國民高等學校適用

因式分解法

(附問題解答)

Won

新京書店發行

國民高等學校適用

因式分解法

附問題解答

新京書店發行

康德八年六月一日印刷
康德八年六月三十日發行

因式分解法
▲定價壹圓五角▼

編輯人　于化坤　新京市東長春大街一一二ノ三二番
發行人　顏心栽　新京市西長春大街八ノ一番
印刷人　房日新　新京市東長春大街一一四ノ一番
印刷所　東亞印書局　新京市東長春大街一一四ノ一番
發行所　圖書出版　新京書店出版部　新京市西長春大街八ノ一番
振替新京三八三二番

△各埠各大書店均有代售▽

因 式 分 解 法

目　　次

緒　　言

因式分解法　第一種

利用乘法結果之因式分解法

因式分解法　第二種

利用剩餘定理之因式分解法

因式分解法　第三種

緒　言

學代數認爲最困難部分者，厥爲因式分解，因其分解之法，原無一定方式，因題制宜臨式應變，不若他種方法，之易於有遵循也。然于茫茫途中，亦不無同法之可歸納者，茲就平日教學之所得，與參考其他因式分解專書，略分下列各種方法，每種各舉例題解式，及練習題與解法之暗示，對于每種方法之理論探討，量中學生程度之能理解者，盡量採納之，想對于攻斯學者，尙能有補于萬一也。

編者識於新京

因式分解法第一種

利用乘法結果之因式分解法

定義　化一整式爲多整式之積者，名曰因式分解。

注　意

因式分解原爲乘法之逆，故可利用乘法之一切結果，而探求分解之法，茲分下列六項而研究之。

1. 提公因式法　（利用分配定律）

$Lx+Mx+Nx=(L+M+N)x$

各項有相同因式，即提出括弧之外，括弧內整理之，惟須注意符號之變化，有時括弧內再以以上方法分解之者。

例 1. $ax+bx-x=x(a+b-1)$.

注意. 此結果勿誤作 $x(a+b)$.

例 2. $2a^3b^2x+2a^2b^3y-6a^2b^2cz=2a^2b^2(ax+2by-3cz)$.

〔問1〕 下列諸式。試分解其因式:

（一）$7a^6-21a^4$. （二）$-x^3y-2x^2y^2$,

（三）$27x^3y^5+54x^5y^3-81x^2y^6$.

例 3. $3a(x+y)-4b(x+y)(x-y)+c(x+y)^2$.

$=(x+y)\{3a-4b(x-y)+c(x+y)\}$

$=(x+y)\{3a-(4b-c)x+(4b+c)y\}$.

（整理上大括弧）

例 4. $a(x-y)+b(y-x)=a(x-y)-b(x-y)$

$=(x-y)(a-b)$

注意 $y-x=-(x-y)$, 故第二因式爲$(a-b)$, 勿誤作 $(a+b)$

〔問2〕 下列諸式, 試分解其因數:

（一）$a(x-y)+bc(x-y)$.

（二）$(a+b)(x+y)^2-(a+b)^2(x+y)$.

（三）$x(x-y)-y(y-x)$.

（四）$ax^2(b-c)-bx(c-b)$.

（五）$(x+y)(a+b-c)-(x-y)(-a-b+c)$.

三,四,五三題須注意符號變化,

2. 二項式之平方

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(1)改b爲$-b$,可得(2),故(2)與(1)之道理相同,不必另記

二項式之平方,等於各項之平方與其積二倍之和。

公式練習運算

〔問3〕 求下列諸式之平方:

$$2x+5,\quad 3x-2y,\quad -ax+by,\ \frac{x}{2}-\frac{y}{3},\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}.$$

〔問4〕 若$x=b+c,\quad y=c+a,\quad z=a+b,$

則 $$x^2+y^2+z^2=2(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)$$

試證明之。

〔問5〕 試取$a+b$或$a-b$等爲一項;依上公式,

求 $a+b+c,\quad a-b+c,\quad a+b-c,\quad -a+b+c$及

$a-b-c$之平方,

〔問6〕 依前題方法,作$a+b+c+d$之平方,且推及凡多

項式之平方.考究其作法。　　此題注意結果

又其逆爲 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

利用以上二式以分解因式,

例 1. $4a^6+12a^3b^2+9b^4$

$$=(2a^3)^2+2(2a^3)(3b^2)+(3b^2)^2=(2a^3+3b^2)^2.$$

〔問7〕 下列諸式，爲若何之平方？

(一) $a^2+10ab+25b^2$ (二) $4a^2-12ab+9b^2$.

(三) $1-8x+16x^2$. (四) $16a^4x^4+8a^2x^3+x^2$.

(五) $\dfrac{a^2}{9}-\dfrac{ab}{2}+\dfrac{9b^2}{16}$. (六) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{a^2}{x^2}-2$.

(七) $2xy-x^2-y^2$ (八) $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{b^2}{4a^2}$.

例 2. $2a^3b^2+4a^2b^3+2ab^4$分解其因式。

解 各項中$2ab^2$爲公共之因式。

$$2a^3b^2+4a^2b^3+2ab^4=2ab^2(a^2+2ab+b^2)=2ab^2(a+b)^2$$

〔問8〕 試就下列諸式，分解其因式：

(一) $3a^3b^3-6a^2b^4+3ab^5$.

(二) $20a^5b^2-60a^4b^3+45a^3b^4$.

〔問9〕 下列二式，爲若何之平方。

(一) $9x^4+25(y+z)^2-30(y+z)x^2$.

(二) $(x-y)^2-6(x-y)(y-z)+9(y-z)^2$.

例 3. $a^2+4b^2+9c^2-12bc+6ca-4ab$爲若何之平方？

解 所設之式，依a整頓之，

$$a^2-2a(2b-3c)+(4b^2-12bc+9c^2)$$

$$=a^2-2a(2b-3c)+(2b-3c)^2$$

$$=\{a-(2b-3c)\}^2=(a-2b+3c)^2.$$

注意$3c$變號

〔問10〕 下列各式,爲若何之平方?

(一) $a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab$〔參照問5〕。

(二) $a^2+4b^2+9c^2-12bc-6ca+4ab$.

(三) $4x^2+9y^2+z^2-12xy+4xz-6yz$.

例 4. $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$爲若何之平方?

解 以$3x^2$爲$2x^2+x^2$將所設之式變之如次:

$$x^4+2x^3+2x^2+x^2+2x+1$$

$$=x^4+2x^2(x+1)+(x+1)^2=(x^2+x+1)^2$$

〔問11〕 下列三式。爲若何之平方?

(一) $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$.

(二) $x^4+2x^3-x^2-2x+1$.

(三) $x^4+4x^3+10x^2+12x+9$.

〔問12〕 試求下列三式之平方根:

(一) $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$〔參照問5〕。

(二) $4x^2+9y^2+16z^2+12xy-16xz-24yz$.

(三) $x^4-2x^3-x^2+2x+1$.

前法之推究.須利用以下之配成平方.

定義. 等於某有理式之平方者，其式稱之爲完全平方式，或簡稱之爲完全平方.

某式補以適當之項，俾成爲完全平方者，特稱之爲配成方平.

例如x^2+8x以4^2即16加之，

則爲x^2+8x+4^2即配成$(x+4)^2$平方

又 x^2-7x以$\left(\frac{7}{2}\right)^2$，即$\frac{49}{4}$加之，

則爲$x^2-7x+\left(\frac{7}{2}\right)^2$，即配成$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2$平方

推之 x^2+px以$\left(\frac{p}{2}\right)^2$加之

則爲 $x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2$，即配成$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$平方

是欲使 x^2+px之式成爲完全平方者，以 x 之係數折半自乘以加之可也.

〔問13〕 試就下列諸式，配成平方：

$$x^2-6x,\quad x^2+7x,\quad x^2+\frac{b}{a}x,\quad x^2-2(a-b)x.$$

又例 x^2+y^2 以 $2xy$ 加減，即配成平方。又 $16x^2+25y^2$ 以

$2\sqrt{16x^2}\sqrt{25y^2}$ 即 $2\times4x\times5y$ 即 $40xy$ 加減，即配成

$(4x+5y)^2$ 或 $(4x-5y)^2$ 之平方.

推之A^2+B^2以$2AB$加減，即配成$(A+B)^2$或$(A-B)^2$之平方.

〔問14〕 下列諸式，配成平方。

$$4a^2-9b^2,\quad x^4+y^4,\quad x^8+y^8,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{x^2}.$$

注意. 由上法所得之完全平方式其與所設之原式不相等可知。

前法之推究②

二次三項式爲完全平方之條件.

二次三項式x^2+px+q若爲完全平方，則依第 2 節公式(1)必爲$px=2x\sqrt{q}$.

兩邊以x除之，且各自乘，

$$p^2=4q \quad \therefore\ q=\frac{p^2}{4}=\left(\frac{p}{2}\right)^2$$

此條件備，則此三項式之爲完全平方明矣。

故二次三項式x^2+px+q若爲完全平方，其必備之條件爲

$$p^2=4q。$$

又三項式 ax^2+bx+c，此條件由 $bx=2\sqrt{a}x\sqrt{c}$ 知必爲

$$b^2=4ac。$$

注意. 依上條件。

$$x^2+px+q=0 \quad 及 \quad ax^2+bx+c=0$$

兩二次方程式之根，係與等根之條件相同。

例 $x^2+mx+121$若爲完全平方，其m之值若何。

解 因$m^2=4\times121$故$m=\pm22$

讀者試自驗之。

〔問15〕 下列諸式若爲完全平方，其p之值若何？

$x^2-px+64,\quad x^2-12x+p,\quad 4x^4+px^2y+9y^2.$

〔問16〕 $(x+a)(x+2b)+(x+2a)(x+b)$若爲完全平方，

則$9a^2+14ab+9b^2=0$，試證之。

〔問17〕 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\left(\dfrac{lx+my}{n}\right)^2$若爲完全平方，則得式如次，試證明之。

$$a^2l^2+b^2m^2=n^2$$

3. 二數和與差之積.

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

二數和與差之積。等於二數平方之差。

例 1. $(2a+b^2)(2a-b^2)=4a^2-b^4.$

〔問18〕 下列諸式，試求其積：

$(2x+3y)(2x-3y),(-x-y)(x-y),\left(\dfrac{2}{3}a+\dfrac{3}{5}b\right)\left(\dfrac{2}{3}a-\dfrac{3}{5}b\right)$

例 2. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=\{(a^2+b^2)+ab\}\{(a^2+b^2)-ab\}=(a^2+b^2)^2-a^2b^2=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b$

$=a^4+a^2b^2+b^4.$

〔問19〕 $a^2+ab-2b^2$以$a^2-ab+2b^2$乘之。

〔問20〕 $(8x^3+8x^2+4x+1)(8x^3-8x^2+4x-1)$求積。

〔問21〕 $\left(\dfrac{1}{9}x^2+\dfrac{1}{6}xy+\dfrac{1}{4}y^2\right)\left(\dfrac{1}{9}x^2-\dfrac{1}{6}xy+\dfrac{1}{4}y^2\right)$求積。

〔問22〕 下列各式，試求其積：

（一） $(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)$.

（二） $(x^4+1)(x^2+1)(x^2-1)$.

*（三） $\left(x^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)\left(x^{\frac{1}{4}}+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\right)\left(x^{\frac{1}{8}}+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{8}}}\right)\left(x^{\frac{1}{8}}-\dfrac{1}{x^{\frac{1}{8}}}\right)$.

*（四） $(e^{-x}+e^x)(e^{-x}-e^x)+(e^x+e^{-x})^2$

例 3. $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$

$$=\{(b+c)+a\}\{(b+c)-a\}\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}$$

$$=\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$$

$$=\{b^2+2bc+c^2-a^2\}\{a^2-b^2+2bc-c^2\}$$

$$=\{2bc+(b^2+c^2-a^2)\}\{2bc-(b^2+c^2-a^2)\}$$

$$=4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$$

$$=4b^2c^2-b^4-c^4-a^4-2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2$$

$$=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4,$$

〔問23〕 下列各式，試求其積：

（一） $(ax+by+cz)(ax-by+cz)(ax+by-cz)(-ax+by+cz)$.

（二） $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)(a-b+c-d)$.

利用上式以分解因式.

即利用前節之逆。二數平方之差，等於二數和與差之積也。

如　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

解 1.　$81a^8-16b^4=(9a^4)^2-(4b^2)^2$

$=(9a^4+4b^2)(9a^4-4b^2)=(9a^4+4b^2)\{(3a^2)^2-(2b)^2\}$

$=(9a^4+4b^2)(3a^2+2b)(3a^2-2b).$

依上公式，凡如 $a^{2m}-b^{2n}$ 之式，皆得利用之，以分解其因式。

◎　初學者可略之，如三四兩題。

〔問24〕　下列諸式，試分解其因數：

（一）$9x^2-25y^4$.　（二）a^8-b^8.　（三）$625x^4-256y^4$.

（四）$\frac{a^4}{81}-\frac{b^4}{16}$.　（五）$x^5-x$　（六）$a^2-b^2-(a^2-b^2)^2$.

〔問25〕　$x^4-\frac{1}{x^4}$以$x+\frac{1}{x}$除之。

注意.　依本章開始所述。整式之因式分解，其各因式以在於整式之範圍內爲限。

例如 $a-b$ 雖可化爲$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$，然此二式非有理式。故$a-b$不能分解其因式。

又如 $a^2-3b^2=(a+\sqrt{3}b)(a-\sqrt{3}b)$，其右邊之式含無理式，故$a^2-3b^2$亦不能分解其因式。

然若某式須化爲二以上之式（含無理數與否不論）之積，此或屬於除法之事，與上所言爲另一問題。