北京市海淀区教师进修学校编写

最新高考总复习同步模拟测试卷丛书

数学

SHUXUE

最后一跃

北京师范大学出版社

最新高考总复习同步模拟测试卷丛书

数　学

北京市海淀区教师进修学校　编

北京师范大学出版社

责任编辑：刘　平
封面设计：孙　琳
责任校对：丁　一
责任印制：马洪林

最新高考总复习同步模拟测试卷丛书

数　学

北京市海淀区教师进修学校　编

北京师范大学出版社出版发行(邮编100088)
河北新华印刷三厂印刷　全国新华书店经销
冶金部保定华泰公司激光排版
开本:787×1092　1/16　印张:12.5　字数:280千
1993年10月第1版　　1995年11月第2次印刷

ISBN 7-303-04014-5/G·2808　　定价:11.80元

前　言

为了适应高考改革的形势和帮助应考青年全面复习知识、提高能力，海淀区教师进修学校主编了《最新高考知识点总复习丛书》和《最新高考总复习同步模拟测试卷丛书》。这两套丛书是根据各学科的教学大纲、教材和高考考试说明编写的。前套书是对各学科的知识点、能力要求和考点进行分析和讲解，指出一般学生容易犯的错误以及应注意的问题；再通过典型例题的分析，展现解题的思路，对解法进行点播；引导读者提高分析问题和解决问题的能力；还在做出解题示范后，留给读者适当的练习题，提供训练思维的条件，在练中领会知识的内涵，掌握解题思路，纠正错误，发展能力，把书中的知识要点和能力要求转化成读者的智慧和才能，全面地提高读者备考的复习效益。后一套书，可作为前套书的补充和发展。它的同步性在于两套丛书知识体系的一致性以及练习和复习进度的同时性。即在按照前套丛书的顺序复习完每一个单元后，则可以利用后一套丛书的相应的练习题来评估，这不仅使读者的复习效益得到激励性的评价，而且，也能及时发现自己知识的漏洞和能力的缺陷，从而，得到及时的弥补和纠正，使知识更全面、更正确，能力更强、更高。

这两套丛书包括政治、语文、数学、英语、物理、化学和历史七个学科。由于学科的差异，在保持全套丛书的共同特色外，编者也注意到如何更好地突出学科自身的特点，着力阐述各学科自身的思想、观点和方法，力争做到优势互补，以增强能力的迁移和促进读者全面发展，全面提高。

在《最新高考知识点总复习丛书》数学册中，按照高考“考试说明”的要求及复习进度要求共编排了十三章，每一章首先依高考的要求，就本章的知识、技能、方法、能力做了必要的概述，然后是例题选析，通过对典型例题的分析、解答及相应的“说明”与“小结”，力求覆盖本章的知识、技能、常用方法，同时对高考重点考查的重要数学思想进行恰当地讲解与渗透，如转化的思想，数形结合的思想，函数和方程的思想，分类讨论的思想。

在《最新高考总复习同步模拟测试卷丛书》数学册中，共编排了十四章，前十三章是与“复习指导丛书”数学册的十三章相对应的。在每一章中，首先依章节进度编排了“练习精选”，意在配合前一册的“例题选析”进行必要的练习，达到巩固知识，训练技能、熟练方法，培养能力的目的。通过每一章的“自我检测”，对复习的效果进行测评，以便总结成绩，找出问题，弥补不足。最后在第十四章中编排了四套模拟训练，意在按高考要求进行必要的训练，从心理上、知识上适应高考。

参加数学册编写的有

北京十一学校　　王燕谋
首都师大附中　　普诚兴
北京航空航天大学附中　　王人伟

北京理工大学附中	陈　路
北京石油附中	尹秀芬
北京20中	范登宸
北京八一中学	何振琪
北京海淀区教师进修学校	张振威

从良好的愿望出发，力求把书编得更好点，但由于时间紧迫，能力有限，书中仍有不尽人意的地方，恳请同行和读者批评。

北京市海淀区教师进修学校

1993年7月

目 录

第一章　函　数

练习精选

一、选择题：

(1) 集合 $A=\{x|x\leqslant\sqrt{46}\}$，$a=3\sqrt{5}$，则(C). D

A. $a\subset A$　B. $a\notin A$　C. $\{a\}\in A$　D. $\{a\}\subset A$

(2) 已知集合 M 和 N，则 $M\cap N=N$ 的充要条件是(D).

A. $M\subseteq N$　B. $M\supset N$　C. $M=N$　D. $M\supseteq N$

(3) 若 $A=\{x|\frac{x-1}{x-2}\geqslant 0\}$，$B=\{x|(x-1)(x-2)\geqslant 0\}$，$C=\{x|2^{(x-1)(x-2)}\geqslant 1\}$，则有(　　).

A. $A=B=C$　B. $A\subset B\subset C$　C. $A\subseteq B\subset C$　D. $A=B=C$

(4) 若偶函数 $f(x)$ 在 $-1\leqslant x<0$ 内的表达式是 $f(x)=x+1$，则在 $0<x\leqslant 1$ 内的表达式是(B).

A. $-x-1$　B. $-x+1$　C. $x-1$　D. $x+1$

(5) 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(3+2x-x^2)$ 的递增区间为(C).

A. $(-\infty, 1]$　B. $(-1, 1]$　C. $[1, 3)$　D. $[1, +\infty)$

(6) 设 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数，且当 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 时，有 $f(x)=1+\frac{x}{2}$，则 $f(-11.2)$ 为(B).

A. 0.8　B. 1.4　C. -3.2　D. -0.6

(7) 已知 $y=-\sqrt{1-x^2}$ 的反函数是 $y=-\sqrt{1-x^2}$，则原函数的定义域为(C).

A. $(-1, 0)$　B. $[-1, 1]$　C. $[-1, 0]$　D. $[0, 1]$

(8) 设 $A=\{x|5-x\geqslant\sqrt{2}(x-1)\}$，$B=\{x|x^2-ax\leqslant x-a\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 a 的取值范围是(~~D~~). B

A. $a=1$ 或 $a=3$　B. $1\leqslant a\leqslant 3$　C. $a<1$ 或 $a>3$　D. $1<a<3$

(9) 下列函数中，满足 $f(nx)=[f(x)]^n$ 的是(B).

A. $f(x)=x^2$　B. $f(x)=a^x$　C. $f(x)=\lg|x|$　D. $f(x)=\sin x$

(10) 已知实数 x，y 满足 $2x^2+y^2=6x$，则 x^2+y^2+2x 的最大值为：(B).

A. 14　B. 15　C. 16　D. 不能确定

(11) 方程 $2^x+x^{\frac{1}{3}}=0$ 的解集中元素的个数为(~~B~~). A

A. 0 个　B. 1 个　C. 2 个　D. 3 个

(12) 当 $0<k<1$ 时，关于 x 的方程 $|1-x^2|=kx+k$ 的不同的解的个数是(C).

A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 4 个

(13) 如果 $y=\log_{a^2-1}x$ 在 $(0, +\infty)$ 内是减函数，则 a 的取值范围是(D).

A. $|a|>1$　B. $|a|<\sqrt{2}$　C. $a<-\sqrt{2}$　D. $1<|a|<\sqrt{2}$

(14) 函数 $y=2-\sqrt{-x^2+4x}$　$(x\in[0, 4])$ 的值域是(C).

A. $[-2, 2]$　B. $[1, 2]$　C. $[0, 2]$　D. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

(15) 若关于 x 的方程 $2^{x-1}+2x^2+a=0$ 有两个实数解，则 a 的取值范围是（ B ）.

A. $(-\infty, -1)$　　B. $(-\infty, -\frac{1}{2})$　　C. $(\frac{1}{2}, +\infty)$　　D. $(1, +\infty)$

二、填空题：

(1) 从 A 到 B 的映射是 f：$x\to y=2x-1$，从 B 到 C 的映射是 g：$y\to z=3^y$，则从 A 到 C 的映射 h 为 $x\to z=3^{2x-1}$.

(2) 设 $f(x)$为偶函数，$g(x)$为奇函数，且 $f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$，则 $f(x)=$______，$g(x)=$____.

(3) 已知集合 $A=\{a, a+d, a+2d\}$，$B=\{a, aq, aq^2\}$集合 A、B 均有三个元素，且 $a\neq 0$，则 $A=B$ 成立的条件为 $q=-\frac{1}{2}\ d=-\frac{3a}{4}$. 当 $a=1$ 时，集合 $A=$ $\{1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\}$ $\begin{cases} a+d=aq^2 \\ a+2d=aq \end{cases} \Rightarrow q\neq 1$(舍1) $q=-\frac{1}{2} \Rightarrow d=-\frac{3}{4}a$

(4) 若 $y=f(x)$ 的定义域是$[0, 1]$，则函数 $f(x+a)+f(2x+a)$ $(0<a<1)$ 的定义域是 $-\frac{a}{2}\le x\le\frac{1-a}{2}$ $\begin{cases} 0\le x+a\le 1 \\ 0\le 2a+a\le 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{a}{2}\le x\le\frac{1-a}{2}$

(5) 函数 $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}(-1\leqslant x<0)$ 的反函数为 $y=-\sqrt{2x-x^2}$　$(0,1]$

(6) 已知 $f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$，$g(x)=\begin{cases} x & (x\leqslant 0) \\ x^2 & (x\geqslant 0) \end{cases}$ 则 $f[g(x)]=$ $\begin{cases} 0 & (x\le 0) \\ x^2 & (x>0) \end{cases}$

(7) 函数 $f(x)=ax+b\sin^3 x+1$ 满足 $f(5)=7$，则 $f(5)=$ -5.

(8) 要使关于 x 的不等式 $a^x>a^{\frac{1}{x}}$的解集是空集，实数 a 的值应该是 $a\ge 1$.

(9) 设 $A=\{x|x\geqslant\frac{1}{x}, x\in R\}$，$B=\{x|\sqrt{2x+1}<3, x\in R\}$则 $A\cap B=$ $\{x|-\frac{1}{2}\le x<0, 1\le x<4\}$.

(10) 已知 $f(x)=4^x(x\in R)$，方程 $f(x)=f[f^{-1}(2^x+2)]$的解是 $x=1$.

(11) 函数 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$的值域是 $(-1,1)$.

(12) $f(x)=\lg(ax)\cdot\lg(ax^2)$ 满足 $f(x)=4$ 的实数 x 都大于 1，实数 a 的取值范围是________.

(13) 若 $3x^2+2y^2=9x$，则 x^2+y^2 的最大值为 9.　$y^2=\frac{1}{2}(9x-3x^2)\geq 0$. $x\in[0,3]$. $x^2+y^2=-\frac{1}{2}(x-\frac{9}{2})^2+\frac{81}{8}$ $x=3$时 $x^2+y^2_{max}=9$

(14) 若 $f^{-1}(x)=3^{x^2-2x+3}(x\geqslant 1)$，则 $f(x)=$ $\sqrt{\log_3 x-2}+1$ $(x\geq 9)$.

(15) 若 $f(x)$ 满足 $f(\frac{b}{a})=f(b)-f(a)$，且 $f(\frac{\sqrt{5}-1}{4})=3$ 则 $f(\frac{3-\sqrt{5}}{8})$ 的值为________.

三、解答题：

(1) 已知 $A=\{x|x^2+3x-10<0\}$，$B=\{x||x|=y+1, y\in A\}$求：$A\cap B$.

(2) 关于实数 x 的不等式$|x-\frac{(a+1)^2}{2}|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$与 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$ $(a\in R)$ 的解集依次记为 A、B，求使 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围.

(3) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$，且对 x 的任意一个值都有 $f(x)=f(x-1)+f(x+1)$，

求证：函数 $f(x)$ 一定是周期函数.

(4) 设 $f(x)$ 是在 $x\neq 0$ 有意义的函数，且满足 $2f(x)-f(\frac{1}{x})+\frac{1}{x}=0$，求 $f(x)$ 的表达式及其值域.

(5) 二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象开口向上，且以 y 轴为对称轴. 已知 $a+b=1$，若点(x, y) 在 $f(x)$ 的图象上则点(x, y^2+1) 必在函数 $g(x)=f[f(x)]$的图象上.

①求函数 $g(x)$ 的表达式；

②设函数 $F(x)=g(x)-\lambda f(x)$，是否存在实数 λ 的值使 $F(x)$ 在区间 $(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$ 上是减函数，且在区间 $(-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$ 上是增函数，如果存在，请写明理由.

(6) 已知常数 $a>1$，变数 x，y 满足关于式：$\log_a x+3\log_x a-\log_x y=3$，若 $x=a^t$，当 t 在区间 $[2,+\infty)$ 上变化时，y 有最小值 8，求 a 的值及 y 取最小值时 x 的值是多少？

(7) 若方程 $ax^2-2x+1=0(a>0)$ 的两根满足条件：小根小于 1，大根在 $(1,3)$ 之间，求实数 a 的范围.

(8) a 为何值时，不等式 $0\leqslant x^2+ax+5\leqslant 4$ 恰有一解.

(9) 已知函数 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$

①证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数；

②证明对任意不小于 3 的自然数 n 都有 $f(n)>\frac{n}{n+1}$.

(10) 给定实数 a，$a\neq 0$ 且 $a\neq 1$，设函数 $y=\frac{x-1}{ax-1}(x\in R$，且 $k\neq\frac{1}{a})$

证明①经过这个函数图象上任意两个不同点的直线不平行于 x 轴；

②这个函数的图象关于直线 $y=x$ 成轴对称图形.

(11) 建造一个容积为 $8\mathrm{m}^3$，深为 2m 的长方体无盖水池，如果池底和池壁的造价每平方米分别为 120 元和 80 元，那么水池的最低造价为多少？

(12) 将进货单价为 40 元的商品按 50 元一个售出时，能卖出 500 个，已知这种商品每个涨价 1 元，其销售量就减少 10 个，问为了赚得最大利润，售价应定为多少？

(13) 设函数 $y=f(x)$，$(x\in R$ 且 $x\neq 0)$ 对任意的非零实数 x_1、x_2 满足 $f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ ①求证：$f(1)=f(-1)=0$；②求证：$y=f(x)$ 为偶函数；③已知 $y=f(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的增函数，解不等式 $f(x)+f(x-\frac{1}{2})\leqslant 0$.

(14) 解方程

①$4.9^{\sqrt{x}-2}-3.15^{\sqrt{x}-2}=25^{\sqrt{x}-2}$；　②$\log_{(x+1)}(2x^2+3x-5)=2$.

(15) 已知 Q 点的坐标为 $(-6,0)$，集合 M，N 是坐标平面内的点集，$a\in R^+$，$M=\{P|P$ 点到 y 轴距离与 P 点到 Q 点距离之和等于 $8\}$，$N=\{R|R$ 点到 $(-1,0)$ 点的距离等于 $a\}$

①当 $M\cap N=\Phi$ 时，求 a 的范围.

②若 $M\cap N$ 中恰有 4 个元素，求 a 的值.

自我检测

一、选择题：（共 30 分，10 个小题每小题 3 分）

(1) 集合 $A=\{x|x\neq 1,x\in R\}\cup\{y|y\neq 2,y\in R\}$，集合 $B=(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$，则 A、B 之间的关系为(C).

A. $A=B$　B. $A\subset B$　C. $A\supset B$　D. 无法判定

(2) 若 $\log_{0.6}a<\log_{0.6}b$，则 a 与 b 的大小关系为(D).

A. $a<b$　B. $0<a<b$　C. $b<a$　D. $0<b<a$

(3) 函数 $f(x)$ $x\in R$ 为增函数，则 $f^{-1}(x)$ 是(B).

A. 减函数　B. 增函数　C. 非单调函数　D. 无法判定

(4) 已知 $f(x+1)=\dfrac{x}{x+1}$，则 $f^{-1}(x+1)$ 等于(A)．

A. $-\dfrac{1}{x}$　　B. $\dfrac{x}{1-x}$　　C. $-\dfrac{x+1}{x}$　　D. $\dfrac{x-1}{x}$

(5) 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-6x+8)$ 的递增区间为(A)．

A. $(-\infty, 2)$　　B. $(-\infty, 3)$　　C. $(3, +\infty)$　　D. $(4, +\infty)$

(6) 在图 1 中，函数 $y=ax^2+bx$ 与 $y=ax+b(ab\neq 0)$ 的图象只能为(D)．

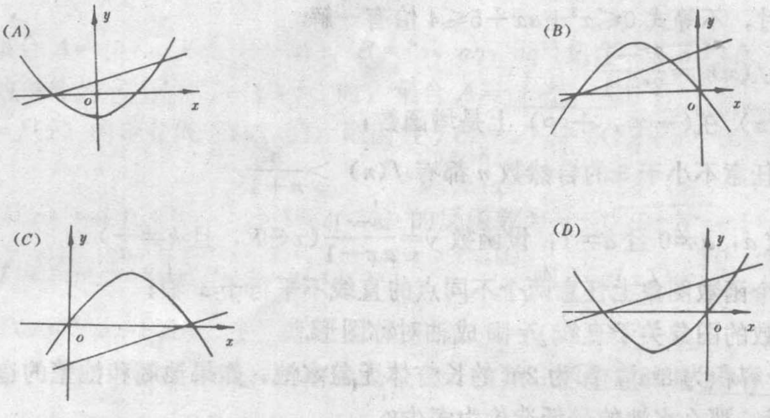

图1

(7) 已知函数 $f(x)$ 的定义域是〔-1, 2〕，则函数 $f(x^2)$ 的定义域为(C)．

A. 〔-1, $\sqrt{2}$〕　　B. 〔0, 2〕　　C. 〔$-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$〕　　D. 〔1, 4〕

(8) 函数 $f(x)=x^{\frac{1}{n^2+n+1}}$ $(n\in N)$，则 $f(x)$ 是(A)．

A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 又奇又偶函数　　D. 非奇非偶函数

(9) 已知函数 $f(x)$ 为奇函数，当 $x\in(0, +\infty)$ 时，$f(x)=\lg(x+1)$，那么当 $x\in(-\infty, 0)$ 时，$f(x)$ 的解析式为(C)．

A. $-\lg(x+1)$　　B. $\lg(1-x)$　　C. $-\lg(1-x)$　　D. $\dfrac{1}{2}\lg(x-1)^2$

(10) 函数 $y=1+\sqrt{4-x^2}$ $(-2\leqslant x\leqslant 2)$ 的图象与函数 $y=k(x-2)+4$ 的图象有两个交点时，实数 k 的取值范围是(B)．

A. $(\dfrac{5}{12}, +\infty)$　　B. $(\dfrac{5}{12}, \dfrac{3}{4}]$　　C. $(0, \dfrac{5}{12})$　　D. $(\dfrac{1}{3}, \dfrac{3}{4}]$

二、填空题：(共 30 分，10 个小题，每小题 3 分)

(1) 全集 $I=\{x\,|\,|x|<5, x\in Z\}$ 中有集合 A、B，其中 $A=\{y\,|\,y=3k, k\in z\}$，$B=\{z\,|\,z=m, m\in N$, 且 $\dfrac{12}{m}\in N\}$ 则 $\overline{A\cup B}=$ $\{-1,-2,-4\}$，$A\cap\overline{B}=$ $\{-3,0\}$．

(2) 函数 $y=\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\lg(2x-1)}$ 的定义域是 $\{x\,|\,\frac{1}{2}<x\leq 2$ 且 $x\neq 1\}$．

(3) 函数 $y=x^{\frac{1}{2}}+1$ 的反函数是 $y=\log_2(x-1)$ $(x\geq 1)$．

(4) 函数 $f(x)=\lg(\sqrt{1+x^2}-x)$ 的奇偶性为 奇函数．

(5) 将 $(0.9)^{-1}$，$(1.2)^{-0.9}$，$\log_{0.9}1.2$ 按从小到大顺序排列为 $\log_{0.9}1.2<(1.2)^{-0.9}<0.9^{-1}$．

(6) 函数 $y=x\sqrt{1-x}$ $(0<x<1)$ 的最大值为______．

$=2\sqrt{\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}x(1-x)}\leq 2\cdot\sqrt{\frac{1}{27}}=\frac{2}{9}\sqrt{3}$

$\leq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$

(7) 函数 $f(x)$，$(x\in R)$ 是最小正周期为 4 的奇函数，已知 $f(a-1)=3$，$(a\in R)$ 则 $f(9-a)$ $=$ <u>-3</u>.

(8) 若 $f(x)$ 对一切实数 x，y 都满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，则 $f(x)$ 的奇偶性为 <u>奇</u>.

(9) 方程：$9^{-x}-2.3^{1-x}=27$ 的解集为 <u>$\{x|x=-2\}$</u>.

(10) 方程：$\log_4(3-x)+\log_{\frac{1}{4}}(3+x)=\log_4(1-x)+\log_{\frac{1}{4}}(2x+1)$ 的解集为 <u>$\{x|x=0\}$</u>.

三、作出下列各函数的图象：（共 15 分，3 个小题每小题 5 分）

(1) $y=|2^x-1|$；　(2) $y=(x-1)^{\frac{2}{3}}$；　(3) $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

四、解答题：共 45 分，5 个小题每小题 9 分.

(1) 已知 $f(x)$ 是奇函数，且 $f(x)=\begin{cases} f_1(x)=\log_2 x & (x>0) \\ f_2(x) & (x<0) \end{cases}$

求 $f_2(x)$ 的解析式.

(2) 函数 $f(x)=2x^2+3tx+2t$ 的最小值为 $m(t)$，问：t 为何值时，$m(t)$ 有最大值.

(3) 设单调递减函数 $f(x)$的定义域为 A,又 $F(x)=a^{f(x)}(a>0)$当 $f(x)>0$ 时,$F(x)>1$. 求证:①若 $f(x)<0$，则 $F(x)<1$；②$F(x)$ 在 A 上是减函数.

(4) 已知 $f(x)=\log_a(a^x-1)$ $(a>0, a\neq 1)$

①求 $f(x)$ 的定义域；②讨论 $f(x)$ 的单调性；③解方程 $f(2x)=f^{-1}(x)$.

(5) 边长为 a 的正三角形 ABC 的三边上各有一点 P、Q、R (如图 2). 且 BP、CQ、AR 的长度分别为 x、y、z，$x+y+z=a$. 求△PQR 的最大面积.

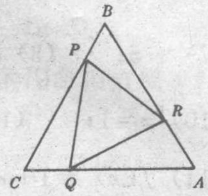

图 2

答案与提示

练习精选

一、选择题：

(1) D；(2) D；(3) D；(4) B；(5) C；(6) B；(7) C；(8) B；(9) B；(10) B；(11) A；(12) C；(13) D；(14) C；(15) B.

提示：(5) 要考虑 $3+2x-x^2>0$；(9) 使用排除法. (10) 利用 $y^2=6x-2x^2$ 代入 $u=x^2+y^2+2x$ 求极值时，还要注意 $6x-2x^2\geqslant o$. (11) 用数形结合的办法，作 $y_1=2^x$，$y_2=-x^{\frac{1}{3}}$的图象，只有一个交点；(12) 作 $y_1=|1-x^2|$，$y_2=kx+k$ 可知 y_1 与 y_2 的图形有三个交点. (13) 从 $0<a^2-1<1$ 知选 (D). (14) 从题设知函数图象为半个圆，作图知 $y\in[0, 2]$. (15) 作图象 $y_1=2^x+2a$，$y_2=-4x^2$，可知 $a\in(-\infty, -\frac{1}{2})$

二、填空题：

(1) h：$x\to z=3^{2x-1}$；　(2) $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$，$g(x)=\frac{x}{x^2-1}$

(3) $q=-\frac{1}{2}$，$d=-\frac{3}{4}a$；　$A=\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$；　(4) $[-\frac{a}{2}, \frac{1-a}{2}]$；

(5) $f^{-1}(x)=-\sqrt{2x-x^2}$，$x\in(0, 1]$；　(6) $f[g(x)]=\begin{cases}0 & (x\leqslant 0)\\ x^2 & (x\geqslant 0);\end{cases}$

(7) -5；　(8) $a=1$；　(9) $\left\{x \middle| -\frac{1}{2}\leqslant x<0, 1\leqslant x<4\right\}$；

(10) $x=1$；　(11) $(-1, 1)$；　(12) $(0, \frac{1}{100})$；　(13) 9；

(14) $f(x)=1+\sqrt{\log 3x-2}$，$(x\geqslant 9)$；　(15) 6.

提示：(3) 利用 $a+d=aq^2$，$a+2d=aq$ 可解；(6) 利用奇函数的性质设 $g(x)=f(x)-1=ax+b\sin^3x$，$g(-x)=f(-x)-1=-g(x)$；(13) $3x^2+2y^2=9x$ 代表一纵椭圆，设 $u=x^2+y^2=(\sqrt{x^2+y^2})^2$ 表示椭圆上的点 (x, y) 到原点距离平方；(15) 令 $a=b$，有 $f(1)=0$，再令 $a=\frac{1}{b}$，则 $f(b^2)=2f(b)$，

$$\therefore\ f(\frac{3-\sqrt{5}}{8})=f[(\frac{\sqrt{5}-1}{4})^2]=2f(\frac{\sqrt{5}-1}{4})=2\times 3=6.$$

三、解答题：

(1) $\because$ $A=\{x|-5<x<2\}$，而从 B 中知 $y=|x|-1$，$y\in A$，

$\therefore$ $-5<|x|-1<2$，　$-4<|x|<3$，　$\therefore$ $-3<x<3$，

即 $B=\{x|-3<x<3\}$　$\therefore$ $A\cap B=\{x|-3<x<2\}$

(2) 从 $|x-\frac{(a+1)^2}{2}|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$，解出 $A=\{x|2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$

$B=\{x|2\leqslant x\leqslant 3a+1\}$ 或 $B=\{x|3a+1\leqslant x\leqslant 2\}$　$\because$ $A\subseteq B$

$\therefore$ 有 $\begin{cases}2a\geqslant 2\\ a^2+1\leqslant 3a+1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}3a+1\leqslant 2a\\ a^2+1\leqslant 2.\end{cases}$

解出 $\{a|1\leqslant a\leqslant 3$ 或 $a=-1\}$.

(3) 证明：$\because$ $f(x)=f(x-1)+f(x+1)$　$x\in R$.

$\therefore$ $f(x+1)=f(x)+f(x+2)=f(x)+f(x+1)+f(x+3)$

故 $f(x)+f(x+3)=0$　以 $x+3$ 代换 x.

$\therefore\ f(x+3)+f(x+6)=0$　$\therefore\ f(x)=f(x+6)$.

故 $f(x)$ 是以 6 为周期的周期函数.

(4) $f(x)=-\frac{1}{3}(x+\frac{2}{x})$，值域为 $(-\infty,-\frac{2\sqrt{2}}{3}]\cup[\frac{2\sqrt{2}}{3},+\infty)$.

(5) $f(x)=x^2+c$，$g(x)=x^4+2cx^2+c^2+c$，点 (x,y) 在 $f(x)$ 的图象上，$\therefore\ y=x^2+c$，点 (x,y^2+1) 在 $g(x)$ 图象上.

$\therefore\ (x^2+c)^2+1=x^4+2cx^2+c^2+c$　解出 $c=1$.

$\therefore\ f(x)=x^2+1$　$g(x)=x^4+2x^2+2$.

假设存在实数 λ 的值使 $F(x)=x^4+(2-\lambda)x^2+2-\lambda$ 符合题意，可求出 $\lambda=3$.

(6) 原方程化为 $\log_a x+\frac{3}{\log_a x}-\frac{\log_a y}{\log_a x}=3$；$\because\ x=a^t\ (a>1)$,

$\therefore\ \log_a x=t$，上式化为 $\log_a y=t^2-3t+3$. $\therefore\ y=a^{t^2-3t+3}$.

设 $u=t^2-3t+3=(t-\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}$.

当 $t\in[2,+\infty)$ 时，u 是 t 的增函数，即 $t\geqslant 2$ 时，$u\geqslant 1$.

$\because\ a>1$，$\therefore\ a^u\geqslant a$　当 $t=2$ 时，$y_{\min}=a$.

由已知 $y_{\min}=8$　$\therefore\ a=8$，$x=a^t=8^2=64$.

(7) 设 $f(x)=ax^2-2x+1$，$\because\ a>0$，图象开口向上.

从小根小于 1,大根在(1,3)之间,知 $f(1)\cdot f(3)<0$. 解出：$\frac{5}{9}<a<1$.

(8) 设 $f(x)=x^2+ax+5$，恰有一解即相当于问 a 为何值时，$f(x)$ 的图象顶点纵坐标为 4，解出 $a=\pm 2$.

(9) 此题为 91 年三南地区高考题.

①常规证法；②利用数学归纳法.

(10) 此题为 88 年全国高考试题.

①只要证明 $x_1<x_2\in R$ 且 $x_{1,2}\neq\frac{1}{a}$ 时，$f(x_1)\neq f(x_2)$ 即可.

②只要证明 $f(x)$ 的反函数就是 $f(x)$ 即可.

(11) 此题为 93 年北京地区高考试题.

据题意，设造价 $S=120\cdot xy+80.\ 2(2x+2y)$，又 $2xy=8$

$\therefore\ S=480+320(x+y)\geqslant 480+320\cdot 2\sqrt{xy}=1760$.

当 $x=y=2$ 时，造价最低为 1760 元.

(12) 设提高 x 元出售时，则增加 $(50+x)(500-10x)$ 元.

利润为 $(10+x)(500-10x)$ 元

当　$x=70$ 时，$(10+x)(500-10x)$ 最大.

故售价定为 70 元利润最大.

(13) ①令 $x_1=x_2=1$，得 $f(1)=0$，再令 $x_1=x_2=-1$，可得 $f(-1)=0$.

②$f(x)=f[(-x)(-1)]=f(-x)+f(-1)=f(-x)$ $\therefore$ 为偶函数.

③从 $f(x)+f(x-\frac{1}{2})\leqslant 0$，　得 $f[x(x-\frac{1}{2})]\leqslant f(1)$

若　$x(x-\frac{1}{2})\neq 0$ 时，$x(x-\frac{1}{2})>0$ 有 $x(x-\frac{1}{2})\leqslant 1$.

$\therefore\ \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$.

若 $x\left(x-\dfrac{1}{2}\right)<0$ 则 $-x\left(x-\dfrac{1}{2}\right)>0$.

$\therefore\ x\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\geqslant 1$, $\Delta<0$, $x\in R$.

$\therefore$ 不等式的解为$\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}\leqslant x<0,\ 0<x<\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}<x\leqslant\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}\right\}$.

(14) ①$x=4$; ②$x=2$

(15) 设 P 点的坐标为 (x, y)，则 $\sqrt{(x+6)^2+y^2}+|x|=8$.

即$\begin{cases}x\geqslant 0\\ y^2=-28\ (x-1)\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0\\ y^2=4\ (x+7)\end{cases}$

所以，M 是两段抛物线弧.

$\because\ N=\{R\,|\,R$ 点到 $(-1,0)$ 的距离为 $a\}$

$=\{(x, y)\ |\ (x+1)^2+y^2=a^2,\ a\in R^+\}$

$\therefore\ N$ 所表示的点集为圆，设此圆为$\odot C$.

$M\cap N$ 即方程组

Ⅰ：$\begin{cases}y^2=-28\ (x-1),\ (x>0)\\ (x+1)^2+y^2=a^2\end{cases}$ 及 Ⅱ：$\begin{cases}y^2=4\ (x+7)\ (x<0)\\ (x+1)^2+y^2=a^2\end{cases}$ 的解集的并集.

①考察方程组Ⅰ：Ⅰ有解时 $2\leqslant a\leqslant\sqrt{29}$，因此当Ⅰ无解时，$0<a<2$ 或 $a>\sqrt{29}$.

类似可得，当Ⅱ无解时，$0<a<2\sqrt{5}$ 或 $a>b$.

$\therefore$ 当 $M\cap N=\Phi$ 时，$a\in(0,2)\cup(6,+\infty)$.

②当圆与两段抛物线弧分别有两个交点时，$M\cap N$ 中恰有 4 个元素（作图可知）

$\therefore\ a=\sqrt{29}$ 或 $a=2\sqrt{5}$.

自我检测

一、选择题：

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
答案	C	D	B	A	A	D	C	A	C	B

二、填空题：

(1) $\{-4,-2,-1\}$；$\{-3,0\}$；(2) $\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{2}<x\leqslant 2,\ x\neq 1\right\}$；(3) $y=(x-1)^2\quad(x\geqslant 1)$；

(4) 奇函数；(5)$\log_{0.9}1.2<(1.2)^{-0.9}<(0.9)^{-1}$；(6)$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$；(7)$-3$；(8)奇函数；

(9)$\{x\,|\,x=-2\}$；(10) $\{x\,|\,x=0\}$.

三、作函数图象：

（1）如图 3　　　　（2）如图 4　　　　（3）∵　$y=\dfrac{2(x-1)+3}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}+2$

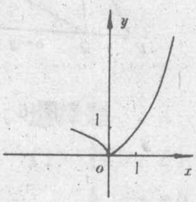

图 3

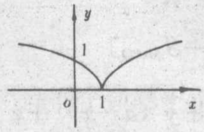

图 4

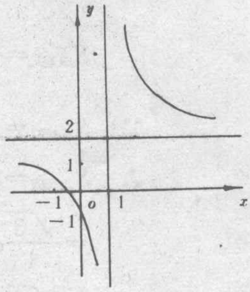

图 5

四、解答题：

（1）**解**：　∵　当 $x>0$ 时，有 $f(x)=\log_2 x$.

∴　当 $x<0$ 时，有 $-x>0$.　　使 $f(-x)=\log_2(-x)$.

又 $f(x)$ 为奇函数，　　∴　$-f(x)=\log_2(-x)$.

即　$f_2(x)=-\log_2(-x)$.　　　$(x<0)$.

（2）**解**：　∵　$f(x)=2x^2+3tx+2t$

当　$x=-\dfrac{3t}{2\cdot 2}=-\dfrac{3}{4}t$ 时，

$f_{(x)}|\min=\dfrac{4\cdot 2\cdot 2t-(3t)^2}{4.\ 2}=\dfrac{1}{8}(16t-9t^2)$.

即　$m(t)=\dfrac{1}{8}(-9t^2+16t)=-\dfrac{9}{8}(t-\dfrac{9}{8})^2+\dfrac{8}{9}$.

当 $t=\dfrac{9}{8}$ 时，$m(t)$ 的最大值为 $\dfrac{8}{9}$.

（3）**证**：1）设 $f(x)<0$，则 $-f(x)>0$　∴　$a^{-f(x)}>1$

即　$\dfrac{1}{a^{f(x)}}>1$，　　∴　$a^{f(x)}<1$，即 $F(x)<1$.

2）任取 x_1，$x_2\in A$，且设 $x_1<x_2$.

∵　$f(x)$ 在 A 上递减，∴　$f(x_2)-f(x_1)<0$.

即　$F(x_2)-F(x_1)=a^{f(x)}-a^{f(x_1)}=a^{f(x_1)}[a^{f(x_2)-f(x_1)}-1]$

∵　　$a^{f(x_1)}>0$，又从（1）知 $a>1$.（否则与 $f(x)>0, F(x_1)>1$ 矛盾）

则　$a^{f(x_2)-f(x_1)}<1$. ∴　$F(x_2)-F(x_1)<0$. $F(x)$ 在 A 上单调递减.

（4）**解**：1）$f(x)$ 的定义域为 $a^x-1>0$　　$(a>0, a\neq 1)$

∴　$a^x>1$，$a^x>a^0$. 若 $a>1$，则 $x>0$. 若 $0<a<1$，则 $x<0$.

2）若 $a>1$ 时，a^x-1 随 x 的增加而增加，故 y 也增加. 反之，亦同时减少.

若 $0<a<1$ 时，a^x-1 随 x 增加而减少，由于底数（$0<a<1$）y 反而增加. 反之，x 减少，y 亦减少.

由于 $x\neq 0$，∴　$f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为增函数. 在 $(0, +\infty)$ 上边为增函数.

3）$f(2x)=\log_a(a^{2x}-1)$，$f^{-1}_{(x)}=\log_a(a^x+1)$

由于 $f(2x)=f^{-1}(x)$　　　∴　$a^{2x}-1=a^x+1$，$a^{2x}-a^x-2=0$.

解得：$a^x=-1$（舍之）. $a^x=2$.

∴ $x=\log_a 2$（经检验是原方程的根）

（5）**解**：（如图 6）∵ $\triangle ABC$ 为正三角形

∴ $S_{\triangle BPR}=\frac{1}{2}x(a-z)\cdot\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{4}x(a-z)$

$S_{\triangle CQP}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot y(a-x)$，$S_{\triangle ARQ}=\frac{\sqrt{3}}{4}z(a-y)$.

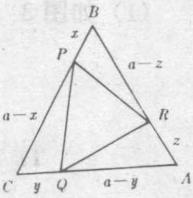

图 6

∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，

∴ $S_{\triangle PQR}=S_{\triangle ABC}-[S_{\triangle BPR}+S_{\triangle CQP}+S_{\triangle ARQ}]$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}[x(a-z)+y(a-x)+z(a-y)]$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}[a(x+y+z)-(xy+yz+zx)]=\frac{\sqrt{3}}{4}(xy+yz+zx)$

∵ $a^2=(x+y+z)^2\geqslant3(xy+yz+zx)$，∴ $S_{\triangle PQR}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a^2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2$.

即当 $x=y=z$ 时，$\triangle PQR$ 的最大面积为 $\frac{\sqrt{3}}{12}a^2$.