ADVANCED MATHEMATICS GUIDE

高等数学学习指导

第2版

（上 册）

孙法国 主编

西北工业大学出版社

高等数学学习指导

（第2版）

（上册）

主　编　孙法国
副主编　韦奉岐　胡新利　王晓东
编　者　王彩霞　王姗姗　孙　娜　刘俊利　李巧艳
杨阿莉　赵宁波　张娟娟　贾悦利

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是作者根据多年的教学经验，在对教学大纲和课程内容进行深入研究和理解的基础上编写而成的．全书分上、下册，共25讲，每讲有9个板块：重点内容提要，重点知识结构图，释疑解惑，考点及典型例题分析，课后习题选解，学习效果测试题，学习效果测试题答案与提示，考研模拟训练题，考研模拟训练题答案与提示．

本书通过“重点知识结构图”，理顺了各知识点之间的关系；通过“释疑解惑”，对重点概念及容易混淆的问题进行了诠释及辨析；通过对典型例题的分析和解答，揭示了高等数学的解题方法、解题规律和解题技巧．

本书是高等学校理工科及经济管理类专业本科生学习高等数学的同步辅导资料，也可以作为研究生入学考试的参考资料．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/孙法国主编．—2版．—西安：西北工业大学出版社，2011.9
ISBN 978-7-5612-2898-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①孙… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第168722号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路127号 邮编：710072
电 话：(029)88493844 88491757
网 址：www.nwpup.com
印 刷 者：陕西兴平报社印刷厂
开 本：787 mm×1 092 mm 1/16
印 张：39.25
字 数：1 208千字
版 次：2011年9月第2版 2011年9月第2次印刷
定 价：59.80元(共二册：上册：31.00元，下册：28.80元)

前　　言

高等数学是高等学校理工科及经济管理类的一门重要基础课.为了帮助读者学好高等数学,我们根据多年的教学经验,在对教学大纲和课程内容进行深入研究和理解的基础上编写了本书.本书是理工科及经济管理类专业学生学习高等数学的同步辅导资料,也可以作为研究生入学考试的参考资料.

本书按照同济大学数学教研室编的《高等数学》(第五版)的章节顺序分上、下册,共25讲,每讲分为9个部分:

一、重点内容提要;

二、重点知识结构图;

三、释疑解惑;

四、考点及典型例题分析;

五、课后习题选解;

六、学习效果测试题;

七、学习效果测试题答案与提示;

八、考研模拟训练题;

九、考研模拟训练题答案与提示.

本书有以下几个特点:

(1)对每讲的内容及方法作了小结,并指出了课程考试重点和考研重点.

(2)给出了重点知识结构图,理顺了各知识点之间的关系.

(3)通过"释疑解惑",对初学者难以理解、不易掌握以及容易混淆的各种问题,进行分析、推理和演算,力求使读者建立起准确无误的概念.

(4)通过典型例题介绍方法,注重分析和一题多解.

(5)对课后习题做了选解,以方便读者参考.

(6)精心设计学习效果测试题,以方便初学者检测所学之用.

(7)根据大纲编写了考研模拟训练题,兼顾了考研同学复习的需要.

(8)在同济大学《高等数学》(第五版)内容的基础上,增加了"导数在经济学上的应用"及"定积分在经济学上的应用"内容以方便经济管理类专业学生的使用.

本书第1,2讲由韦奉岐编写,第3,4讲由贾悦利编写,第5,6讲由孙法国编写,第7讲由刘俊利编写,第8,13讲由王晓东编写,第9,10讲由王彩霞编写,第11,12讲由孙娜编写,第14,15讲由杨阿莉编写,第16,17讲由赵宁波编写,第18,19讲由张娟娟编写,第20,21讲由王姗姗编写,第22,23讲由李巧艳编写,第24,25讲由胡新利编写.全书由孙法国统稿并担任主编.

限于编者水平,书中若有疏漏之处,敬请读者批评指正.

编　者
2011年7月于西安

目　　录

第 1 讲 函数与极限

1.1 重点内容提要

1.1.1 映射的概念

设 X,Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中的每个元素 x，按法则 f 在 Y 中有唯一确定的 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作

$$f: X \to Y$$

其中，y 称为元素 x（在映射 f 下）的像，记作 $f(x)$，即

$$y = f(x)$$

集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f，即

$$D_f = X$$

X 中的所有元素的像组成的集合称为映射 f 的值域，记作 R_f 或 $f(X)$，即

$$R_f = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

注 (1) 构成一个映射必须具备三个要素：集合 X，即定义域 $D_f = X$；集合 Y，即值域 $R_f \subset Y$；对应法则 f，使对每个 $x \in X$，有唯一确定的 $y = f(x)$ 与之对应.

(2) 对每个 $x \in X$，元素 x 的像 y 是唯一的；而对每个 $y \in R_f$，y 的原像不一定唯一；映射 f 的值域 R_f 是 Y 的子集，即 $R_f \subset Y$，不一定 $R_f = Y$.

1.1.2 函数的概念

设数集 $D \subset R$，则称映射 $f: D \to R$ 为定义在 D 上的函数，记作 $y = f(x) \quad (x \in D)$，称 D 为该函数的定义域；x 称为自变量；y 称为因变量或函数.

1.1.3 函数的特性

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 在 I 上有定义（I 可以是 $f(x)$ 的整个定义域，也可以是定义域的一部分），如果存在正数 M，使得 $x \in I$ 时，$|f(x)| \leqslant M$，这时称函数 $f(x)$ 在 I 上有界；如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 I 上无界.

注 (1) 正数 M 不是唯一的，但也不是任意的.

(2) 由于正数 M 不唯一，所以定义中的 $|f(x)| \leqslant M$ 也可以换成 $|f(x)| < M$.

(3) 函数 $f(x)$ 是否有界与所讨论的区间有关. 例如，$f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界，但在 $(0,+\infty)$ 内无界.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I \subset D$,如果对于 I 内的任何两点 x_1, x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,有

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad (f(x_1) > f(x_2))$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调增加(减少)的函数.这时区间 I 就称为单调区间.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

注 单调性与区间有关.例如,$y = x^2$ 在$(-\infty, 0]$上是单调减少的,在$[0, +\infty)$上是单调增加的,因而在$(-\infty, 0]$上或$[0, +\infty)$上是单调的,但在$(-\infty, +\infty)$上不是单调的.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x \in D$,必有 $-x \in D$).如果对于任一 $x \in D$,都有

$$f(-x) = f(x) \qquad (f(-x) = -f(x))$$

则称 $f(x)$ 为偶(奇)函数.

注 (1) 偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

(2) 存在既是奇函数又是偶函数的函数,即 $f(x) = 0$,而且是唯一的.

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个正数 T,使对于任一 $x \in D$,有$(x \pm T) \in D$,且 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,T 称为 $f(x)$ 的周期.

注 (1) 若 T 是 $f(x)$ 的周期,则 kT(k 为整数)也是 $f(x)$ 的周期,通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

(2) 不是任何周期函数都有最小正周期,例如,$f(x) = c$(c 为常数)是周期函数,但没有最小正周期.

(3) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数,则在定义域内每一个长度为 T 的区间上,函数图形有相同的形状.

1.1.4 反函数

设函数 $f: D \to f(D)$ 是单映射,则它存在逆映射 $f^{-1}: f(D) \to D$,称此逆映射 f^{-1} 为函数 f 的反函数.函数 $y = f(x)$ 的反函数记作 $y = f^{-1}(x)$.

注 (1) 把直接函数 $y = f(x)$ 和它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 画在同一坐标平面上,这两个图形关于直线 $y = x$ 对称.

(2) 若 $y = f(x)$ 是单值单调增加(或减少)的,则它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 也是单值单调增加(或减少)的.

1.1.5 复合函数

如果 y 是 u 的函数 $y = f(u)$,而 u 又是 x 的函数 $u = \varphi(x)$,且 $\varphi(x)$ 的值域全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内,那么 y 成为 x 的函数,记作 $y = f[\varphi(x)]$,这个函数称为由 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数.u 称为中间变量.

注 函数的复合是有条件的,不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数.只有 $u = \varphi(x)$ 的值域与 $y = f(u)$ 的定义域的交集非空时,它们才能复合.

1.1.6 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数统称为基本初等函数.

1.1.7　初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤而得到的，并且可用一个式子表示的函数称为初等函数.

1.1.8　极限的概念

1. 数列极限的定义

如果数列$\{x_n\}$与常数a有下列关系：对于任意给定的$\varepsilon>0$(不论它多么小)，总存在正整数N，使得对于$n>N$的一切x_n，不等式$|x_n-a|<\varepsilon$成立，则称常数a是数列$\{x_n\}$的极限，或称数列$\{x_n\}$收敛于a，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \quad 或 \quad x_n\to a(n\to\infty)$$

如果数列没有极限，则说数列是发散的.

注　(1) ε是任意给定的正数，ε的作用是刻画变量x_n与常数a的接近程度. ε是任意给定的，一旦给定就相对固定了，即在寻找N的过程中不变.

(2) N是正整数，它的作用是刻画了从N以后所有的项x_n都满足$|x_n-a|<\varepsilon$. N依赖于ε，但不唯一.

(3) 数列$\{x_n\}$的极限为a的几何解释：对于任意给定的$\varepsilon>0$，数列$\{x_n\}$落在$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$之外的点至多为有限个(即至多为$N$个). 由此推知收敛数列必有界.

2. 当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限的定义

设函数$f(x)$在x_0的某一去心邻域内有定义，如果任给$\varepsilon>0$(不论多么小)，存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，则常数A就称为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0)$$

注　(1) ε是任意给定的正数，ε的作用是刻画$f(x)$与常数A的接近程度. ε是任意给定的，一旦给定就相对固定下来了，即在寻找δ的过程中不变.

(2) δ是正数，它用来刻画x与x_0的接近程度，δ不唯一. δ与ε和x_0有关，当x_0给定后，δ依赖于ε.

(3) 当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限存在与否，与x_0点邻域的函数值变化趋势有关，与$f(x)$在x_0点是否有定义无关. 若有定义，与$f(x_0)$的值也无关. 这就是在定义中不把$0<|x-x_0|<\delta$写成$|x-x_0|<\delta$的原因.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的几何解释：任给$\varepsilon>0$，作平行于$x$轴的两条直线

$$y=A+\varepsilon,\quad y=A-\varepsilon$$

介于这两条直线之间的是一横条区域. 依定义，对于给定的x_0，存在点x_0的一个δ邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$. 当$y=f(x)$的图形上的点的横坐标x在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内，但$x\neq x_0$取值时，这些点的纵坐标$f(x)$满足

$$|f(x)-A|<\varepsilon \quad 或 \quad A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$$

亦即这些点落在上面所作的横条区域内(见图 1.1).

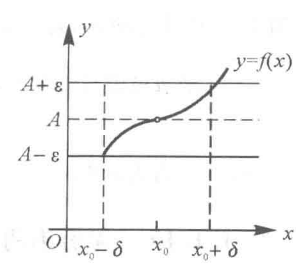

图　1.1

(5) 由极限定义以及左右极限的定义可知：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的充要条件是

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$$

3. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限的定义

设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义，如果任给 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$. 当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则常数 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to\infty)$$

如果 $x>0$ 且无限增大（记作 $x\to+\infty$），只把上面定义中的 $|x|>X$ 改为 $x>X$，就可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 的定义. 同样，$x<0$ 且 $|x|$ 无限增大（记作 $x\to-\infty$），只把上面定义中的 $|x|>X$ 改为 $x<-X$，便得 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 的定义.

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A$$

1.1.9 无穷大与无穷小

1. 无穷小的定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义（或 $|x|$ 大于某一正数时有定义）. 若任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$（或 $X>0$），当 $0<|x-x_0|<\delta$（或 $|x|>X$）时，$|f(x)|<\varepsilon$，那么称函数 $f(x)$ 为 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0 \quad 或 \quad \lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

2. 无穷大的定义

如果任给 $M>0$（M 无论多大），存在 $\delta>0$（或 $X>0$），当 $0<|x-x_0|<\delta$（或 $|x|>X$）时，$|f(x)|>M$，那么称函数 $f(x)$ 为 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty \quad 或 \quad \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

注 (1) 不要把无穷小与很小的数混为一谈. 无穷小是在自变量某一变化过程中以 0 为极限的量.

(2) 无穷小（或无穷大）是对自变量的某一变化过程而言的. 因此，说函数是无穷小（或无穷大）时一定要强调自变量的变化过程.

(3) 若函数 $f(x)$ 是无穷大，则 $f(x)$ 必无界；反之，不一定成立. 例如，函数 $f(x)=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界，但由于 $f(x)$ 的绝对值并不是无限增大的，故 $f(x)=x\cos x$ 当 $x\to\infty$ 时不是无穷大.

(4) 无穷大与无穷小的关系：在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

(5) 函数极限与无穷小的关系：

$$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$$

其中，$\alpha(x)$ 为无穷小.

1.1.10 无穷小的比较

1. 设 α 和 β 是同一极限过程中的两个无穷小，且 $\alpha\neq 0$

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$.

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小.

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$，则称 β 与 α 是同阶的无穷小，记作 $\beta = O(\alpha)$.

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，则称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha \sim \beta$.

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$，则称 β 是 α 的 k 阶无穷小.

2. 等价无穷小的一个重要性质

若 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$，且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

3. 常用的一些等价无穷小

当 $x \to 0$ 时，

$\sin x \sim x$，　$\tan x \sim x$，　$\arcsin x \sim x$，　$\arctan x \sim x$

$\ln(1+x) \sim x$，　$e^x - 1 \sim x$，　$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$，　$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \sim x$

$\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$，　$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$，　$a^x - 1 \sim x\ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$

1.1.11　极限的运算法则

(1) 有限个无穷小的和是无穷小.

(2) 有界函数与无穷小的积是无穷小.

(3) 有限个无穷小的积是无穷小.

(4) 若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$，则

1) $\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$;

2) $\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = AB$;

3) $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$.

注　ⅰ) 四则运算法则对数列同样成立.

ⅱ) 法则(4) 中的 1), 2) 可推广到有限个函数的情形.

ⅲ) 由法则(4) 中的 2) 可推知：

$$\lim cf(x) = c\lim f(x), \quad c \text{ 为常数}$$
$$\lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n, \quad n \text{ 为正整数}$$

(5) 几个常用的公式.

1) $$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & n = m \\ 0, & n > m \\ \infty, & n < m \end{cases};$$

2) 当 $a > 0$ 时，$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$;　　3) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(6) 复合函数的极限运算法则. 设 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a$，且在 x_0 某去心邻域内 $\varphi(x) \neq a$，又 $\lim\limits_{u \to a} f(u) = A$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f[\varphi(x)]$ 存在，且

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \to a} f(u) = A$$

注　把上述法则中 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a$ 换成 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = \infty$，而把 $\lim\limits_{u \to a} f(u) = A$ 换成 $\lim\limits_{u \to \infty} f(u) = A$，类似有

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \to \infty} f(u) = A \quad \text{或} \quad \lim_{x \to \infty} f[\varphi(x)] = \lim_{u \to \infty} f(u) = A$$

1.1.12　极限存在准则

(1) 单调有界原理：单调有界数列必有极限.

(2) 夹逼准则：若 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$，则 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$.

特别地，若 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$，则 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$

1.1.13 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$；　　(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$（或 $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$）.

1.1.14 极限的性质

(1) 极限的唯一性：若数列或函数的极限存在，则极限值一定唯一.

(2) 收敛数列的有界性：若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则数列 $\{x_n\}$ 一定有界. 反之，结论不真.

(3) 函数极限的局部保号性：如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，且 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在点 x_0 某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，当 $x \in \mathring{U}(x_0)$ 时，有

$$f(x) > 0 \text{（或 } f(x) < 0\text{）}$$

特别地，当 $A \neq 0$ 时，则存在点 x_0 某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，当 $x \in \mathring{U}(x_0)$ 时，有 $|f(x)| > \dfrac{|A|}{2}$.

(4) 保不等式性：如果在点 x_0 的某一去心邻域内，$f(x) \geqslant 0$（或 $f(x) \leqslant 0$），且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，那么

$$A \geqslant 0 \quad \text{或} \quad A \leqslant 0$$

1.2 重点知识结构图

- 函数与极限
  - 函数
    - 定义
    - 特性（单调性、奇偶性、有界性和周期性）
    - 复合函数（复合函数的分解）
    - 反函数
    - 初等函数
    - 分段函数
  - 极限
    - 定义
      - 数列极限
        - $\varepsilon - N$ 定义
        - 收敛数列的性质
      - 函数极限
        - $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ 的 $\varepsilon - X$ 定义
        - $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的 $\varepsilon - \delta$ 定义
      - 运算法则
    - 存在准则
      - 单调有界数列必有极限
      - 夹逼准则
    - 两个重要极限
      - $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
      - $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$，$\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$
    - 无穷大与无穷小
      - 定义
      - 阶的比较
        - 高阶
        - 低阶
        - 同阶
        - 等价
      - 性质

1.3 释疑解惑

问题 1.1 函数 $y=\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)$ 与 $y=2\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ 是相同的函数吗?

解答 不同;$y=\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)$ 的定义域为 $D_1=\{x\mid x\neq 0,x\in\mathbf{R}\}$.

$y=2\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ 的定义域为 $D_2=\{x\mid x>0,x\in\mathbf{R}\}$.

判断两个函数是否相同的原则,应考虑是否存在相同的定义域以及对应法则,这是函数定义的两要素.这两个函数的定义域不同,因此它们是不同的函数.

如果应用下面方法判断则是错误的.

由初等数学的运算性质知:$\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)=\ln\left(\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)^2}{x^2}\right)=2\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$,因此这两个函数是相同的函数.

错误的关键是初等数学中关于对数运算法则:$\ln(u^2)=2\ln u$ 是在 $u>0$ 条件下才成立,而在考虑函数 $\ln(u^2)$ 的定义域时却并不受 $u>0$ 的限制.因此上述两个函数是否相同的关键是其定义域是否相同.

问题 1.2 $y=2\ln x$ 及 $x=2\ln y$ 是相同的函数吗?

解答 相同;因为这两个函数的定义域及对应法则都相同.

问题 1.3 给定函数 $f(n)=\frac{1+2n}{1+n^2}(n=1,2,3,\cdots)$ 及任意正数 ε,试确定一个正整数 N,使得当 $n>N$ 后不等式 $\frac{1+2n}{1+n^2}<\varepsilon$ 成立.

解答 注意到本题要求是确定 N,并不是要找最小的 N,我们不必解不等式 $f(n)<\varepsilon$,而可将 $f(n)$ 先适当放大,估计出 $f(n)<g(n)$,再来解放大后的新不等式 $g(n)<\varepsilon$.特别要注意将 $f(n)$ 放大一定要适当,其次由 $g(n)<\varepsilon$ 求解 n 要较容易.

将函数 $f(n)$ 先放大:$\frac{1+2n}{1+n^2}<\frac{1+2n}{n^2}\leqslant\frac{3n}{n^2}=\frac{3}{n}$,解不等式 $\frac{3}{n}<\varepsilon$ 得 $n>\frac{3}{\varepsilon}$.由于当 $n>\frac{3}{\varepsilon}$ 时,$\frac{3}{n}<\varepsilon$ 从而有 $\frac{1+2n}{1+n^2}<\varepsilon$,取 $N=\left[\frac{3}{\varepsilon}\right]$,$N$ 即为所求.

若本题应用下面方法解是错误的.

为求 N,解不等式 $\frac{1+2n}{1+n^2}<\varepsilon$,该式等价于不等式 $\varepsilon n^2-2n+(\varepsilon-1)>0$,解得 $n>\frac{1+\sqrt{1+\varepsilon-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$ 或 $n<\frac{1-\sqrt{1+\varepsilon-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$,由于 $\frac{1-\sqrt{1+\varepsilon-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$ 不合要求,应舍去.取 $N=\left[\frac{1+\sqrt{1+\varepsilon-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right]$,$N$ 即为所求之正整数.

错误原因是:本题所给的条件中 $\varepsilon>0$ 是任意的正数,若取 $\varepsilon=2$ 代入上面所求得的 N,$N=\left[\frac{1+\sqrt{-1}}{2}\right]$,但此时 $\frac{1+\sqrt{-1}}{2}$ 非实数,可见上面所求得的 N 的表达式不适合于任意 $\varepsilon>0$.

问题 1.4 给定函数 $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ 及任意正数 $\varepsilon>0$,试确定 $x=1$ 的一个小邻域,使在其内成立不等式 $\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$.

解答 (1) 首先应理解题目的意思.当 x 充分趋近于 1 时函数 $y=\frac{x}{\sqrt{x^3+3}}$ 的值才趋近于 $\frac{1}{2}$,因此对于

任意的正数 $\varepsilon>0$，只可能在 $x=1$ 的一个小邻域内成立 $\left|\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$，在 $x=0$ 或其他点的小邻域内，上述不等式不可能成立.

(2) 当直接解不等式 $\left|\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$ 较困难时，可以先放大不等式的左端，但放大有两个原则，一是使表达式简化，二是必须保留因子 $|x-1|$.

先放大不等式左端

$$\left|\frac{x}{\sqrt{x^3+3}}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2x-\sqrt{x^2+3}}{2\sqrt{x^2+3}}\right|=\left|\frac{3(x-1)(x+1)}{2\sqrt{x^2+3}\,(2x+\sqrt{x^2+3})}\right|\leqslant$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{x+1}{2x+\sqrt{x^2+3}}\right||x-1|$$

限制 $|x-1|<1$，即 $0<x<2$，则有 $\left|\dfrac{x+1}{2x+\sqrt{x^2+3}}\right|<\dfrac{3}{\sqrt{3}}$. 故 $\left|\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}-\dfrac{1}{2}\right|\leqslant\dfrac{3}{2}|x-1|$.

解新的不等式 $\dfrac{3}{2}|x-1|<\varepsilon$，得 $|x-1|<\dfrac{2}{3}\varepsilon$. 取 $\delta=\min\{1,\dfrac{2}{3}\varepsilon\}$，当 $|x-1|<\delta$ 时，不等式 $\left|\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$ 必成立.

如果应用下面解答则是错误的.

为确定 δ，应解函数不等式 $\left|\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$. 由于直接解不等式较困难，且由上题的分析，可以先放大不等式的左端. $\left|\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}-\dfrac{1}{2}\right|\leqslant\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+3}}+\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{|x|}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2}$， 解新的不等式 $\dfrac{|x|}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2}<\varepsilon$，得 $|x|<\sqrt{3}(\varepsilon-\dfrac{1}{2})$，从而有 $|x-1|<|x|+1<\sqrt{3}\varepsilon+1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 取 $\delta=\sqrt{3}\varepsilon+1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，当 $|x-1|<\delta$ 时不等式 $\left|\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$ 必成立.

错误原因是：解题过程中的放大是不适当的. 所谓适当放大，是指放大后的式子在自变量的同一变化过程中仍以零为极限.

问题 1.5 函数极限与数列极限有什么联系？

解答 如果对于任何以 x_0 为极限的数列 $x_n(x_n\neq x_0)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 反之，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么对任何以 x_0 为极限的数列 $x_n(x_n\neq x_0)$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

由此命题可知，如果数列 x_n 与 x'_n 都以 x_0 为极限，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(x'_n)$，则当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限一定不存在.

例如，$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，$x'_n=\dfrac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}}$，$(n=1,2,\cdots)$，数列 x_n 与 x'_n 都以 0 为极限，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x'_n)=-1$.

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(x'_n)$. 因此 当 $x\to0$ 时，函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 的极限一定不存在.

问题 1.6 指出下列各题解法中的错误，并写出正确解法。

(1) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to3}x}{\lim\limits_{x\to3}(x-3)}=\infty$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)=\lim\limits_{x\to\infty}2x^3-\lim\limits_{x\to\infty}x+1=\infty-\infty+1$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2}{n^3}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^3}=0+0+\cdots+0=0$；