

算學彙編

代 數 學 演 習 指 導

薛 德 炯 編 譯

上 海 新 亞 書 店 印 行

○————○
版權所有
不准翻印
○————○

代 數 學 演 習 指 導

實價國幣

(外埠酌加寄費)

編 譯 者 薛 德 炯

發 行 者 陳 邦 楨

印 刷 者 新 亞 書 店

發 行 所 新 亞 書 店

上海河南中路一五九號

中 華 民 國 三 十 七 年 九 月 三 版

前 言

~~我們不幸生於出版界貧乏的中國，到了中學時代~~
正喜讀書的時候，關於算學等科，除了幾本教科書而
外，竟找不到幾本相當的參考書籍；有的學校并且徑
採歐美教本，讀者終日期期艾艾，翻查字典，因為受了
文字的障礙，學不出頭腦，便多渾渾噩噩，混過了幾年。
每遇考試的時候，常想找一兩種抱佛腳的書籍，東尋
西覓，仍等於零；結果祇好罵上一句：“怎麼偌大的中
國，竟沒有一本書可以救我的急，真是氣數！”這種苦
況，讀者恐怕都嘗過的吧！

好了！近年來出版界漸有希望了。全國出版事業中
心的上海，已添了不少的專門書店——兒童書局，中學
生書局等——，我們但願他們都能名稱其實，使得中學
以下的讀書朋友都有好書可讀。

講到抱佛腳的書籍，單就算學一科而論，就我所知
道的，已有「……要覽」，「……解法指導」，「……難問詳解」；
此外還有包羅萬象的「各科問答」，「投考指南」等等，在
讀者是饑不擇食，不問內容如何，祇知儘量購買，末了

仍舊不能充饑，大慈大悲的我佛如來，他竟不肯救苦救難，芸芸衆生倒做了個冤大頭，出了不少的冤錢，我真要爲讀者叫屈！

去年偶與沈君義舫，童君侶青談到這個問題，他們以爲我拋棄了教書生涯，廁身在出版界，都勸我不妨趁此機會，爲中學生設想，多寫一兩種救荒的書籍，因而觸起了我刊行本書的動機，現在居然能與讀者相見，我要感謝沈，童二君督促我的好意。

本書爲日人藤森良藏氏所著，原書重版已數百次，某年童君自東京歸國，我適在某中學教書，承他的情，送給我做參考，恰巧那年高中三年級的學生因爲準備升學，要求我教「補習算學」，我就利用此書，摘要編成講義，當時用謄寫版，隨寫隨印，積稿近寸。我記得多餘的印刷品，曾被沒有選修「補習算學」的學生需索一空。至今回想，這是鬧荒時應有的現象，與我所編的講義內容好歹無關，去年十月我着手整理舊稿，覺得當時以爲太詳，現在似乎太略，因取新版原書，抽編輯餘閑譯補，隨補隨排，閱時四月，乃告成書。書成之日，有兩重感想，梗我心胸，借此一吐，以舒予懷。

一、是署名問題 人們都好虛榮，我國人似乎尤甚，

一般著作家動筆就想成名著，掛鍍金招牌的——出洋留學過的——並且多主張祇有外國書好，又流利，又清楚，好像中國雖有文字，根本不配用來寫科學書籍似的，影響所及，養成了現在徑用歐美教本的風尚，長此不變，所造就的都是外國國民（吳在淵先生語），……因此，別國出版界儘管有好書，儘管有中學生很好的讀物，都不屑翻譯介紹，為大家開闢讀書的園地，甚至以為譯書是小販生涯，尤其是中學以下的粗淺讀物，根本用不着我來幹，免得污累了我的大名，縱使要我翻譯，祇好署上一個別號，免得受人家奚落，枉為我是一個學者！這都是虛榮害人，其實祇要值得翻譯的書，我們就應該負責介紹，用不到隱姓埋名，因為並不見得就因此貶去了我的身價。

一、是印刷問題 刊印書籍，不是一件十分難事，刊印合式的書籍，尤其是算學書，倒成了現在中國印刷界困難的問題。——因為排版難，成本貴，——試看坊間的刊物，能有幾部合式的算學書？教科書印得一榻糊塗的也有，還能談得到參考書麼？本書承新亞書店經理陳君邦楨不惜重資，許我對於排印上自由支配，沈君士秋，張君慧雄，助我繪畫附圖，周君少山復為我悉心

製版,兒子鴻達復爲我校算一過,結果雖不能盡善盡美,總算解決了刊印算學書的一切問題,因爲面目可憎的算學書,開卷就討着人厭,對於初學算學的人好比當頭一棒,從此昏頭倒腦,永遠難望清醒,所以我認爲印刷不良的算學書,實在是摧殘青年的利器,現在我身當其境,所以盡力消弭,祇爲關係複雜,尙多力與願違的地方,一切補苴罅漏,惟有期諸來日!

薛 德 炯

31, 1, 23.

目 次

導 言	...	[1-6]
代數學的學習法	...	1
計算上的注意	...	3
答案寫法的練習	...	4
等式的種類	...	5
第一編 式的變形	...	[7-188]
第一章 整式的變形	...	[7-82]
因數分解	...	8
二次式與二次方程式的關係	...	31
二次式之普遍分解法及二次方程式之普遍解法	...	32
整理成二次式以分解因數法	...	37
複二次式與複二次方程式	...	43
剩餘定理	...	45
高次式的因數分解與高次方程式	...	46
未定係數法	...	55
論式的整理	...	66
對稱式及交代式	...	68
第二章 分數式的變形	...	[83-117]
分數式的加減法	...	84
含乘除的問題	...	104
繁分數式	...	106
計值問題	...	112

第三章 無理式的變形	[118-145]
指數定義的擴張	118
不盡根數的處理法	125
無理式 $a \pm \sqrt{b}$ 的平方根	132
計值問題	140
第四章 證明問題	[146-162]
第五章 比及比例式的變形	[163-188]
證明問題	172
第二編 方程式	[189-355]
第一章 一元整方程式	[189-195]
高次方程式	189
第二章 一元分數方程式	[196-223]
特別的解法(簡便法)	204
第三章 一元無理方程式	[224-249]
A. 有一種根式的	224
B. 有二種根式的	230
C. 有三種根式的	236
D. 有四種根式的	241
E. 簡便法	244
第四章 聯立方程式	[250-334]
二元二次方程式	250
三元二次方程式	301
第五章 方程式的異例	[336-355]
消去法	347
結論	351

自修應考準備讀物

代 數 學

演 習 指 導

導 言

代數學的學習法 算學是現代科學的基礎科學,現代的學生終日孜孜地埋頭探討,仍舊不見有多大的成績,這是甚麼緣故呢?推究起來,固然有種種原因,可是學習的時候,沒有得法,要算是一個主因,這是無可諱言的.頭腦明晰的,智能遠駕儕輩的,有時的成績,反不如凡庸的同輩;腦力平常的,有時也能和一般高材生並駕齊驅,不見得有甚麼高低.他的主因就在學習之是否得法;學算學是如此,學其他科學也是如此.

代數學的學習法,可以分做兩類:

A. 系統的學習法 把代數學上緊要的事項歸類,加以理解,記憶;選擇可以做解法模範的問題,加以研究;務期融會貫通,想出解決類似問題或新問題的方案來,這是系統的學習法

B. 雜糅的學習法 把形形色色的問題,分別試解,以求貫通代數學的全部,用這樣的方法來涵養解題的能力者,叫做雜糅的學習法.

以上兩種方法,都是各有利弊.用系統的學習法,時間勞力,所費較少,容易得到代數學的要領,可是遇到雜糅的問題,便不能不把那問題加以考量,斷定他歸入那一類,倘使缺了這種判斷練習,往往所費的時間勞力,有超出豫想以外的.

用了雜糅的學習法,理解個別的問題來貫通代數學的全部,不單是要費許多的時間和勞力,解題的時候往往因學力不足,不得不經過強記解式的功夫.記憶力旺盛的青年,每多相信這種強記主義,以為是費力少而成效多,其實是不對的,並且可以說是完全相反的.

本書是主張採用系統的學習法的.諸君可從本書先將代數學作系統的研究,每一段落,或終篇以後,再自行試解幾許雜題,這是最好的方法.雜題的來源,最好搜集歷年各校的入學試驗題,否則其他的問題集以及各教科書所載的雜題,也可用,祇要勤加練習,自能豁然貫通,打破著名的算學難關,得到無上的快樂.

本書可作教科書的良伴。讀者鑽研代數學的時候，應該隨時同所用的教科書聯絡對照，自然相得益彰。若是以為有了本書，便把所讀的教科書擱置一旁，這是有損失的。現代的青年，每逢應考的時候，祇揀應考準備的書籍作臨時抱佛腳的預備，以為可以徵俸成功，這是完全不對的。須知實力的養成，全在平時，否則三年五載在校讀書的歲月，豈不是白白地費掉了麼？天下那有此理！

計算上的注意 以上所講，和「幾何學演習指導」的導言所述，是同一旨趣的；但在代數學上，還有要特別注意的地方，就是計算的正確和迅速。

原來代數學的問題，有兩種意義，一是藉以養成推理力，一是藉以增進計算力。對於一個問題，要如何推想，如何解決，可以靠人家的幫助，要如何熟練，那就非靠自己練習不可。許多學生以為推想是有適當的方法，順序，那是有趣的，計算則一味繁瑣，毫無趣味可言，所以大家都怕計算，這也不無理由，可是懂了計算的順序，方法，對於一切的計算問題，能夠正確迅速地求出答數來，也是很愉快的，譬諸善射者，達到了百發百中的境地，不是一種最愉快的事嗎！

所以計算上應注意下列事項：

計算要正確而迅速，不是迅速而正確。

不論怎樣迅速，譬如要做一點鐘的問題，十分鐘便完結了，倘使計算得不正確，怎麼樣？不論怎樣正確，倘

使幾分鐘可以做成功的問題，倒費了幾點鐘，又怎麼樣？細講起來，固然是兩種都不好，可是前者是欠正確，後者不過是不迅速，兩者之中，擇取其一，寧取後者，因為開首要費一點鐘的，祇要能勤加練習，自然便會逐漸變成五十分鐘，四十，三十分鐘……甚至幾分鐘就可算出正確的結果來了。

所以練習的時候，要由正確而再達迅速的境地，那末到了應用的時候，自能發揮平素的實力，可以沒有什麼遺憾。否則不求正確，但求快完，結果便遇事輕率，難望成功。

應試時臨場失敗的原因，歸納起來，約有兩種：

- (1) 因為不細細推想，所以得不到解法。
- (2) 平時缺乏計算練習，因而計算錯誤。

臨場不犯第(1)種毛病，而因計算錯誤以致失敗，則其咎在輕率，不是沒有實力，那是很可惜的！

答案寫法的練習 還有一層，學者所應注意的，就是入學考試和在校時的平常考試是不同的，平常考試，因為評閱者對於作者的實力是知道的，入學考試卷的評閱者，他並不知道作者的生平，祇靠幾頁答案來判定作者實力，所以作者的運命全在這幾頁答案上。所以答案寫法不佳，實力無從顯出，往往要招失敗，遇

到這種情形，更比計算錯誤的失敗可惜！

所以答案的寫法，也要平日注意練習，其重要並不亞於推想和計算，吾國的算學家對於此點每不加意，因而出版物所列的算式等等，往往不堪寓目，諸君要留心屏斥印刷不良的算學書，不要受他的影響才好！

等式的種類 等式有兩種，一爲恆等式，一爲方程式。

A. 恆等式

例如 $m(a+b)=ma+mb,$

左邊施以乘法，去了括號，便得右邊的結果。

$$\begin{aligned} \text{又如 } 3a - \{a - (3 - a + 2)\} &= 3a - \{a - (3 - a + 2)\} \\ &= 3a - \{a - 3 + 1 - 2\} \\ &= 3a - a + 3 - a + 2 \\ &= a + 5 \end{aligned}$$

左邊去了內部的括線，順次再由內而外去其括號，把同類集合，便得右邊的結果。

再如 $(x-7)(x-2)=x^2-9x+14$

$x-7$ 乘 $x-2$ ，便得右邊的結果。

如是，等式的一邊或兩邊，施以加減乘除的算法，適當的把他變形，中間用着等號聯綴的叫做恆等式。恆等式中所含的文字，不論以何值代入，其左邊的數值恆等於右邊的數值。

B. 方程式

例如

$$x+3=6$$

中, 設

$$x=1, \text{ 則 左邊}=4;$$

$$x=2, \text{ 則 左邊}=5;$$

$$x=3, \text{ 則 左邊}=6;$$

$$x=4, \text{ 則 左邊}=7.$$

所以祇有 $x=3$ 時, 左邊方爲 6, 方能成立等式; 其他各值代入是不成立的.

如是, 等式中所含某文字, 須與以特殊的值方能成立者, 叫做 方程式.

學生在中學時代學習算學, 費了許多勞力和時間, 所學得的, 大致不外乎恆等式怎樣可以變形(單稱做式的變形), 方程式怎樣可以解答, 再應用了以解其他的問題. 要明瞭等式的處理法以及其意義, 最好須學習一些不等式的初步.

【注意】上述兩種等式, 非常重要, 學者應注意區別, 不可混淆!

第一編 式的變形

將式變形,是代數的基礎,祇要能把他熟練,則方程式便易得解,因而應用了他可以解種種問題,學者應從這一方面先行努力.將代數式變形的時候,先要從形式上分成整式,分數式,無理式,比例式四類,然後逐步演習.

第一章 整式的變形

整式以形分類,可得二種,即普徧形及特別形.

普徧形 普徧形的整式祇須藉加減乘除四則算法而變形;是代數計算的基本,學者可就教科書各自練習,以養成正確迅速的習慣.

特別形 特別形的整式藉公式乘法及因數分解而變形.現在先摘錄乘法的重要公式如次:

A. 基礎的公式(其一)

$$\text{I. } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{II. } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\text{III. } (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$\text{IV. } (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$\text{V. } (ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$$

$$\text{VII. } (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$\text{VIII. } (a-b)(a^3+ab^2+b^3)=a^3-b^3$$

以上各式左節施以乘法便得右節的結果，學者應行記憶，以備應用於類似之形，省却中途計算的勞苦。

B. 基礎的公式(其二)

$$\text{I. } (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

$$\text{II. } (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

$$\text{III. } (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

$$\text{IV. } (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4.$$

$$\begin{aligned} \text{V. } (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) \\ =a^3+b^3+c^3-3abc \end{aligned}$$

上列各式亦應記憶，與(其一)同。

因 數 分 解

要知道一整式是何種整式與何種整式相乘而得的，這是乘法的逆算，普通是一種難題。例如 $2x^3-7x^2+8x+1$ 乘以 x^3-x+1 得 $2x^6-9x^4+3x^3+7x^2-8x+1$ ，若隱去前述二因數而要知道 $2x^6-9x^4+3x^3+7x^2-8x+1$ ，是何種整式與何種整式相乘而得，很不容易解答。但藉公式法所得的結果，若能適用公式而分解因數，也就不能說是至難的問題。