

解得 $\dfrac{3}{4}<x\leqslant 1$.

$\therefore$ 函数的定义域为 $\left(\dfrac{3}{4},1\right]$.

(2)由 $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x-3^{1-x}-10>0$,得 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x}-3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-10>0$.

$\therefore\ \left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^x+2\right]\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-5\right]>0$.

$\therefore\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^x>5$. $\therefore\ x<\log_{\frac{1}{3}}5$.