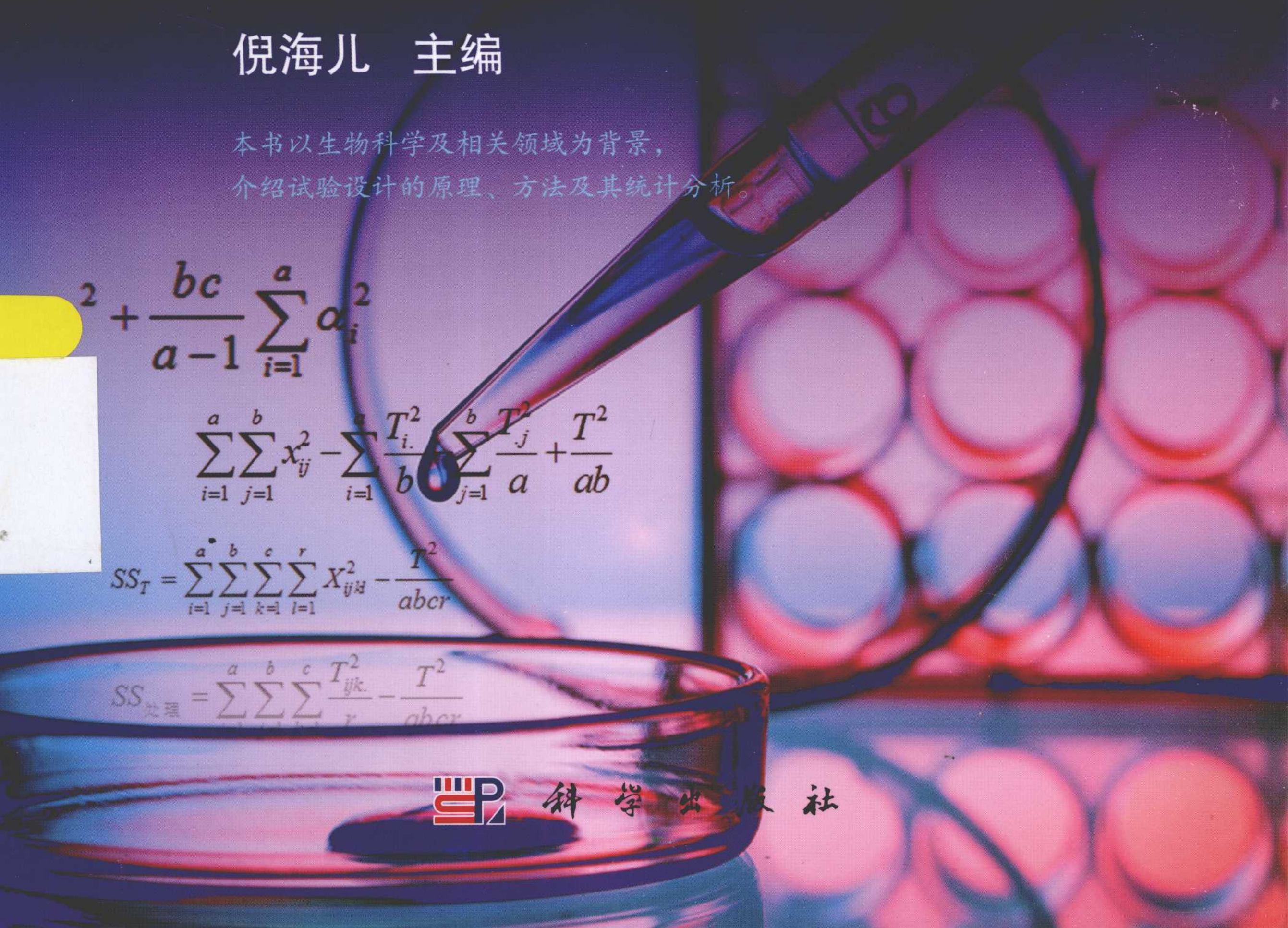
# 生物试验设计与分析

# Experimental Design and Analysis for Biologists

倪海儿　主编

本书以生物科学及相关领域为背景，
介绍试验设计的原理、方法及其统计分析。



$$\cdots^2 + \frac{bc}{a-1}\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}x_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{a}\frac{T_{i.}^2}{b} - \sum_{j=1}^{b}\frac{T_{.j}^2}{a} + \frac{T^2}{ab}$$

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{r}X_{ijkl}^2 - \frac{T^2}{abcr}$$

$$SS_{处理} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\frac{T_{ijk.}^2}{r} - \frac{T^2}{abcr}$$

科学出版社

# 生物试验设计与分析

倪海儿　主编



科学出版社
北　京

## 内 容 简 介

本书以生物科学及相关领域为背景，介绍各类试验设计的原理、方法及其统计分析。全书共7章，第1章介绍试验设计的统计基础及其数据分析的基本原理；第2章介绍试验结果的回归分析；第3章至第7章依次介绍完全随机化试验、随机区组试验、内套试验、正交试验、带协变量的试验的设计与分析。同时把SPSS在试验设计中的应用贯穿于各个章节中。

本书可作为生物科学类及农、林、畜牧、水产、制药、生物资源与环境等相关专业本科生和研究生的教学用书，也可供相关学科的科研、教学、实验及农业推广技术人员参考。

**图书在版编目(CIP)数据**

生物试验设计与分析/倪海儿主编. —北京：科学出版社，2013
ISBN 978-7-03-036054-0

Ⅰ.①生… Ⅱ.①倪… Ⅲ.①生物-试验设计-教材 ②生物学-试验分析(数学)-教材 Ⅳ.①Q-33

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第274570号

责任编辑：陈 露 封 婷 / 责任校对：刘小梅
责任印制：刘 学 / 封面设计：殷 靓

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
上海欧阳印刷厂有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013年1月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2013年1月第一次印刷 印张：15 1/4
字数：342 000
**定价：38.00元**
(如有印装质量问题，我社负责调换)

# 前　　言

生物学科是一门实验性的学科，很多生物学现象及其原理都是在试验中发现，并通过试验加以验证并得出结论的，因此试验设计的好坏，不仅影响到时间与资源的利用效率，更关系到结论的正确、可靠与否。与其他学科比较，生物试验又有其自己的特点：它影响因素众多，需要对事物的各个方面及其相互关系进行全面考察与研究；它受到许多偶然因素的影响，因此如何控制误差、提高试验精度是生物试验设计的一个重要方面。生物学科也是发展最为迅速的学科之一，很多新理论、新发现都需要通过一系列的试验，因此根据研究的背景灵活应用试验设计的原理和方法、合理有效地设计试验方案，并运用合适的统计模型对试验结果进行充分、深入的分析，从而作出精确可靠的推断是本书要解决的问题。

本书以生物科学及相关领域为背景，介绍试验设计的原理、方法及其统计分析。第 1 章，从生物试验的随机性出发，介绍试验设计的统计基础。第 2 章，介绍生物试验结果的回归分析，为生物科学研究提供检验假说、寻找模式、建立相互关系的有力工具。第 3 章至第 7 章，将数据的获得和数据的统计分析贯穿起来，从最基础的试验设计出发，循序渐进，依次介绍完全随机化试验、随机区组试验、内套试验、正交试验、带协变量的试验的设计与分析；同时介绍运用 SPSS 软件进行试验结果分析的方法。为便于理解与应用，本书所有的概念和方法都通过案例加以展现，同时配以适量的习题。

为适应生物学科及其相关学科“试验设计”课程的教学，作者根据多年的教学积累编写了《试验统计学》讲义，本书是在此基础上逐步修改、更新而成的。尤其是作者主持的“试验设计”课程在 2005 年被列为“浙江省精品课程”以后，促进了该课程教学改革的进一步开展，使本书得以进一步完善。但限于作者的水平，书中错误和疏漏在所难免，敬请专家和读者指正。

本书的编写参阅了许多专家的专著、教材、论文，在此向各位专家表示敬意与感谢，也向所有支持、关心本书编写与出版的各位表示感谢。

宁波大学　倪海儿

2012 年 10 月

# 目　　录

# 第 1 章　试验设计的统计基础

在生物科学的研究和实践中，经常会涉及数据，用数据来说明一定时间、一定地点、一定条件下的某些状况，那么数据是怎么获得的呢？数据的收集通常是通过试验设计或抽样技术（限于篇幅，本教材不介绍抽样技术）来实现的。所谓试验设计，就是研究如何更合理、更有效地获得观察资料的方法。从统计角度讲，试验设计是确定一组规则，用来从总体中抽取样本，然后根据这一样本对总体中我们所关心的问题作出推断。这样我们的研究过程就包括两个方面：①合理、有效地获得观察资料，即试验方案的设计；②用获得的资料对所关心的问题作出尽可能精确、可靠的结论，即统计推断。这两个方面密切相关，因为数据分析的方法是直接依赖于所用的试验设计，一个有效的试验设计就能用较少的人力、物力和时间，最大限度的获得丰富而可靠的资料，从而才能对所关心的问题作出尽可能精确，可靠的结论。因此通常把从数据的获得到数据的统计分析整个过程称做试验设计。

生命科学是一门实验科学，很多生物学现象及其原理都是在实验中发现，并通过实验加以验证并得出结论的，因此实验设计的好坏直接影响到结果的分析及其结论的正确、可靠与否。

下面先考虑一个例子。

在池塘养鱼中，要研究投喂两种不同的饲料（比如配合饲料和鲜活饲料，分别用 A、B 表示）鱼的生长是否相同。分别用这两种饲料喂养一个阶段后，得到两组鱼的增重（g）数据：

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 第一组（饲料 A）： | 77.7 | 79.0 | 85.1 | 88.2 | 77.5 |
| 第二组（饲料 B）： | 78.3 | 82.4 | 89.5 | 86.3 | 80.2 |

从以上的两组数据我们是否能判断哪种饲料对鱼的生长更有利呢？其实直接从这两组数据是无法作出判断的。仔细观察这个试验结果可以发现即使在同一种饲料喂养的条件下，鱼的增重也不全相同。在生物科学试验中，这是常见的现象。因为在这类试验中，一次试验所产生的结果，除了受所确定的一组试验条件[上例中的饲料，称做条件（组）]影响外，还会受到条件组以外的众多因素的影响，这些因素有些是我们在试验中未加控制或无法控制的，有些甚至是未知的。这种除条件组以外的其他作用于受试对象的各种因素，统称为随机因素。正因为随机因素的影响，导致试验结果的不确定性。这种在完全相同的条件下，得到的结果不确定的试验称做随机试验。对于一个随机试验，如果用一个变量 $X$ 的值来表示它所有可能的结果，这个变量 $X$ 便叫做随机变量。上例中鱼的增重就是一个随机变量。

生物试验一个最重要的特点是试验结果的不确定性，因此生物科学领域中的试验多属于随机试验。对于随机试验结果（即随机变量）的处理需要用概率统计的方法，因此在

讨论试验设计的原理和方法前，先对概率统计的基本原理作些介绍。

## §1.1 随机变量及其分布

### 1.1.1 随机变量及其分布

随机试验所对应的结果是随机变量，每执行一次随机试验就是对它所对应的随机变量的一次观察，从而得到随机变量的一个观察值。

我们所考虑的随机变量可分为两大类：离散型随机变量和连续型随机变量。

如果随机变量 $X$ 所能取的值的集至多可数，而且 $X$ 以各种确定的概率取这些不同的数值，我们便称 $X$ 为离散型随机变量。设 $X$ 所能取的值为 $x_1, x_2, \cdots x_i, \cdots$

$$P(X = x_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \cdots \tag{1.1.1}$$

表示 $X$ 以概率 $p_i$ 取值 $x_i$，$p_i \geqslant 0$，且 $\sum_i p_i = 1$。则式(1.1.1)叫做离散型变量 $X$ 的概率分布(或 $X$ 的分布)，也叫做 $X$ 的分布列。

如果试验结果可以取数轴上某一区间内的任何值，这类随机变量为连续型随机变量。生物体的许多特征，如长度、重量等均属这类变量。因为数轴上的任何区间都是不可数的，即这类随机变量所能取的值是不能一一例举出来的，所以，用函数

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\mathrm{d}t \tag{1.1.2}$$

表示 $X$ 的概率分布。式(1.1.2)中 $F_X(x)$ 称为 $X$ 的分布函数，$p(x)$ 称为 $X$ 的(概率)密度函数。

具有如下分布函数

$$F_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x \tag{1.1.3}$$

的随机变量称为正态变量。其中 $\sigma > 0$，$-\infty < \mu < +\infty$。它的密度函数为

$$p_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < +\infty \tag{1.1.4}$$

通常把具有式(1.1.4)密度函数的变量 $X$(即正态变量)简记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，“$\sim$”读作“服从”，$N(\mu, \sigma^2)$ 表示具有参数 $\mu, \sigma$ 的正态分布(normal)。它是概率统计中最重要的一个分布。

$\mu = 0$、$\sigma = 1$ 的正态分布叫做标准正态分布，记它的密度函数为 $\varphi(x)$，则

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{1.1.5}$$

这个函数的图形如图 1.1.1 所示。

它的分布函数(记为 $\Phi(x)$)为

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x \tag{1.1.6}$$

$\Phi(x)$ 的图形如图 1.1.2 所示。

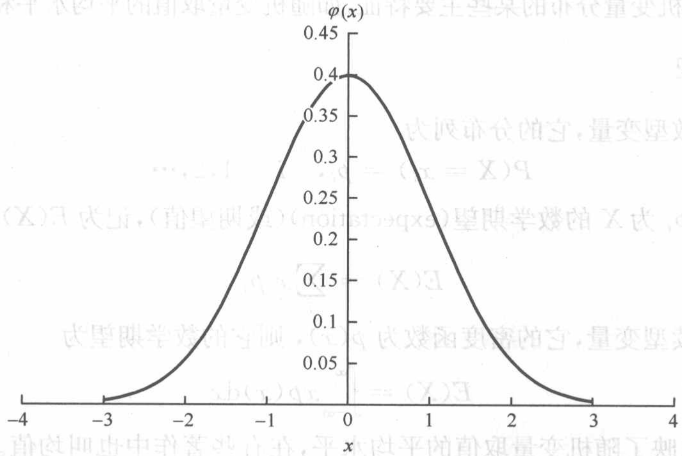



图 1.1.1　标准正态曲线

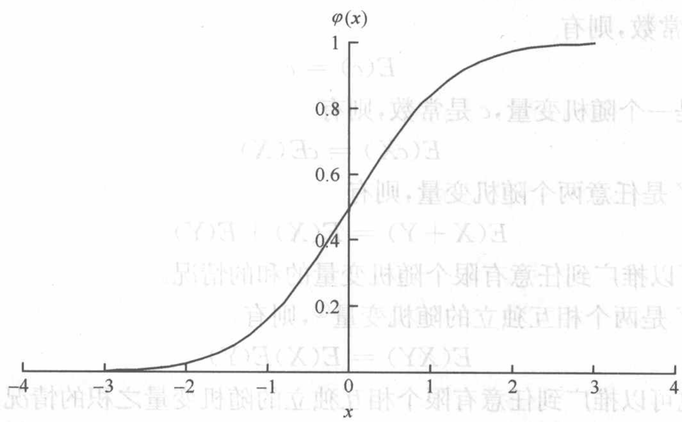



图 1.1.2　标准正态分布函数

对于 $u \leqslant 0$，附表 1 给出了 $\Phi(u)$ 的值。当 $u > 0$ 时，由正态分布的对称性，可得 $\Phi(u) = 1 - \Phi(-u)$。利用附表 1，我们可求得一个标准正态分布的随机变量落在任一区间的概率。例如，

$$P(|X| > 1) = 2\Phi(-1) = 2 \times 0.1587 = 0.3174$$

对于标准正态分布，如果给定了 $\alpha$，由附表 2 可查出 $u_\alpha$，使满足

$$P(X > u_\alpha) = \alpha$$

例如，$u_{0.005} = 2.576$，$u_{0.025} = 1.96$，$u_{0.05} = 1.645$。由正态分布的对称性，可得 $P(|X| > u_{\alpha/2}) = \alpha$，如 $P(|X| > 1.96) = 0.05$。

$u_\alpha$ 称为标准正态分布的上 $100\alpha$ 百分位点。

### 1.1.2　数学期望与方差

我们已经知道分布函数能完整地描述随机变量的统计规律，但在实际问题中，我们还

常常希望知道随机变量分布的某些主要特征，如随机变量取值的平均水平和它的离散程度。

1. 数学期望

若 $X$ 为离散型变量，它的分布列为

$$P(X=x_i)=p_i, \quad i=1,2,\cdots$$

则称 $\sum\limits_i x_i p_i$ 为 $X$ 的数学期望(expectation)(或期望值)，记为 $E(X)$，即

$$E(X)=\sum_i x_i p_i \tag{1.1.7}$$

若 $X$ 为连续型变量，它的密度函数为 $p(x)$，则它的数学期望为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\mathrm{d}x \tag{1.1.8}$$

数学期望反映了随机变量取值的平均水平，在有些著作中也叫均值。应注意分清数学期望与普通平均数的区别。

数学期望具有下列基本性质：

(1) 设 $c$ 是常数，则有

$$E(c)=c \tag{1.1.9}$$

(2) 设 $X$ 是一个随机变量，$c$ 是常数，则有

$$E(cX)=cE(X) \tag{1.1.10}$$

(3) 设 $X$、$Y$ 是任意两个随机变量，则有

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y) \tag{1.1.11}$$

这一性质可以推广到任意有限个随机变量的和的情况。

(4) 设 $X$、$Y$ 是两个相互独立的随机变量①，则有

$$E(XY)=E(X)E(Y) \tag{1.1.12}$$

这一性质也可以推广到任意有限个相互独立的随机变量之积的情况。

(5) 设 $X$ 是离散型变量，分布列为 $P(X=x_i)=p_i(i=1,2,\cdots)$，则随机变量 $u(X)$ 的数学期望是

$$E(u(X))=\sum_i u(x_i)p_i \tag{1.1.13}$$

如果 $X$ 是连续型变量，它的密度函数为 $p(x)$，则 $u(X)$ 的数学期望是

$$E(u(X))=\int_{-\infty}^{\infty} u(x)p(x)\mathrm{d}x \tag{1.1.14}$$

2. 方差

为衡量随机变量的离散程度，我们考虑 $X-E(X)$，并称 $X-E(X)$ 为随机变量的离差。由数学期望的性质，有

$$E(X-E(X))=E(X)-E(X)=0 \tag{1.1.15}$$

也就是说，任何随机变量的离差的期望值均为 0，这虽然是随机变量的一个简单然而重要

① 关于随机变量独立性的概念可参见概率统计的相关教材

的特性,但却无助于解决我们正在讨论的问题。于是,我们进而考虑 $(X-E(X))^2$。把 $E(X-E(X))^2$ 作为随机变量离散程度的度量,称作方差,记为 $D(X)$(deviation)或 $\mathrm{Var}(X)$(variance),即

$$D(X)=\mathrm{Var}(X)=E(X-u)^2 \tag{1.1.16}$$

$\mu$ 为 $X$ 的期望值。称 $\sqrt{D(X)}$ 为 $X$ 的标准差,记为 $\sigma(X)$。

对于离散型随机变量,由方差的定义及期望值的性质(5),有

$$D(X)=\sum_i (x_i-u)^2 p_i \tag{1.1.17}$$

若 $X$ 是具有密度函数 $p(x)$ 的连续型变量,则

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-u)^2 p(x)\mathrm{d}x \tag{1.1.18}$$

正态变量密度函数中的参数 $\mu$ 和 $\sigma^2$ 即为正态分布的数学期望和方差。

以下列出方差的几个重要性质。

(1) 当 $k,c$ 为常数时,有

$$D(kX+c)=k^2D(X) \tag{1.1.19}$$

特别地,当 $k=0$ 时,有 $D(c)=0$;当 $k=1$ 时,有 $D(X+c)=D(X)$,这一式意味着方差是平移不变量。

(2) 对任意实数 $c$,总有

$$D(X)\leqslant E(X-c)^2 \tag{1.1.20}$$

这一性质说明,随机变量对于其数学期望的偏离程度比它关于其他任何值的偏离程度都要小。

(3) 如果 $X_1,X_2$ 相互独立,则

$$D(X_1\pm X_2)=D(X_1)+D(X_2) \tag{1.1.21}$$

设随机变量 $X$ 的数学期望为 $\mu$,方差为 $\sigma^2$,则

$$Y=\frac{X-u}{\sigma} \tag{1.1.22}$$

称为 $X$ 的标准化随机变量。对于 $Y$,显然有 $E(Y)=0,D(Y)=1$。因此若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则 $Y\sim N(0,1)$。式(1.1.22)也称做对随机变量 $X$ 的标准化。

## §1.2　抽样分布

### 1.2.1　总体与样本

对于一个随机试验,如只关注它的某一个或某一些结果的本身是毫无意义的,我们关注的是它所对应的随机变量的分布特征,如它的数学期望、方差和它的概率分布。但在实际问题中,随机变量的分布、分布中的各个参数往往是未知的。我们所能做的只能是按某种方式对随机试验的结果作若干次观察,然后利用所观察的结果去估计、推断它所对应的随机变量的分布。如果把随机试验所有可能的结果看成一个“总体”,我们想要知道的就是这个“总体”的一些特征,而观察到的试验结果只是这个总体的其中一部分。因此,就需

要根据从观察到的部分资料中得到的信息来对“总体”作出推断。这种推断自然包含着某种不确定性，统计方法就是要提供从部分到“总体”的推断方法并且对由此而产生的不确定的程度给出定量的测度。

这里，我们把一个试验所有可能的结果称做总体（或母体）。组成总体的每个基本单元叫做个体。例如，前面的试验中，用饲料 A（或 B）喂养的鱼的所有可能的增重是这个研究的总体，而每一个增重是个体。当然，总体是因我们所讨论的问题而异的。如果我们要讨论某年某水域中某种鱼的体长分布，则该年该水域中所有这种鱼的体长便构成了我们所考虑的总体。在根据我们所获得的资料进行统计推断之前，明确我们所研究的总体是什么，是十分重要的。

如上所述，总体的分布一般是未知的，为了了解总体的分布或它的某些特征，需要进行若干次试验，即重复观察随机变量所取的值，我们就是要根据这些观察所得到的值去对总体作出一些推断，为此，自然要求这些观察值必须具有“代表性”。通常我们自然地要求在进行每次观察时，总体不能有所改变，在这一要求下对总体的每次观察即相当于在同样的条件组下进行一次试验，而且各次试验应当是相互独立的，于是每次试验就将对应着一个与总体具有相同分布的随机变量，而各随机变量间是互相独立的，这种获得观察资料的程序叫做简单随机抽样。由简单随机抽样得到的样本叫做简单随机样本。

由此可见，如果 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 $X$ 的简单随机样本，则每一 $X_i$ 都具有和总体 $X$ 相同的分布，且 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立。$n$ 叫做样本容量。

在不同的抽样观察中，我们得到样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的不同的值，对每一次具体的观察结果而论，它们是一组完全确定的值，记为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，称为样本值。

### 1.2.2 样本均值和样本方差

如果总体 $X$ 的某一参量 $\theta$ 是未知的，为了估计 $\theta$，我们从 $X$ 中抽取容量为 $n$ 的样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，构造这个样本的一个函数 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，对于样本的一组观察值，就可以算出 $\hat{\theta}$ 的一个值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots x_n)$，我们就可以取这个值作为待估参数 $\theta$ 的估计值。为了叙述方便起见，称函数 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为统计量，它的定义如下：

样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的函数 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，如果它不包含总体的任何未知参数，称为统计量。

设 $\hat{\theta}$ 为未知参数 $\theta$ 的估计量，如果 $E(\hat{\theta}) = \theta$，则称 $\hat{\theta}$ 为 $\theta$ 的无偏估计量。

为了对总体的期望和方差作出推断，我们定义两个统计量：样本均值和样本方差。

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是一个样本，则 $\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ 叫做这个样本的样本均值，记为 $\bar{X}$，即

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{1.2.1}$$

统计量

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \tag{1.2.2}$$

叫做样本方差。$S=\sqrt{S^2}$ 叫做样本标准差。

由于

$$E(\bar{X})=E\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\Big)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu=\mu \tag{1.2.3}$$

$$\begin{aligned}E(S^2)&=E\Big(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\Big)=\frac{1}{n-1}E\Big(\sum_{i=1}^{n}((X_i-u)-(\bar{X}-u))^2\Big)\\&=\frac{1}{n-1}E\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i-u)^2-2\sum_{i=1}^{n}(X_i-u)(\bar{X}-u)+n(\bar{X}-u)^2\Big)\\&=\frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n}E(X_i-u)^2-nE(\bar{X}-u)^2\Big)\\&=\frac{1}{n-1}\Big(n\sigma^2-n\frac{\sigma^2}{n}\Big)=\sigma^2\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

因此 $\bar{X}$ 和 $S^2$ 分别为总体期望 $\mu$ 和方差 $\sigma^2$ 的无偏估计量。

若对总体进行了抽样，得到了一组观测值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，利用这一组样本值，便可算出相应的 $\bar{X}$ 和 $S^2$ 的值。

**例 1.2.1**　在本章开头的例子中，我们分别从 A、B 两种饲料喂养的鱼的增重的总体抽得了容量为 5 的两个样本，得到了两组样本的值(77.7,79.0,85.1,88.2,77.5)，(78.3,82.4,89.5,86.3,80.2)，分别计算这两个样本的均值得

$$\bar{x}_1=\frac{77.7+79.0+85.1+88.2+77.5}{5}=81.50$$

$$\bar{x}_2=\frac{78.3+82.4+89.5+86.3+80.2}{5}=83.34$$

为计算样本方差，将式(1.2.2)简化，得

$$\begin{aligned}S^2&=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2X_i\bar{X}+\bar{X}^2)\\&=\frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\bar{X}\sum_{i=1}^{n}X_i+n\bar{X}^2\Big)\\&=\frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\Big)\end{aligned} \tag{1.2.5}$$

将样本值代入式(1.2.5)中，得到两个样本的方差分别为

$$s_1^2=\frac{1}{5-1}(77.7^2+79.0^2+85.1^2+88.2^2+77.5^2-5\times81.50^2)=23.64$$

$$s_2^2=\frac{1}{5-1}(78.3^2+82.4^2+89.5^2+86.3^2+80.2^2-5\times83.34^2)=20.71$$

它们的标准差分别为

$$s_1=\sqrt{s_1^2}=4.86,\quad s_2=\sqrt{s_2^2}=4.55$$

### 1.2.3 样本均值的分布

1. 正态总体样本均值的分布

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，从 $X$ 中抽取了容量为 $n$ 的样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，则 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是 $n$ 个独立正态变量的线性组合，由概率理论可以证明它服从正态分布。已知 $E(\bar{X})=u$，且

$$D(\bar{X})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{\sigma^2}{n} \tag{1.2.6}$$

所以有 $\bar{X}\sim N\left(u,\frac{\sigma^2}{n}\right)$。

$\sigma(\bar{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 是样本均值 $\bar{X}$ 的标准差，简称为标准误差或标准误，通常用 $\sigma_{\bar{x}}$ 表示，即

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{1.2.7}$$

2. 中心极限定理

我们已经知道，如果总体服从正态分布，那么它的样本均值也是正态变量。但在实际问题中，常见的情况是总体的分布是未知的，此时，一般地说，样本均值的分布也就难以确知。中心极限定理给出了当总体分布未知时，样本均值的渐近分布。

中心极限定理：设总体 $X$ 的期望值为 $\mu$，方差为 $\sigma^2$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是它的样本，则对任意实数 $a,b(a<b)$，恒有

$$\lim_{n\to\infty}P(a<\frac{\bar{X}_n-u}{\sigma/\sqrt{n}}\leqslant b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x \tag{1.2.8}$$

其中，$\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

中心极限定理表明，不论总体 $X$ 服从什么分布，只要它的均值和方差存在，那么，从这个总体得到的样本均值，经标准化后，渐近地服从正态分布 $N(0,1)$。

中心极限定理在统计学的理论和应用中，都起着重要的作用，它是许多假设检验方法的基础。

### 1.2.4 $\chi^2$ 分布、$t$ 分布及 $F$ 分布

1. $\chi^2$ 分布

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是相互独立的标准正态变量，记它们的平方和为 $\chi^2$，即

$$\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2 \tag{1.2.9}$$

则 $\chi^2$ 是一个随机变量，它的分布密度函数为

$$p_{\chi^2}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}e^{-x/2}x^{n/2-1} & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}\tag{1.2.10}$$

具有这样密度函数的随机变量叫做自由度(degree of freedom,记作 $df$ 或 $f$) 为 $n$ 的 $\chi^2$ 变量。它的数学期望和方差分别为

$$E(X)=n,\quad D(X)=2n$$

图 1.2.1 画出了自由度为 1、4 及 8 的 $\chi^2$ 分布曲线,由图 1.2.1 可见,$\chi^2$ 的值不小于 0(这也容易从式(1.2.9)看出),分布是偏态的,其偏斜的程度随自由度的减少而加剧。

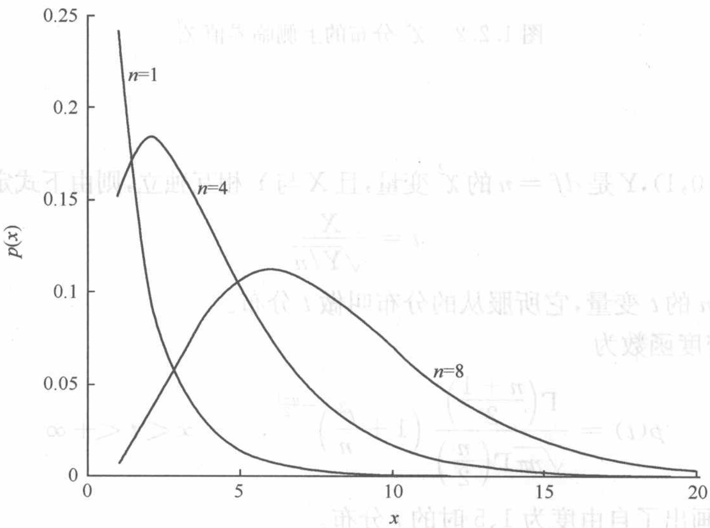



图 1.2.1　自由度为 1、4 及 8 的 $\chi^2$ 分布曲线

$\chi^2$ 分布有下列重要性质:

(1) 设 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 是 $m$ 个独立的随机变量,它们分别服从自由度为 $n_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的 $\chi^2$ 分布,则 $Y_1+Y_2+\cdots+Y_m$ 服从自由度为 $n_1+n_2+\cdots+n_m$ 的 $\chi^2$ 分布。

(2) 设 $Y_1$ 与 $Y_2$ 为两个相互独立的连续型随机变量,若 $Y_1+Y_2$ 为 $df=n_1+n_2$ 的 $\chi^2$ 变量,且 $Y_1$ 为 $df=n_1$ 的 $\chi^2$ 变量,则 $Y_2$ 必为 $\chi^2$ 变量,其自由度为 $n_2$。

(3) 如果 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本,$\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$,则① $\bar{X}$ 与 $S^2$ 相互独立;② $\dfrac{(n-1)}{\sigma^2}S^2$ 服从 $df=n-1$ 的 $\chi^2$ 分布。

对于自由度 $df\leqslant 90$ 及其概率 $\alpha$,满足关系式 $P(\chi^2>\chi^2_\alpha)=\alpha$ 的 $\chi^2_\alpha$ 数值(图 1.2.2)列于附表 3 中。例如当自由度为 5 时,如给定 $\alpha=0.05$,则 $\chi^2_{0.05}=11.070$,即当自由度为 5 时,有

$$P(\chi^2>11.070)=0.05$$

今后将 $df=n$ 的上 100 $\alpha$ 百分位点(上侧临界值)简记为 $\chi^2_\alpha(n)$。

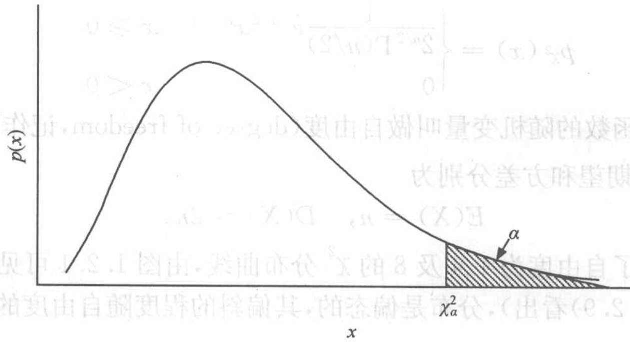



图 1.2.2　$\chi^2$ 分布的上侧临界值 $\chi^2_\alpha$

2. $t$ 分布

设 $X \sim N(0,1)$，$Y$ 是 $df = n$ 的 $\chi^2$ 变量，且 $X$ 与 $Y$ 相互独立，则由下式定义的随机变量

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \tag{1.2.11}$$

叫做自由度为 $n$ 的 $t$ 变量，它所服从的分布叫做 $t$ 分布。

$t$ 分布的密度函数为

$$p(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < t < +\infty \tag{1.2.12}$$

图 1.2.3 画出了自由度为 1、5 时的 $t$ 分布。

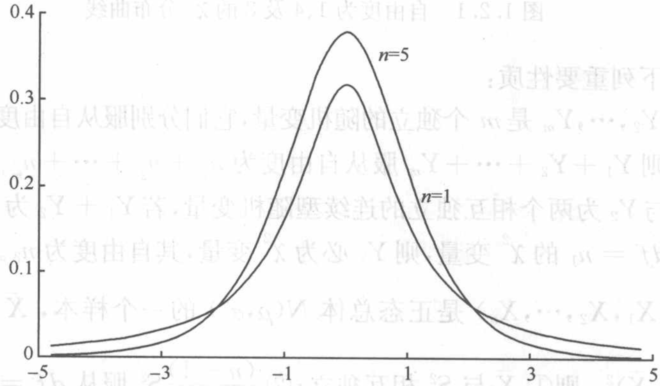



图 1.2.3　自由度为 1、5 的 $t$ 分布曲线

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是正态总体 $N(u,\sigma^2)$ 的一个样本，因为 $\bar{X} \sim N(\mu,\sigma^2/n)$，所以 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，由 $\chi^2$ 的性质，$\frac{(n-1)}{\sigma^2}S^2$ 服从 $df = n-1$ 的 $\chi^2$ 分布，并且 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 与

$\frac{(n-1)}{\sigma^2}S^2$ 相互独立，从而 $\dfrac{\dfrac{\bar{X}-u}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2/\sigma^2}{n-1}}}=\dfrac{(\bar{X}-u)\sqrt{n}}{S}$ 服从 $df=n-1$ 的 $t$ 分布，即

$$t=\frac{\bar{X}-u}{S/\sqrt{n}} \tag{1.2.13}$$

是 $df=n-1$ 的 $t$ 变量，这个结果是统计检验中 $t$ 检验法的依据。

附表4给出了对于给定的 $\alpha$ 及不同的自由度 $df$，满足关系式 $P(t>t_\alpha)=\alpha$ 的值 $t_\alpha$（图1.2.4）。

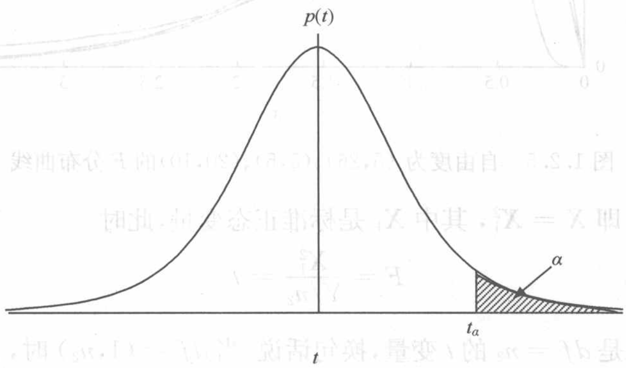



图1.2.4　$t$ 分布的上侧临界值 $t_\alpha$

如自由度为9，$\alpha=0.05$，由附表4可查得 $t_\alpha=1.8331$，即

$$P(t>1.8331)=0.05$$

由于 $t$ 分布是关于原点对称的，所以有

$$P(t<-1.8331)=0.05$$

因此

$$P(|t|>1.8331)=0.10$$

今后，我们将 $df=n$ 时的 $t_\alpha$ 值记作 $t_\alpha(n)$。

可以证明，当 $n\to\infty$ 时，$t$ 分布以 $N(0,1)$ 为极限分布。换言之，$N(0,1)$ 可以看成为 $df=\infty$ 的 $t$ 分布。

3. $F$ 分布

设 $X,Y$ 分别是自由度为 $n_1$ 及 $n_2$ 的 $\chi^2$ 变量，并且 $X$ 与 $Y$ 相互独立，则称随机变量

$$F=\frac{X/n_1}{Y/n_2} \tag{1.2.14}$$

为服从自由度为 $(n_1,n_2)$ 的 $F$ 分布，它的分布密度为

$$p_F(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma((n_1+n_2)/2)}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)}\left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)\left(\dfrac{n_1}{n_2}x\right)^{\frac{n_1}{2}-1}\left(1+\dfrac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases} \tag{1.2.15}$$