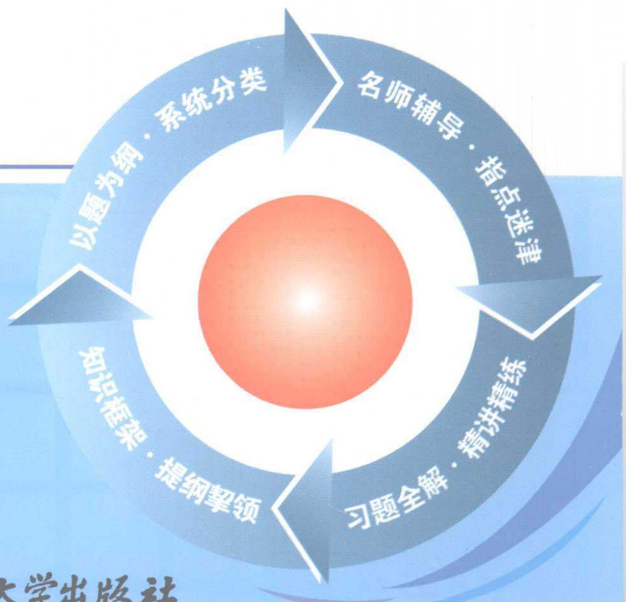
全国高校数学教材同步辅导及考研复习用书

概率论与数理统计 [浙大·四版]

习题全解与考研指导

主编◎张宇　张新



北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

概率论与数理统计 [浙大·四版]

习题全解与考研指导

主编◎张宇　张新

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计(浙大四版)习题全解与考研指导/ 张宇，张新主编. —北京：北京理工大学出版社，2012.9

ISBN 978-7-5640-6787-8

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①张… ②张… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 218362 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市文阁印刷厂
开　　本 / 787 毫米×960 毫米　1/16
印　　张 / 18.5
字　　数 / 330 千字
版　　次 / 2012 年 9 月第 1 版　2012 年 9 月第 1 次印刷
定　　价 / 29.80 元

责任编辑/钟　博
责任校对/周瑞红
责任印制/边心超

前　言

夯实基础、培养素质

一、本书的初衷

每每谈到考研数学中概率论与数理统计的复习时，大多数同学都会紧皱眉头，脱口而出"难"，这不禁让我开始思考，如何从根本上解除复习中的这个"误会"，提高同学们的复习效率，这将是首要解决的问题.在我看来，考研数学的三门课程中，概率论与数理统计这门课程是最容易拿"高分"的，所以同学们在复习时要夯实基础、培养素质.

本书的初衷是为广大考研学子提供概率论与数理统计课程的复习材料.我在写这本书时，其中的习题解析强调基础性方法，注重规律性解题.

二、本书的特色

这本书是针对浙江大学盛骤等编写的《概率论与数理统计(第四版)》所做的习题全解，适合大学生学习和考研复习之用.

本书的特色如下：

第一，每一章首先列出知识结构图，这个结构图涵盖了本章的知识点，精要地介绍重要概念和主要内容.

第二，每一章的习题做出详尽的习题全解，很多题目给出了不同的解题思路并给出了多种解法.

第三，每一章都总结了本章的考研考点并介绍了部分历年真题，让同学们一方面掌握本章考研考点和基本方法，另一方面通过练习考研真题实现对本章考研试题方向和特点的把握.

三、祝福与感谢

本书作为考研数学系列丛书，凝结了众多老师的辛勤汗水，是集体智慧的结晶.希望读了该书的同学能够提高数学解题能力，为考研奠定坚实的基础，顺祝同学们考研顺利.如果本书中有不足甚至纰漏之处，希望大家批评指正.

本书在编写过程中，参考了由盛骤等编写，高等教育出版社出版的《概率论与数理统计(第四版)》，感谢诸多相关作者的辛勤工作，感谢各位编辑老师，感谢北京理工大学出版社.

编　者

2012年8月

目 录

第一章　概率论的基本概念

知识结构图

- 基本概念
  - 随机试验 E：重复性、所有结果已知和不确定性
  - 样本空间 S：所有可能结果组成的集合
  - 随机事件 A：样本空间的子集
    - 关系：包含、互斥、对立、独立
    - 表示：和事件、积事件、差事件、逆事件
    - 运算：交换律、结合律、分配律、德摩根律
- 概率概念
  - 统计概念：频率
  - 公理化概念：非负性、规范性和可列可加性
  - 古典概念与几何概念：等可能概型
  - 计算公式
    - 加法公式
      - $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
      - $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$（若事件 A 与 B 互斥）
    - 减法公式
      - $P(A-B)=P(A)-P(AB)$
      - $P(A-B)=P(A)-P(B)$（若事件 $A\supseteq B$）
    - 求逆公式：$P(\bar{A})=1-P(A)$
- 条件概率概念
  - 定义：当 $P(A)>0$ 时，$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，且满足公理化的三个性质（非负性、规范性和可列可加性）
  - 计算公式：与概率的计算公式类似，有加法、减法和求逆公式
  - 条件概率的应用
    - 乘法公式：当 $P(A)>0$ 时，$P(AB)=P(A)P(B|A)$
    - 全概率公式：$P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)$
    - 贝叶斯公式：$P(B_i\mid A)=\dfrac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j)}$

      （其中 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是样本空间的一个划分，$P(B_i)>0$）
- 独立性
  - 定义
    - 两个事件：$P(AB)=P(A)P(B)$
    - 多个事件：积事件的概率等于事件概率的乘积，推广多个事件的独立性
  - 性质
    - 相互独立的事件中部分事件间相互独立
    - 相互独立的事件中部分事件的逆事件与其余事件仍相互独立
  - 重要应用
    - 将多个事件的和事件概率转化为逆事件概率乘积
    - 伯努利试验

习题全解

1. 写出下列随机试验的样本空间 S:

(1)记录一个班一次数学考试的平均分数(设以百分制记分).

(2)生产产品直到有 10 件正品为止,记录生产产品的总件数.

(3)对某工厂出厂的产品进行检查,合格的记上“正品”,不合格的记上“次品”,连续查出了 2 件次品就停止检查,或检查了 4 件产品就停止检查,记录检查的结果.

(4)在单位圆内任意取一点,记录它的坐标.

解 (1)记 n 为此班学生的人数,一次数学考试的平均分数为

$$S_1=\left\{\frac{k}{n}\,\middle|\,\text{其中}\ k\ \text{为此班的一次数学考试的成绩总和}\right\}.$$

(2)生产产品直到有 10 件正品为止,生产的总件数为

$$S_2=\{10,11,\cdots\}.$$

(3)记 0 为出厂的产品是“次品”,记 1 为出厂的产品为“正品”,检查了 4 件产品就停止检查,其结果为

{0000,0001,0010,0100,1000,0011,0101,1001,0110,1010,1100,1110,1101,1011,0111,1111}.

连续查出两件次品就停止检查,则上述结果中去除样本点{0000,0001,0010,1000,0011,1001},即样本空间为

$$S_3=\{00,0100,100,0101,0110,1010,1100,1110,1101,1011,0111,1111\}.$$

(4)单位圆内任意取一点,它的坐标集合为

$$S_4=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}.$$

2. 设 A,B,C 为三个事件,用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件:

(1)A 发生,B 与 C 不发生. (2)A 与 B 都发生,而 C 不发生.

(3)A,B,C 中至少有一个发生. (4)A,B,C 都发生.

(5)A,B,C 都不发生. (6)A,B,C 中不多于一个发生.

(7)A,B,C 中不多于两个发生. (8)A,B,C 中至少有两个发生.

解 (1)$A\overline{B}\overline{C}$. (2)$AB\overline{C}$. (3)$A\cup B\cup C$.

(4) ABC. (5)$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$. (6)$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\cup A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$.

(7)$\Omega-ABC$ 或 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\cup A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup AB\overline{C}$.

(8)$AB\cup AC\cup BC$

3. (1)设 A,B,C 是三个事件,且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=P(BC)=0$,$P(AC)=\frac{1}{8}$,求 A,B,C 至少有一个发生的概率.

(2)已知 $P(A)=\frac{1}{2}$,$P(B)=\frac{1}{3}$,$P(C)=\frac{1}{5}$,$P(AB)=\frac{1}{10}$,$P(AC)=\frac{1}{15}$,$P(BC)=\frac{1}{20}$,$P(ABC)=\frac{1}{30}$,求 $A\cup B$,$\overline{A}\overline{B}$,$A\cup B\cup C$,$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$,$\overline{A}\overline{B}C$,$\overline{A}\overline{B}\cup C$ 的概率.

(3)已知 $P(A)=\frac{1}{2}$,(i)若 A,B 互不相容,求 $P(A\overline{B})$;(ii)若 $P(AB)=\frac{1}{8}$,求 $P(A\overline{B})$.

解　(1)因为 $ABC\subseteq AB$,所以 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$,即 $P(ABC)=0$,于是

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}.$$

(2)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}=\frac{11}{15}$,

$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=\frac{4}{15}$,

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{15}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{51}{60}=\frac{17}{20},$$

$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)=\frac{3}{20}$,

$$P(\overline{A}\overline{B}C)=P(C\overline{A\cup B})=P(C)-P[(A\cup B)C]$$
$$=P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$
$$=\frac{1}{5}-\frac{1}{15}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{7}{60},$$

$P(\overline{A}\overline{B}\cup C)=P(\overline{A}\overline{B})+P(C)-P(\overline{A}\overline{B}C)=\frac{4}{15}+\frac{1}{5}-\frac{7}{60}=\frac{7}{20}$.

(3)若 A,B 互不相容,$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A)=\frac{1}{2}$.

若 $P(AB)=\frac{1}{8}$,则

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}.$$

【注】　掌握概率的加法公式、减法公式.

加法公式:$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,当 A,B 互不相容时,$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

减法公式:$P(A-B)=P(A)-P(AB)$,当 A,B 互不相容时,$P(A-B)=P(A)$,当 $A\supseteq B$时,$P(A-B)=P(A)-P(B)$.

4. 设 A,B 是两个事件.

(1)已知 $A\overline{B}=\overline{A}B$,验证 $A=B$.

(2)验证事件 A 和事件 B 恰有一个发生的概率为 $P(A)+P(B)-2P(AB)$.

解　(1)因为 $A\overline{B}=\overline{A}B$,于是 $A\overline{B}\cup AB=\overline{A}B\cup AB$,等式左边 $A\overline{B}\cup AB=A$,等式右边 $\overline{A}B\cup AB=B$,即 $A=B$.

(2)事件 A 和事件 B 恰有一个发生的事件表示为 $A\overline{B}\cup\overline{A}B$,$A\overline{B}$ 与 $\overline{A}B$ 互不相容,于是,

$$P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)$$
$$=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)$$

$$=P(A)+P(B)-2P(AB).$$

5. 10 片药片中有 5 片是安慰剂.

(1)从中任意抽取 5 片,求其中至少有 2 片是安慰剂的概率.

(2)从中每次取一片,作不放回抽样,求前 3 次都取到安慰剂的概率.

解 (1)10 片药片任取 5 片的基本事件数为 C_{10}^5,事件 5 片中至少有 2 片是安眠药的基本事件数为 $C_5^2C_5^3+C_5^3C_5^2+C_5^4C_5^1+C_5^5$ 或 $C_{10}^5-C_5^0C_5^5-C_5^1C_5^4$,即任取 5 片药片其中至少有 2 片安眠药的概率为

$$\frac{C_5^2C_5^3+C_5^3C_5^2+C_5^4C_5^1+C_5^5}{C_{10}^5}=\frac{113}{126}.$$

(2)依次不放回抽取 3 次药片的基本事件数为 A_{10}^3,前 3 次取得安眠药的基本事件数为 A_5^3,于是前 3 次取到安眠药的概率为

$$\frac{A_5^3}{A_{10}^3}=\frac{1}{12}.$$

6. 在房间里有 10 个人,分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章,任选 3 人记录其纪念章的号码.

(1)求最小号码为 5 的概率.

(2)求最大号码为 5 的概率.

解 (1)任选 3 人佩戴纪念章的基本事件数为 $C_{10}^3=120$,事件最小号码为 5 等价于其中有个人佩戴 5 号纪念章,其余 2 人佩戴纪念章号均大于 5,即事件最小号码为 5 的基本事件数为 $C_5^2=10$,于是最小号码为 5 的概率为

$$\frac{C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}.$$

(2)事件最大号码为 5 等价于有个人佩戴 5 号纪念章,其余 2 人佩戴纪念章的号码小于 5,所含基本事件数为 $C_4^2=6$,于是最大号码为 5 的概率为

$$\frac{C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{20}.$$

7. 某油漆公司发出 17 桶油漆,其中白漆 10 桶、黑漆 4 桶、红漆 3 桶,在搬运中所有标签脱落,交货人随意将这些油漆发给顾客. 问一个订货为 4 桶白漆、3 桶黑漆和 2 桶红漆的顾客,能按所订颜色如数得到订货的概率为多少?

解 17 桶油漆任取 9 桶的基本事件数为 C_{17}^9,其中 9 桶含有 4 桶白漆、3 桶黑漆和 2 桶红漆的基本事件数为 $C_{10}^4C_4^3C_3^2$,于是,商家如数得到订货的概率为

$$\frac{C_{10}^4C_4^3C_3^2}{C_{17}^9}=\frac{252}{2\,431}.$$

8. 在 1 500 件产品中有 400 件次品、1 100 件正品. 任取 200 件.

(1)求恰有 90 件次品的概率.

(2)求至少有 2 件次品的概率.

解 (1)$\dfrac{C_{400}^{90}C_{1\,100}^{110}}{C_{1\,500}^{200}}$.

(2)事件至少有 2 件次品的对立事件为 200 件产品中全部为正品或恰有一件次品,于是

至少有 2 件次品的概率为

$$1-\frac{C_{1\,100}^{200}+C_{1\,100}^{199}C_{400}^{1}}{C_{1\,500}^{200}}.$$

9. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，问这 4 只鞋子中至少有两只配成一双的概率是多少？

解　事件 A 为至少有两只能配成一双，从 5 双不同的鞋中任取 4 只种数为 $n=C_{10}^{4}=210$，4 只鞋中至少有两只能配成一双，可以理解为 4 只鞋恰能配成 1 双鞋（记为事件 B），4 只鞋恰能配成 2 双鞋（记为事件 C），则有 $A=B\cup C$，事实上

$$n_B=C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1=120,n_C=C_5^2=10,$$

于是

$$n_A=n_B+n_C=130,$$

所以

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{130}{210}=\frac{13}{21}.$$

另外一种解法，考虑事件 A 的逆事件 $\overline{A}$，即事件 $\overline{A}$ 为 4 只鞋中没有成对的鞋，此时 $n_A=C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1=80$，于是 $n_A=n-n_A=130$，即得相同的答案.

10. 在 11 张卡片上分别写上 probability 这 11 个字母，从中任意连抽 7 张，求其排列结果为 ability 的概率.

解　设事件 A 为抽取字母排列为 ability，11 个字母中任意连抽 7 张含有基本事件数为 $S(\Omega)=A_{11}^{7}$，在字母中共有两个 b，两个 i，则 $S(A)=4$，所以

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}=\frac{4}{A_{11}^{7}}=2.4\times10^{-6}.$$

11. 将 3 只球随机地放入 4 个杯子中去，求杯子中球的最大个数分别为 1,2,3 的概率.

解　3 只球随机放入 4 个杯中的基本事件数为 $4^3=64$.

事件 A_1：杯中球的最大数为 1，等价于 4 个杯中其中有 3 个杯中各有一个球，事件 A_1 含有基本事件数为 $A_4^3=24$，于是

$$P(A_1)=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}.$$

事件 A_2：杯中球的最大数为 2，等价于 4 个杯中其中有 2 个杯中各有 1,2 个球，事件 A_2 含有基本事件数为 $C_4^2A_3^2=36$，即

$$P(A_2)=\frac{36}{64}=\frac{9}{16}.$$

事件 A_3：杯中球的最大数为 3，等价于 4 个杯中仅有一个杯中含有 3 个球，即 A_3 的基本事件数为 C_4^1，于是

$$P(A_3)=\frac{4}{64}=\frac{1}{16}.$$

12. 50 只铆钉随机地取来用在 10 个部件上，其中有 3 只铆钉强度太弱. 每个部件用 3 只铆钉. 若将 3 只强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件强度就太弱. 问发生一个部件强度太弱的概率是多少？

解　记事件 $A_i(i=1,2,\cdots,10)$ 为第 i 个部件强度太弱，由题意可知 $P(A_i)=\frac{1}{C_{50}^{3}}$，且这里满足 $A_1,A_2,\cdots,A_{10}$ 互不相容，所以发生一个部件强度太弱的概率为

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10}) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_{10}) = \frac{10}{C_{50}^3} = \frac{1}{1\ 960}.$$

13. 一俱乐部有 5 名一年级学生，2 名二年级学生，3 名三年级学生，2 名四年级学生.

(1)在其中任选 4 名学生，求一、二、三、四年级的学生各一名的概率.

(2)在其中任选 5 名学生，求一、二、三、四年级的学生均包含在内的概率.

解 (1)任选 4 名学生共有 $C_{12}^4=495$ 种选法，其中一、二、三、四年级的学生各一名共有 $C_5^1C_2^1C_3^1C_2^1=60$ 种选法，因此所求的概率为

$$\frac{C_5^1C_2^1C_3^1C_2^1}{C_{12}^4} = \frac{4}{33}.$$

(2)任选 5 名学生共有 $C_{12}^5=792$ 种选法，其中一、二、三、四年级的学生均包含在内，则该事件等价于选自某一年级学生 2 人、其余年级学生各 1 人，所以共有

$$C_5^2C_2^1C_3^1C_2^1 + C_5^1C_2^2C_3^1C_2^1 + C_5^1C_2^1C_3^2C_2^1 + C_5^1C_2^1C_3^1C_2^2 = 240$$

种选法，因此所求的概率为$\frac{10}{33}$.

14. (1)已知 $P(\overline{A})=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(A\overline{B})=0.5$，求条件概率 $P(B|A\cup\overline{B})$.

(2)已知 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，求 $P(A\cup B)$.

解 (1)$P(\overline{A})=0.3$，则 $P(A)=1-P(\overline{A})=0.7$，又 $P(B)=0.4$，$P(\overline{B})=1-P(B)=0.6$，由减法公式可得 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.5$，即 $P(AB)=0.2$，所以

$$P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A\overline{B}) = 0.8,$$

$$P(B|A \cup \overline{B}) = \frac{P(B(A \cup \overline{B}))}{P(A \cup \overline{B})} = \frac{P(AB)}{P(A \cup \overline{B})} = \frac{1}{4}.$$

(2)由乘法公式得 $P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{12}$，再由公式得 $P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{6}$，所以

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{3}.$$

15. 掷两颗骰子，已知两颗骰子点数之和为 7，求其中有一颗为 1 点的概率(用两种方法).

解 **法一** 记事件 A 为两颗骰子点数之和为 7，事件 B 为其中有一颗为 1 点，$A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$，$P(A)=\frac{1}{6}$，$AB=\{(1,6),(6,1)\}$，$P(AB)=\frac{1}{18}$，则

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{3}.$$

法二 采用缩小样本空间法，事件 $A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$，事件 A 中有一颗为 1 点的事件$\{(1,6),(6,1)\}$，于是已知两颗骰子点数之和为 7，其中有一颗为 1 点的概率为$\frac{1}{3}$.

16. 据以往资料表明，某一 3 口之家，患某种传染病的概率有以下规律：

$P\{$孩子得病$\}=0.6$，$P\{$母亲得病$|$孩子得病$\}=0.5$，

$$P\{父亲得病|母亲及孩子得病\}=0.4,$$

求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率.

解 记 A 为孩子得病,B 为母亲得病,C 为父亲得病,由条件可知

$$P(A)=0.6, P(B|A)=0.5, P(C|AB)=0.4.$$

母亲及孩子得病但父亲未得病的事件为 $AB\overline{C}$,则 $P(AB\overline{C})=P(AB)-P(ABC)$,由乘法公式可得

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=0.3,$$

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)=0.12,$$

于是

$$P(AB\overline{C})=P(AB)-P(ABC)=0.18.$$

17. 已知在 10 件产品中有 2 件次品,从其中取两次,每次任取一件,作不放回抽样,求下列事件的概率:

(1)两件都是正品.

(2)两件都是次品.

(3)一件是正品,一件是次品.

(4)第二件取出的是次品.

解 记 A_i 为第 i 次取出次品($i=1,2$).

(1)两件正品的事件为 $\overline{A}_1\overline{A}_2$,于是 $P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{28}{45}$.

(2)两件次品的事件为 A_1A_2,于是 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{45}$.

(3)一件是正品和一件是次品的事件为 $\overline{A}_1A_2\cup A_1\overline{A}_2$,则

$$P(\overline{A}_1A_2\cup A_1\overline{A}_2)=\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{8}{9}=\frac{16}{45}.$$

(4)第二件取出的是次品的事件为 A_2,则由抽签原理可得

$$\begin{aligned}P(A_2)&=P(A_1A_2)+P(\overline{A}_1A_2)\\&=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)\\&=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}\\&=\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

18. 某人忘记了电话号码的最后一个数字,因而他随意地拨号.求他拨号不超过三次而接通所需号码的概率.若已知最后一个数字是奇数,那么此概率是多少?

解 记 A_i 为第 i 次接通所需要的号码($i=1,2,3$),拨号不超过三次而接通的事件表示为 $A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$,则

$$\begin{aligned}&P(A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\\&=P(A_1)+P(\overline{A}_1A_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3).\ (A_1,\overline{A}_1A_2,\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\ 两两互不相容)\end{aligned}$$

由题意可知

$$P(A_1)=\frac{1}{10},P(\overline{A}_1A_2)=\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10},P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{10},$$

则拨号不超过三次而接通的概率为

$$P(A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=\frac{3}{10}.$$

若最后一个数字是奇数,则

$$P(A_1)=\frac{1}{5},P(\overline{A}_1A_2)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5},P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5},$$

则拨号不超过三次而接通的概率为

$$P(A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=\frac{3}{5}.$$

19.(1)设甲袋中装有 n 只白球、m 只红球;乙袋中装有 N 只白球、M 只红球.今从甲袋中任意取一只球放入乙袋中,再从乙袋中任意取一只球.问取到白球的概率是多少?

(2)第一只盒子装有 5 只红球,4 只白球;第二只盒子装有 4 只红球,5 只白球.先从第一盒中任取 2 只球放入第二盒中去,然后从第二盒中任取一只球.求取到白球的概率.

解 (1)记事件 A 为从乙袋中任意取白球,事件 B 为从甲袋中任意取白球,则

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})\\&=\frac{n}{m+n}\times\frac{N+1}{N+M+1}+\frac{m}{m+n}\times\frac{N}{N+M+1}=\frac{nN+n+mN}{(m+n)(N+M+1)}.\end{aligned}$$

(2)记事件 A 为从第二盒中任意取一只白球,事件 B_1 为从第一盒中取出两个白球,事件 B_2 为从第一盒中取出一个白球和一个黑球,事件 B_3 为从第一盒中取出两个黑球,由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)+P(B_3)P(A\mid B_3)\\&=\frac{C_4^2}{C_9^2}\times\frac{C_7^1}{C_{11}^1}+\frac{C_4^1C_5^1}{C_9^2}\times\frac{C_6^1}{C_{11}^1}+\frac{C_5^2}{C_9^2}\times\frac{C_5^1}{C_{11}^1}=\frac{53}{99}.\end{aligned}$$

20. 某种产品的商标为"MAXAM",其中有两个字母脱落,有人捡起随意放回,求放回后仍为"MAXAM"的概率.

解 记事件 B_1 表示脱落的字母为"AA",事件 B_2 表示脱落的字母为"MM",事件 B_3 表示脱落的字母为"AM",事件 B_4 表示脱落的字母为"AX",事件 B_5 表示脱落的字母为"MX",事件 A 为放回后仍为"MAXAM",即

$$P(B_1)=P(B_2)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10},P(B_3)=\frac{C_2^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{4}{10},P(B_4)=P(B_5)=\frac{C_2^1C_1^1}{C_5^2}=\frac{2}{10},$$

$$P(A|B_1)=P(A|B_2)=1,P(A|B_3)=P(A|B_4)=P(A|B_5)=\frac{1}{2},$$

由全概率公式可得

$$P(A)=\sum_{i=1}^{5}P(B_i)P(A|B_i)=\frac{3}{5}=0.6.$$

21. 已知男子有 5%是色盲患者,女子有 0.25%是色盲患者.今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人,恰好是色盲患者,问此人是男性的概率是多少?

解　记事件 A 为此人是色盲患者，事件 B 为此人是男性，由条件可知

$$P(B)=P(\bar{B})=\frac{1}{2},P(A|B)=0.05,P(A|\bar{B})=0.0025.$$

利用贝叶斯公式可得

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}=\frac{\frac{1}{2}\times 0.05}{\frac{1}{2}\times 0.05+\frac{1}{2}\times 0.0025}=\frac{20}{21}.$$

22. 一学生接连参加同一课程的两次考试. 第一次及格的概率为 p，若第一次及格则第二次及格的概率也为 p；若第一次不及格则第二次及格的概率为 $\frac{p}{2}$.

(1)若至少有一次及格则他能取得某种资格，求他取得该资格的概率.

(2)若已知他第二次已经及格，求他第一次及格的概率.

解　记事件 $A_i(i=1,2)$ 为学生参加第 i 次考试及格，A 为取得某种资格.

(1)至少有一次及格的事件表示为 $A=A_1\cup\bar{A}_1A_2$，此时 $A_1,\bar{A}_1A_2$ 互不相容，于是

$$P(A)=P(A_1\cup\bar{A}_1A_2)=P(A_1)+P(\bar{A}_1A_2)$$
$$=p+\frac{p}{2}(1-p)=\frac{3}{2}p-\frac{1}{2}p^2.$$

(2)已知他第二次已经及格，则第一次及格的概率为

$$P(A_1|A_2)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}=\frac{P(A_1)P(A_2|A_1)}{P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)}$$
$$=\frac{p^2}{p^2+\frac{p}{2}(1-p)}=\frac{2p}{p+1}.$$

23. 将两信息分别编码为 A 和 B 传送出去，接收站收到时，A 被误收作 B 的概率为 0.02，而 B 被误收作 A 的概率为 0.01. 信息 A 与信息 B 传送的频繁程度为 2∶1. 若接收站收到的信息是 A，问原发信息是 A 的概率是多少？

解　记事件 H 为将传送信息 A，事件 $\bar{H}$ 为将传送信息 B，事件 I 为接收信息 A，事件 $\bar{I}$ 为接收信息 B，由题意可知

$$P(H)=\frac{2}{3},P(\bar{H})=\frac{1}{3},P(\bar{I}|H)=0.02,P(I|\bar{H})=0.01,$$

于是
$$P(H|I)=\frac{P(HI)}{P(I)}=\frac{P(H)P(I|H)}{P(H)P(I|H)+P(\bar{H})P(I|\bar{H})}$$
$$=\frac{\frac{2}{3}\times 0.98}{\frac{2}{3}\times 0.98+\frac{1}{3}\times 0.01}=\frac{196}{197}.$$

24. 有两箱同种类的零件，第一箱装 50 只，其中 10 只一等品；第二箱装 30 只，其中 18 只一等品. 今从两箱中任挑出一箱，然后从该箱中取零件两次，每次任取一只，作不放回抽样. 求：

(1)第一次取到的零件是一等品的概率.

(2)在第一次取到的零件是一等品的条件下,第二次取到的也是一等品的概率.

解 设事件 $H_i(i=1,2)$ 为零件取自第 i 箱,$A_i(i=1,2)$ 为第 i 次取出一等品,其中 $P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2}$.

(1)$P(A_1)=P(H_1)P(A_1|H_1)+P(H_2)P(A_1|H_2)=\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}=\frac{2}{5}$.

(2)$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}$,

其中 $P(A_1A_2)=P(H_1)P(A_1A_2|H_1)+P(H_2)P(A_1A_2|H_2)$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}\times\frac{9}{49}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}\times\frac{17}{29}.$$

于是 $P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=0.486$.

25. 某人下午 5:00 下班,他所积累的资料表明:

到家时间	5:35～5:39	5:40～5:44	5:45～5:49	5:50～5:54	迟于 5:54
乘地铁的概率	0.10	0.25	0.45	0.15	0.05
乘汽车的概率	0.30	0.35	0.20	0.10	0.05

某日他抛一枚硬币决定乘地铁还是乘汽车,结果他是 5:47 到家的. 试求他是乘地铁回家的概率.

解 记事件 B 为乘地铁回家,事件 $\bar{B}$ 为乘汽车回家,事件 A 为到家时间在 5:45～5:49 之间,由题意可知 $P(B)=P(\bar{B})=\frac{1}{2}$,$P(A|B)=0.45$,$P(A|\bar{B})=0.20$,所以

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}=\frac{9}{13}.$$

26. 病树的主人外出,委托邻居浇水,设已知如果不浇水,树死去的概率为 0.8. 若浇水,则树死去的概率为 0.15. 有 0.9 的把握确定邻居记得浇水.

(1)求主人回来树还活着的概率.

(2)若主人回来树已死去,求邻居忘记浇水的概率.

解 记事件 B 为邻居记得浇水,事件 A 为树还活着,由题意可知

$$P(B)=0.9,P(\bar{B})=0.1,P(A|B)=0.85,P(A|\bar{B})=0.20.$$

(1)$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})=0.85\times0.9+0.20\times0.1=0.785$.

(2)$P(\bar{B}|\bar{A})=\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})}=\frac{P(\bar{B})P(\bar{A}|\bar{B})}{1-P(A)}=\frac{0.1\times0.8}{1-0.785}=0.372$.

27. 设本题涉及的事件均有意义,设 A,B 都是事件.

(1)已知 $P(A)>0$,证明 $P(AB|A)\geqslant P(AB|A\cup B)$.

(2)若 $P(A|B)=1$,证明 $P(\bar{B}|\bar{A})=1$.

(3)若设 C 也是事件,且有 $P(A|C)\geqslant P(B|C)$,$P(A|\bar{C})\geqslant P(B|\bar{C})$,证明 $P(A)\geqslant$

$P(B)$.

证　(1)因为 $P(AB|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，$P(AB|A\cup B)=\dfrac{P(AB)}{P(A\cup B)}$，事实上，$P(A\cup B)\geqslant P(A)$，于是即得证 $P(AB|A)\geqslant P(AB|A\cup B)$.

(2)由 $P(A|B)=1$，可得 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=1$，即 $P(AB)=P(B)$，则

$$P(\overline{B}|\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{A})}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(A)}=\frac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(A)}$$
$$=\frac{1-P(A)}{1-P(A)}=1.$$

(3)由 $P(A|C)\geqslant P(B|C)$，可得 $P(AC)\geqslant P(BC)$，
同理由 $P(A|\overline{C})\geqslant P(B|\overline{C})$，可得

$$P(A\overline{C})\geqslant P(B\overline{C}),$$

化简可得　　$P(A\overline{C})=P(A)-P(AC)\geqslant P(B\overline{C})=P(B)-P(BC)$.
于是　　$P(A)-P(B)\geqslant P(AC)-P(BC)\geqslant 0$.

28. 有两种花籽，发芽率分别为 0.8 和 0.9，从中各取一颗，设各花籽是否发芽为独立事件. 求

(1)这两颗花籽都能发芽的概率.

(2)至少有一颗能发芽的概率.

(3)恰有一颗发芽的概率.

解　记事件 A,B 为两种花籽发芽，$P(A)=0.9$，$P(B)=0.8$.

(1)两颗花籽都能发芽的概率为

$$P(AB)=P(A)P(B)=0.72.$$

(2)至少有一颗能发芽的概率为

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.98.$$

(3)有一颗发芽的概率为

$$P(\overline{A}B\cup A\overline{B})=P(A)+P(B)-2P(AB)=0.26.$$

29. 根据报道美国人血型的分布近似地为：A 型为 37%，O 型为 44%，B 型为 13%，AB 型为 6%. 夫妻拥有的血型是相互独立的.

(1)B 型的人只有输入 B、O 两种血型才安全. 若妻为 B 型，夫为何种血型未知，求夫是妻的安全输血者的概率.

(2)随机地取一对夫妇，求妻为 B 型夫为 A 型的概率.

(3)随机地取一对夫妇，求其中一人为 A 型，另一人为 B 型的概率.

(4)随机地取一对夫妇，求其中至少有一人是 O 型的概率.

解　记事件 A 为某人血型为 A 型，事件 O 为某人血型为 O 型，事件 B 为某人血型为 B 型，事件 C 为某人血型为 AB 型，且 $P(A)=0.37$，$P(B)=0.44$，$P(O)=0.13$，$P(C)=0.06$.

(1)夫是妻的安全输血者的概率为

$$P(B)+P(O)=0.57.$$