完美幻方
基本理论与编制方法

WANMEI HUANFANG JIBEN LILUN YU BIANZHI FANGFA

- 胡泰培　编著 -

电子科技大学出版社

完美幻方
基本理论与编制方法

WANMEI HUANFANG JIBEN LILUN YU BIANZHI FANGFA

- 胡泰培　编著 -

电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

完美幻方基本理论与编制方法 / 胡泰培编著. 一成都：电子科技大学出版社，2012. 5

ISBN 978-7-5647-1132-0

Ⅰ. ①完… Ⅱ. ①胡… Ⅲ. ①组合数学一研究 Ⅳ. ① O157

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 066830 号

完美幻方基本理论与编制方法

胡泰培 编著

出　　版： 电子科技大学出版社（成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦　邮编：610051）
策划编辑： 徐守仁
责任编辑： 雷晓丽
主　　页： www.uestcp.com.cn
电子邮箱： uestcp@uestcp.com.cn
发　　行： 新华书店经销
印　　刷： 成都蜀通印务有限责任公司
成品尺寸： 210 mm×285 mm　　印张 24.75　　字数 666 千字
版　　次： 2012 年 5 月第一版
印　　次： 2012 年 5 月第一次印刷
书　　号： ISBN 978-7-5647-1132-0
定　　价： 58.00 元

前　言

本书是专门研究完美幻方的书，给出了编制完美幻方的基本理论和制作方法. 所谓 n 阶完美幻方，就是用 n^2 个不同数字组成的 n 阶数字方阵，其 n 个行，n 个列，n 条左斜对角线，n 条右斜对角线上的 n 个元素之和都等于 n 阶幻和 Σ_n. 有的书把这种数字方阵称为泛对角线幻方. 显然，这种完美幻方比通常的幻方所要求的条件要强得多. 通常的 n 阶幻方，除了对各行、各列外，只要求主对角线上的 n 个元素之和等于 n 阶幻和 Σ_n. 但是，正是条件的加强，令人意外地使完美幻方具有了更完整的规律性. 从而使完美幻方的理论体系和编制方法都能够准确地、完美地表述. 本书简洁明了地表述了这些主要成果. 用书中提供的编制方法可以成批成批地给出相应阶的完美幻方，并不是偶然地得到个别完美幻方而已.

本书的主要成果有：对作为 n 阶分段方的行、列序的 n 级排列（即有些文章所述的“密码”）进行了有意义的分类和研究；给出了完美幻方的同构概念及基本的完美幻方概念；最主要的成果是定义了 n 阶数字方阵的行或列的 Z 变换，并对它的基本理论进行了简洁而有效的研究；从而给出了 n^2 个不同数字的幻和分组，以及对它们进行幻和分组的简洁具体方法；在这种基本理论的指导下，我们对素数阶，3 因数奇阶，双 2 因数偶阶，单 2 因数偶阶完美幻方分别给出了有效的编制方法，并由此编制了许许多多的各阶完美幻方；我们还讨论了完美幻方的运算，特别是完美幻方的乘积理论，从而为编制更高阶的完美幻方提供了有效的方法；n 级排列与 n 阶数字方阵的对称性研究；对 n 阶完美幻方的特优性也作出了恰当的研究等. 作为本书的基本理论，我们在书中提出了 30 来个新颖而别致的定理，并且全都给出了严格的数学证明. 但是，阅读本书除了用到排列，组合和简单的同余、矩阵概念外，并不需要其他更高深的数学知识. 而且，本书所建议的编制方法在计算机上也很容易实现，而无需编程.

利用本书所介绍的方法编制完美幻方有如下特点：1. 按方法编制必定可得到所希望得到的完美幻方；2. 可以成批地得到相应阶的完美幻方；3. 编制操作可直接在计算机上进行，无需编程；4. 计算量极小，极易检查.

感谢关心和支持本书出版的友好人士，也感谢出版社工作人员的宝贵意见和辛劳工作.

作　者

2012 年 4 月

目 录

第1章 n级排列之同态性

一、n级排列的同态性

n个不同元素: 1, 2, 3,…,n 组成的任一排列, 称为一个n级排列. 其排列总数是$n!$. 例如, $n=4$时, 有$4!=24$个4级排列:

$$\begin{array}{llll}
(1,2,3,4), & (2,3,4,1), & (3,4,1,2), & (4,1,2,3),\\
(1,4,3,2), & (4,3,2,1), & (3,2,1,4), & (2,1,4,3),\\
(1,2,4,3), & (2,4,3,1), & (4,3,1,2), & (3,1,2,4),\\
(1,3,4,2), & (3,4,2,1), & (4,2,1,3), & (2,1,3,4),\\
(1,3,2,4), & (3,2,4,1), & (2,4,1,3), & (4,1,3,2),\\
(1,4,2,3), & (4,2,3,1), & (2,3,1,4), & (3,1,4,2).
\end{array} \tag{1}$$

对于给定的n级排列, 依次把排列之首元 (或尾元) 移做排列之尾元 (首元), 所得称为原排列之轮回排列. 上列各行之排列, 依次都是由第一个排列所得之轮回排列. 显然, 对每一个给定的n级排列, 通过元素的轮回, 可产生n个轮回排列.

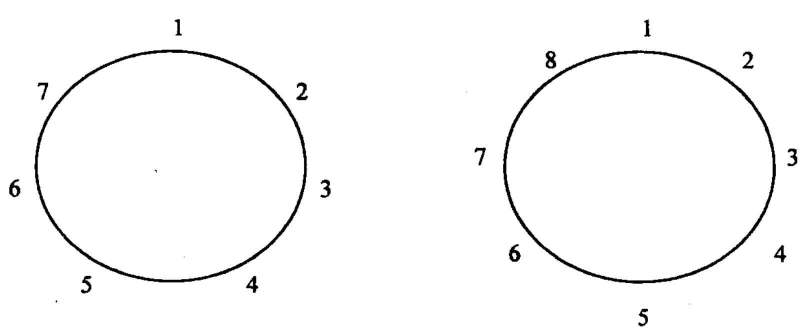
对于每一个n级排列

$$\pi=(i_1,\ i_2,\ i_3,\ \cdots,\ i_n) \qquad i_j\in\{1,2,3,\cdots,\ n\} \tag{2}$$

的足标, 即各元素在排列π中的位置标号, 都可以构作成一个n级自然排列$\lambda_1=(1,2,\ 3,\cdots,n)$, 称$\lambda_1$是排列$\pi$的足标排列. 由于各$i_j\in\{1,2,3,\cdots,n\}$, $j=1,2,\ 3,\cdots,\ n$. 从而n级排列π之各元与其足标排列λ_1各元之间可建立一一对应关系.

现在, 把足标排列$\lambda_1=(1,2,3,\ \cdots,\ n)$之各元依次等距离地安置在一个圆周上, 再从点1开始, 作等距离跳跃前行. 在前行中, 遍历排列λ_1之所有各元一次且仅一次, 所得排列称为足标排列的循环排列. 例如, $n=7$时, 有循环排列

$$\begin{array}{ll}
\lambda_1=(1,2,3,4,5,6,7), & \lambda_6=(1,7,6,5,4,3,2),\\
\lambda_2=(1,3,5,7,2,4,6), & \lambda_5=(1,6,4,2,7,5,3),\\
\lambda_4=(1,5,2,6,3,7,4), & \lambda_3=(1,4,7,3,6,2,5).
\end{array} \tag{3}$$



(图1)

当 $n=8$ 时，有循环排列

$$\lambda_1=(1,2,3,4,5,6,7,8),\ \lambda_7=(1,8,7,6,5,4,3,2),$$
$$\lambda_3=(1,4,7,2,5,8,3,6),\ \lambda_5=(1,6,3,8,5,2,7,4). \tag{4}$$

注意，$n=8$ 时，$(1,3,5,7,2,4,6,8)$ 不是 λ_1 的循环排列. 因为，由 7 至 2，由 8 至 1 的跳跃距离不等于由 1 至 3 的跳跃距离：$3-1=2$. λ_j 的足标 j 就是该循环排列中前两个相邻两数之跳跃距离. 在这些循环排列中，对每一个 λ_j，总有一个与之匹配的 λ_{n-j}. λ_j 与 λ_{n-j} 在圆形图(如图 1 所示)上是跳跃距离相等而行进方向相反的循环排列，因此称它们是互逆的. 显然，不计较轮回的排列就是所谓圆排列.

将 n 级足标排列 λ_1，分别作用于任意的 n 级排列 π，将得到由排列 π 产生的 n 级循环排列. 例如，当 $n=7$ 时，设

$$\pi_1=(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7)=(3,5,4,2,1,7,6);$$

则有 π_1 之循环排列

$$\pi_2=(i_1, i_3, i_5, i_7, i_2, i_4, i_6)=(3,4,1,6,5,2,7);$$
$$\pi_4=(i_1, i_5, i_2, i_6, i_3, i_7, i_4)=(3,1,5,7,4,6,2).$$

同理有 π_3, π_5, π_6. n 级排列 π 的循环排列也是成对互逆的.

由 n 级排列 π 与其足标排列 λ_1 的对应性，关于 n 级排列 π 的结论可通过对足标排列 λ_1 研究而导出.

引理 对给定的自然数 $n, k\ (0<k<n)$，当 n, k 互素，即 $\gcd(n,k)=1$ 时，有

$$0k,\ 1k,\ 2k,\ \cdots,\ (n-1)k \qquad (\mathrm{mod}\ n) \tag{5}$$

构成模 n 完全剩余系：$0,1,2,\cdots,n-1$. $\gcd(n, k)$ 表示 n, k 的最大公约数.

证明 只需证明上列 n 个数的模 n 之余互不相等即可. 设 $0<i<j<n$，有

$$ik\equiv jk \qquad (\mathrm{mod}\ n)$$

因 $\gcd(n, k)=1$，有 $i\equiv j(\mathrm{mod}\ n)$，与 $0<i<j<n$ 矛盾，故结论成立.

定理 1 对给定的自然数 $n(n\geqslant 4)$，若 $\gcd(n, k)=1, (0<k<n)$，则

$$\lambda_k=(1,k+1,2k+1,\cdots,(n-1)k+1) \quad (\mathrm{mod}\ n) \tag{6}$$

是足标排列 λ_1 的一个跳跃距离为 k 的 n 级循环排列. 其中 $jk+1(\mathrm{mod}\ n)\in\{2,3,\cdots,n\}$，$j=1,2,3,\cdots,(n-1)$.

证明 由引理知

$$1,\ 1k+1,\ 2k+1,\cdots,(n-1)k+1 \qquad (\mathrm{mod}\ n)$$

构成模 n 完全剩余系：$1,2,3,\cdots,n$. 因此，λ_k 遍历数集 $\{1,2,3,\cdots,n\}$. 同时，λ_k 中相邻二数之跳跃距离均为 k. 特别地，从排尾到排头的跳跃距离为

$$\begin{aligned}1-[(n-1)k+1]&=-(n-1)k\\ &\equiv k\ (\mathrm{mod}\ n).\end{aligned}$$

因此，λ_k 是由 λ_1 产生的跳跃距离为 k 的 n 级循环排列，故结论成立.

推论 对给定的自然数 $n(n\geqslant 4)$，由 n 级足标排列 λ_1 可产生 $\varphi(n)$ 个，或 $\varphi(n)/2$ 对互逆的 n 级循环排列. 其中 $\varphi(n)$ 是自然数 n 的欧拉函数，即 $1,2,3,\cdots,n-1$ 中与 n 互素的数之个数. 特别的，当 n 是奇素数时，$\varphi(n)=n-1$，此时有 $n-1$ 个 n 级循环排列：$\lambda_1, \lambda_2,\cdots,\lambda_{n-1}$.

足标排列 λ_j 作用于任一给定的 n 级排列 π，也将产生 $\varphi(n)$ 个 π 的循环排列. 这些循环排列分别经过元素的轮回，又将各自产生 n 个 n 级轮回排列. 因而，有 $n\varphi(n)$ 个 n 级排列与指定排列 π 一样，它们都是由数 $1,2,3,\cdots,n$ 在圆周上的同一个圆排列状态产生的. 故把所有这些排列称为 n 级排列的一个同态类，即它们都是与指定 n 级排列 π 同态的 n 级排列. 因此，所有的 $n!$ 个 n 级排列，按同

态分类，可分为

$$\lambda(n)=\frac{n!}{n\varphi(n)}=\frac{(n-1)!}{\varphi(n)} \tag{7}$$

个同态类. 特别地，当 n 是奇素数时，$\lambda(n)=(n-2)!$.

因$\varphi(4)=2$，故 4 级排列可分为 $\lambda(4)=\frac{3!}{2}=3$ 个同态类. (1)中每两行的 8 个 4 级排列分别构成一个同态类.

容易检验，对任意给定的 n 级排列π: 1. 当 n 是奇数时，反复应用二步跳π_2(或称间 1 跳); 2. 当 n 是偶数，且不含因数 3 时，反复应用三步跳π_3(或称间 2 跳); 3. 一般地，当 $\gcd(n, k)=1$ 时，反复应用 k 步跳π_k(或称间 k-1 跳). 再结合排列的逆序，就可以给出给定排列π的所有循环排列.

二、n 级排列的对称性

这里只对奇数 $n=2r+1(r=1,2,3,\cdots)$进行讨论. 若 n 级排列

$$\begin{gathered}\pi=(i_1, i_2,\cdots, i_{r-1}, i_r, i_{r+1}, \cdots, i_{n-1}, i_n)\\ i_j\in\{1,2,3,\cdots,n\};\ j=1,2,3,\cdots,n\end{gathered} \tag{8}$$

满足条件

$$\begin{aligned}i_1+i_n = i_2+i_{n-1} &=\cdots= i_{r-1}+i_{r+1}\\ &= i_r+i_{r+2} = n+1,\\ i_{r+1}&=\frac{n+1}{2}\end{aligned} \tag{9}$$

则称π是对称的 n 级排列. 条件(9)称为排列的对称性条件.

对称的 n 级排列，经过元素的轮回，所得排列仍看成是对称的. 虽然此时中间数 $r+1$ 不一定处在排列的中心位置.

定理 2 对于奇数 $n=2r+1(r=1,2,3,\cdots)$，若排列π是对称的 n 级排列，则由之产生的循环排列仍然是对称的.

证明 前已指出，对于奇数 n, n 级排列π的循环排列，总可以通过对给定排列π的间 1 跳或逆序产生. 例如，当 $r+1$ 是奇数时，由(7)作π的间 1 跳跃，有

$$\begin{gathered}(i_1, i_3,\cdots,i_{r-1}, i_{r+1}, i_{r+3},\cdots,i_{n-2}, i_n,\\ i_2, i_4,\cdots,i_r, i_{r+2},\cdots,i_{n-1});\end{gathered}$$

当 $r+1$ 是偶数时，有

$$\begin{gathered}(i_1, i_3,\cdots,i_r, i_{r+2},\cdots, i_{n-2}, i_n,\\ i_2, i_4,\cdots, i_{r-1}, i_{r+1},\cdots,i_{n-1}).\end{gathered}$$

经过适当的元素轮回，此两种排列可变为:

$$\begin{gathered}(i_{r+2},\cdots, i_{n-1}, i_1, i_3,\cdots,i_{r-1},\\ i_{r+1},\ i_{r+3},\cdots,i_{n-2},\ i_n,\ i_2,\ i_4,\cdots,i_r);\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}(i_{r+2},\cdots, i_{n-2}, i_n, i_2, i_4,\cdots,i_{r-1},\\ i_{r+1},\ i_{r+3},\cdots,i_{n-1},\ i_1,\ i_3,\cdots,i_r).\end{gathered} \tag{11}$$

若排列π 满足对称性条件(9)，这两个循环排列显然也满足对称性条件(9). 因而，对称排列经过循环，所得排列仍是对称的. 逆序显然不改变排列的对称性.

据此，对奇数 $n=2r+1(r=1,2,3,\cdots)$，可用下列程序构造所有的对称的 n 级排列:

1. 数 1 固定地置于排列之第一位，这排除了轮回对排列的影响. 当中间数 $r+1$ 的位置确定之后，数 n 的位置对称地确定;

2. $r-1$ 个数 $2,3,\cdots,r-1,r$ 有 $(r-1)!$ 个不同的排列;

3. 给定 $2,3,\cdots,r-1,r$ 的一个排列. 相应地，互补数: $n-1,n-2,\cdots,r+3,r+2$ 对称地组成排列; 而且，这两个排列中，互补的两数可以相互交换. 这里，k 的互补数是与 $k(k=2,3,\cdots,r)$ 之和恰为 $n+1$ 的数. 排列中互补数的可相互交换数为 2^{r-1};

4. 对 $2,3,\ldots,r-1,r$ 的任一排列，包括排头、排尾、各中间夹缝共有 r 个不同的位置安放中间数 $r+1$;

5. 由前 4 步给出一个对称排列后，中间数 $r+1$ 还有另外一种对偶的安置法. 如 $n=9$ 时

$$(1,2,3,4,5,6,7,8,9)\to(1,2,3,4,6,7,8,9,5)$$
$$(1,2,4,5,6,8,9;3,7)\to(1,2,4,6,8,9;3,5,7) \tag{12}$$

等. 由此，对奇数 $n=2r+1(r=1,2,3,\cdots)$，对称的 n 级排列的同态类数为

$$\mu_1(n)=\frac{(r-1)!2^{r-1}r^2}{\varphi(n)}=\frac{r!2^r}{\varphi(n)} \tag{13}$$

例如，$n=7$ 时，$\mu_1(7)=8$，故 7 级排列有下列 8 个对称的同态类:

$$\begin{gathered}(1,2,3,4,5,6,7),\quad (1,2,6,7;3,4,5),\\ (1,2,5,4,3,6,7),\quad (1,2,6,7;5,4,3),\\ (1,2,4,6,7;3,5),\quad (1,2,5,3,6,7,4),\\ (1,2,4,6,7;5,3),\quad (1,2,3,5,6,7,4).\end{gathered} \tag{14}$$

对于奇数 $n=2r+1$，除了以中间数 $r+1$ 为中心的对称排列外，还有以 1 或 n 为对中心的偏对称排列. 例如，当 $n=5$ 时，有

中心数 1: $(2,3,1,4,5)$, $(4,2,1,5,3)$, $2+5=3+4=7$,

中心数 5: $(1,3,5,2,4)$, $(2,4,5,1,3)$, $1+4=2+3=5$.

一般地，n 级排列 $(n=2r+1)$

$$\pi=(i_1,\ i_2,\cdots,\ i_r,\ i_{r+1},\ i_{r+2},\cdots,\ i_{n-1},\ i_n) \tag{15}$$

满足条件

1. 中心数 $i_{r+1}=1$，且

$$i_1+i_n=i_2+i_{n-1}=\cdots=i_r+i_{r+2}=n+2 \quad 或 \tag{16}$$

2. 中心数 $i_{r+1}=n$，且

$$i_1+i_n=i_2+i_{n-1}=\cdots=i_r+i_{r+2}=n \tag{17}$$

则称 π 是偏中心的对称排列.

对于奇数 $n=2r+1$，有以中心数 $r+1$ 为对称中心的 n 级对称排列; 还有以数 1 或 n 为对称中心的偏中心对称的 n 级排列. 除此外，其他数不可能作对称中心. 因为 $n=2r+1$ 时，有

$$\begin{aligned}s_n&=1+2+3+\cdots+n\\ &=\frac{n(n+1)}{2}=(2r+1)(r+1)\\ &=2r^2+3r+1.\end{aligned} \tag{18}$$

1. 以 $r+1$ 为对称中心 $s_n-(r+1)=r(2r+2)$, $a+a'=2r+2=n+1$;

2. 以 1 为对称中心 $s_n-1=r(2r+3)$, $a+a'=2r+3=n+2$; (19)

3. 以 n 为对称中心 $s_n-n=r(2r+1)$, $a+a'=2r+1=n$.

若以其他数为对称中心，则互补和 $a+a'$不可能是整数，而且每一个以 $r+1$ 为对称中心的对称排列，都可变换成一个以1 或 n 为对称中心的对称排列，反之也对. 因此，对奇数 $n=2r+1$，以1 或 n 为偏中心的对称排列也各有$\mu_1(n)$个同态类. 例如，当 $n=7$ 时:

中心	4	1	7
互补和	8	9	7

$$
\begin{array}{lll}
(1,2,3,4,5,6,7), & (5,6,7,1,2,3,4), & (4,5,6,7,1,2,3); \\
(6,7,3,4,5,1,2), & (3,5,7,1,2,4,6), & (4,1,2,7,5,6,3); \\
(1,2,5,4,3,6,7), & (6,4,7,1,2,5,3), & (3,5,6,7,1,2,4); \\
(6,7,5,4,3,1,2), & (5,3,7,1,2,6,4), & (3,1,2,7,5,6,4); \\
(5,1,2,4,6,7,3), & (6,5,7,1,2,4,3), & (5,6,3,7,4,1,2); \\
(3,6,7,4,1,2,5), & (3,4,7,1,2,5,6), & (1,2,4,7,3,5,6); \\
(3,1,2,4,6,7,5), & (4,3,7,1,2,6,5), & (5,6,4,7,3,1,2); \\
(5,6,7,4,1,2,3), & (4,6,7,1,2,3,5), & (1,2,3,7,4,5,6).
\end{array}
\tag{20}
$$

对于偶数 n = 2r(r=1,2,3,…)，对称的 n 级排列可以由二行等列式给出.如

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & 1 & 2 & 3 & 9 & 8 & 6 \\
+ & 12 & 11 & 10 & 4 & 5 & 7 \\
\hline
 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13
\end{array}
\quad \to (1,2,3,9,8,6,12,11,10,4,5,7).
\tag{21}
$$

这里也可以有→(1,2,3,9,8,6,7,5,4,10,11,12). 这是逆向展开，前者是顺向展开. 但是，可以检查两者是不同态的:

(1,2,3,9,8,6,12,11,10,4,5,7)→ (1,6,5,9,10,2,12,7,8,4,3,11). 仍对称

(1,2,3,9,8,6,7,5,4,10,11,12)→ (1,6,11,9,4,2,7,12,8,10,3,5) 此即

→ (1,6,11,9,8,10,3,5,4,2,7,12).

不如前者简洁. 因此我们常以顺向展开排列为对称的偶级排列，而且以后也将常用到. 固定二行等列式的头一对数，可给出偶数 n = 2r(r=1,2,3,…)级对称排列的同态类数为

$$\mu_0(n)\frac{(r-1)!2^{r-1}}{\varphi(n)} \tag{22}$$

如 $n=6$ 时，$\mu_0(6)=4$. 即

$$
\begin{array}{ll}
(1,2,3,6,5,4), & (1,3,2,6,4,5), \\
(1,2,4,6,5,3), & (1,5,3,6,2,4).
\end{array}
\tag{23}
$$

第 2 章　完美幻方及其同构变换

一、n 阶完美幻方

定义 1　在正整数集 **F** 上定义 n 阶数字方阵

$$A=\boxed{\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{array}} \tag{1}$$

各 $a_{ij}\in\mathbf{F}$, 且互不相同$(i,j=1,2,3,\cdots,n)$. 若 A 的各行、各列、各对角线上元素之和都是相等的, 则称 A 为 n 阶完美幻方. 并称此相等的和为 n 阶幻和, 记为Σ_n.

$$\text{列: } a_{i1}+a_{i2}+a_{i3}+\cdots+a_{in}=\Sigma_n,\quad (i=1,2,3,\cdots,n), \tag{2}$$

$$\text{行: } a_{1j}+a_{2j}+a_{3j}+\cdots+a_{nj}=\Sigma_n,\quad (j=1,2,3,\cdots,n), \tag{3}$$

主对角线:

$$\text{I}\quad a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}=\Sigma_n, \tag{4}$$

$$\text{II}\quad a_{1n}+a_{2n-1}+a_{3n-2}+\cdots+a_{n1}=\Sigma_n, \tag{5}$$

泛对角线:

$$\text{I}\quad a_{11+i}+a_{22+i}+a_{33+i}+\cdots+a_{nn+i}=\Sigma_n,\ (i=1,2,3,\cdots,n-1), \tag{6}$$

$$\text{II}\quad a_{1i}+a_{2i-1}+a_{3\,i-2}+\cdots+a_{ni+1}=\Sigma_n,\quad (i=n-1,n-2,\cdots,1), \tag{7}$$

其中

$$n+i,\quad i+1\quad (\mathrm{mod}\ n). \tag{8}$$

这里“各对角线”除了包括主对角线Ⅰ、Ⅱ外, 还包括那些平行于主对角线Ⅰ、Ⅱ的被折断了的所谓泛对角线. 特别地, 当 $\mathbf{F}=\{1,2,3,\cdots,n^2\}$ 时, n 阶幻和

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_n&=(1+2+3+\cdots+n^2)\div n\\&=\frac{n^2(n^2+1)}{2n}\\&=\frac{n(n^2+1)}{2}.\end{aligned} \tag{9}$$

若 A 中只是两条主对角线上元素之和等于Σ_n, 则称 A 是 n 阶幻方. 显然, 完美幻方必是幻方, 而幻方不一定是完美幻方.

例如, 下面是一个 5 阶完美幻方:

$$A=\begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 15 & 23 & 6 & 19 & 2 \\ 2 & 16 & 4 & 12 & 25 & 8 \\ 3 & 22 & 10 & 18 & 1 & 14 \\ 4 & 3 & 11 & 24 & 7 & 20 \\ 5 & 9 & 17 & 5 & 13 & 21 \\ \hline \end{array}\quad \Sigma_5=65 \tag{10}$$

边框外的数字为行、列序(下同). 往后, 把分别含有元素 $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{1n}$ 的列线(第Ⅰ、Ⅱ对角线)称为第 1,2,3, $\cdots,n$ 条列线(第Ⅰ、Ⅱ对角线). 其中, 第 1 Ⅰ对角线、第 n Ⅱ对角线就分别是Ⅰ、Ⅱ主对角线.

二、完美幻方的变换

设 A 是完美幻方, 下列变换不会改变 A 的完美性:

1. 转置　A 之转置方阵 A^{T}.

2. 行、列的轮回　例如, 对(10)列轮回:

$$A \to AP = \begin{array}{c} \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{matrix} \\ \boxed{\begin{matrix} 23 & 6 & 19 & 2 & 15 \\ 4 & 12 & 25 & 8 & 16 \\ 10 & 18 & 1 & 14 & 22 \\ 11 & 24 & 7 & 20 & 3 \\ 17 & 5 & 13 & 21 & 9 \end{matrix}} \end{array} \to \cdots \to AP^4 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \boxed{\begin{matrix} 2 & 15 & 23 & 6 & 19 \\ 8 & 16 & 4 & 12 & 25 \\ 14 & 22 & 10 & 18 & 1 \\ 20 & 3 & 11 & 24 & 7 \\ 21 & 9 & 17 & 5 & 13 \end{matrix}} \end{array} \tag{11}$$

行轮回:

$$A \to PA = \boxed{\begin{matrix} 16 & 4 & 12 & 25 & 8 \\ 22 & 10 & 18 & 1 & 14 \\ 3 & 11 & 24 & 7 & 20 \\ 9 & 17 & 5 & 13 & 21 \\ 15 & 23 & 6 & 19 & 2 \end{matrix}} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{matrix} \to \cdots \to P^4A = \boxed{\begin{matrix} 9 & 17 & 5 & 13 & 21 \\ 15 & 23 & 6 & 19 & 2 \\ 20 & 4 & 12 & 25 & 8 \\ 21 & 10 & 18 & 1 & 14 \\ 3 & 11 & 24 & 7 & 20 \end{matrix}} \begin{matrix} 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \tag{12}$$

若把给定的完美幻方 A 之行、列轮回作成一张表, 可得一个由 n^2 个 n 阶完美幻方组成的完美幻方的行、列轮回表. 今后把运算符号置于方阵之右边, 表示对 A 进行行运算; 置于左边则进行列运算. 第 3 节有这样的 4 阶、5 阶完美幻方的行、列轮回表.

完美幻方的行、列轮回变换为完美幻方提供了两种形象的直观理解:

(1)圆筒幻方　例如, 对列轮回, 把一个完美幻方的左右两边线粘连在一起, 可形成一个垂直圆筒幻方. 再从任一条数间线剪开展平, 即可得一进行了列轮回的完美幻方. 同样, 对行轮回可得一水平圆筒幻方.

(2)平面延展　把一个 n 阶完美幻方向左, 向下依次重写各列、行, 可得一个延展了的数阵. 再用一个 n 阶方阵框去套, 即可得一个完美幻方. 例如, 对上述(10)有

$$\boxed{\begin{matrix} 15 & 23 & 6 & 19 & 2 & 15 & 23 & 6 & 19 \\ 16 & 4 & 12 & 25 & 8 & 16 & 4 & 12 & 25 \\ 22 & 10 & 18 & 1 & 14 & 22 & 10 & 18 & 1 \\ 3 & 11 & 24 & 7 & 20 & 3 & 11 & 24 & 7 \\ 9 & 17 & 5 & 13 & 21 & 9 & 17 & 5 & 13 \\ 15 & 23 & 6 & 19 & 2 & 15 & 23 & 6 & 19 \\ 16 & 4 & 12 & 25 & 8 & 16 & 4 & 12 & 25 \\ 22 & 10 & 18 & 1 & 14 & 22 & 10 & 18 & 1 \\ 3 & 11 & 24 & 7 & 20 & 3 & 11 & 24 & 7 \end{matrix}} \tag{13}$$

3. 行、列之逆序

$$
\pi_4 A = \begin{array}{|ccccc|c}
\hline
15 & 23 & 6 & 19 & 2 & 1 \\
9 & 17 & 5 & 13 & 21 & 5 \\
3 & 11 & 24 & 7 & 20 & 4 \\
22 & 10 & 18 & 1 & 14 & 3 \\
16 & 4 & 12 & 25 & 8 & 2 \\
\hline
\end{array}
\qquad
A\pi_4 = \begin{array}{|ccccc|}
\multicolumn{1}{c}{1} & 5 & 4 & 3 & \multicolumn{1}{c}{2} \\
\hline
15 & 2 & 19 & 6 & 23 \\
16 & 8 & 25 & 12 & 4 \\
22 & 14 & 1 & 18 & 10 \\
3 & 20 & 7 & 24 & 11 \\
9 & 21 & 13 & 5 & 17 \\
\hline
\end{array}
\tag{14}
$$

4. 双边循环排列　完美幻方的行、列都按原行、列排序之某个轮回排列重排. 如

$$
\begin{array}{cc|ccccc|ccccc|c}
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & \\
\cline{3-12}
A & 1 & 15 & 23 & 6 & 19 & 2 & 15 & 6 & 2 & 23 & 19 & A\pi_2 \\
 & 2 & 16 & 4 & 12 & 25 & 8 & 16 & 12 & 8 & 4 & 25 & \\
 & & 22 & 10 & 18 & 1 & 14 & 22 & 18 & 14 & 10 & 1 & \\
 & 3 & 3 & 11 & 24 & 7 & 20 & 3 & 24 & 20 & 11 & 7 & \\
 & 4 & 9 & 17 & 5 & 13 & 21 & 9 & 5 & 21 & 17 & 13 & \\
\cline{3-12}
\pi_2 A & 1 & 15 & 23 & 6 & 19 & 2 & 15 & 6 & 2 & 23 & 19 & \pi_2 A\pi_2 \\
 & 3 & 22 & 10 & 18 & 1 & 14 & 22 & 18 & 14 & 10 & 1 & \\
 & 5 & 9 & 17 & 5 & 13 & 21 & 9 & 5 & 21 & 17 & 13 & \\
 & 2 & 16 & 4 & 12 & 25 & 8 & 16 & 12 & 8 & 4 & 25 & \\
 & 4 & 3 & 11 & 24 & 7 & 20 & 3 & 24 & 20 & 11 & 7 & \\
\cline{3-12}
\end{array}
\tag{15}
$$

其中 A, $\pi_2 A\pi_2$ 是 5 阶完美幻方, 而 $\pi_2 A$, $A\pi_2$ 不是完美幻方.

5. 拓扑变换　方阵 A 之对角线组 Ⅰ, Ⅱ与行, 列线组相互交换:

$$
A \xrightarrow{\text{拓}} A^* = \begin{array}{|ccccc|}
\hline
15 & 17 & 24 & 1 & 8 \\
4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\
18 & 25 & 2 & 9 & 11 \\
7 & 14 & 16 & 23 & 5 \\
21 & 3 & 10 & 12 & 19 \\
\hline
\end{array}
\tag{16}
$$

定理 1　偶阶完美幻方不存在拓扑变换.

证明　在一个方阵中, 任一条行线与任一条列线都有且只有一个交点, 即一个共同元. 但是在偶阶, 例如 4 阶完美幻方

$$
B = \begin{array}{|cccc|}
\hline
1 & 14 & 7 & 12 \\
8 & 11 & 2 & 13 \\
10 & 5 & 16 & 3 \\
15 & 4 & 9 & 6 \\
\hline
\end{array}
\ \Sigma_4 = 34
\tag{17}
$$

中, 对角线组如下:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & \mathrm{I} & & & & & \mathrm{II} & & \\
① & 1 & 11 & 16 & 6; & \qquad & 1 & 13 & 16 & 4; \\
② & 14 & 2 & 3 & 15; & & 14 & 8 & 3 & 9; \\
③ & 7 & 13 & 10 & 4; & & 7 & 11 & 10 & 6; \\
④ & 12 & 8 & 5 & 9; & & 12 & 2 & 5 & 15.
\end{array}
\tag{18}
$$

其中, Ⅰ①与Ⅱ①、Ⅱ③各有两个共同元; Ⅰ①与Ⅱ②、Ⅱ④没有共同元. 因此, 偶阶幻方的对角线组不可能变成方阵的行、列线组. 故对偶阶不能进行拓扑变换, 故结论成立.

上列各种变换均没有改变方阵 A 之行、列、对角线组各线的组成元素，所能引起的变换只能是:

(1) 线组与线组之互变;

(2) 各线组内各线的排列顺序;

(3) 各线之组成元素的排列顺序.

例如，前面 5 阶完美幻方 $A(3)$通过上列变换所引起的各线组之变换如下表所示:

变 换	行 线 组	列 线 组	角 线 组 I	对 角 线 组 II
A	(1 2 3 4 5)	(1 2 3 4 5)	(1 2 3 4 5)	(1 2 3 4 5)
AP	(1 2 3 4 5)	(2 3 4 5 1)	(5 1 2 3 4)	(2 3 4 5 1)
PA	(2 3 4 5 1)	(1 2 3 4 5)	(2 3 4 5 1)	(2 3 4 5 1)
$\pi_2 A \pi_2$	(1 3 5 2 4)	(1 3 5 2 4)	(1 3 5 2 4)	(1 3 5 2 4)
A^{T}	列 (1 2 3 4 5)	行 (1 2 3 4 5)	(1 5 4 3 2)	(1 2 3 4 5)
$\pi_4 A$	(1 5 4 3 2)	(1 2 3 4 5)	II (2 1 5 4 3)	I (2 1 5 4 3)
$A\pi_4$	(1 2 3 4 5)	(1 5 4 3 2)	II (2 3 4 5 1)	I (5 1 2 3 4)
拓扑 A^*	II (2 4 1 3 5)	I (1 4 2 5 3)	行 (1 2 3 4 5)	列 (5 1 2 3 4)

(19)

由表可见转置引起行，列线组相互交换；逆序引起对角线组相互交换；而拓扑变换引起行列线组与对角线组的相互交换.

三、同构的完美幻方

对于两个用相同的元素组成的同阶完美幻方 A, B. 若有变换 $\psi: A \to B$，使 A, B 两方的各线组之间可以建立起线与线的一一对应，即对 A 的某一线组总能在 B 中找到一个线组，使它们的线与线之间建立起一一对应，反之也对. 这时称 A, B 是同构的完美幻方. 使 A, B 同构的变换 ψ 称为同构变换. 可见，前面关于完美幻方的行，列轮回；转置；行、列的逆序；双边循环排列；拓扑变换等都是完美幻方的同构变换.

下面给出的是 4 阶完美幻方 B 和 5 阶完美幻方 A 的行，列轮回表:

B	1	2	3	4	2	3	4	1	3	4	1	2	4	1	2	3
1	1	14	7	12	14	7	12	1	7	12	1	14	12	1	14	7
2	8	11	2	13	11	2	13	8	2	13	8	11	13	8	11	2
3	10	5	16	3	5	16	3	10	16	3	10	5	3	10	5	16
4	15	4	9	6	4	9	6	15	9	6	15	4	6	15	4	9
2	8	11	2	13	11	2	13	8	2	13	8	11	13	8	11	2
3	10	5	16	3	5	16	3	10	16	3	10	5	3	10	5	16
4	15	4	9	6	4	9	6	15	9	6	15	4	6	15	4	9
1	1	14	7	12	14	7	12	1	7	12	1	14	12	1	14	7
3	10	5	16	3	5	16	3	10	16	3	10	5	3	10	5	16
4	15	4	9	6	4	9	6	15	9	6	15	4	6	15	4	9
1	1	14	7	12	14	7	12	1	7	12	1	14	12	1	14	7
2	8	11	2	13	11	2	13	8	2	13	8	11	13	8	11	2
4	15	4	9	6	4	9	6	15	9	6	15	4	6	15	4	9
1	1	14	7	12	11	7	12	1	7	12	1	14	12	1	14	7
2	8	11	2	13	14	2	13	8	2	13	8	11	13	8	11	2
3	10	5	16	3	5	16	3	10	16	3	10	5	3	10	5	16

(20)

A

15	23	6	19	2	23	6	19	2	15	6	19	2	15	23	19	2	15	23	6	2	15	23	6	19
16	4	12	25	8	4	12	25	8	16	12	25	8	16	4	25	8	16	4	12	8	16	4	12	25
22	10	18	1	14	10	18	1	14	22	18	1	14	22	10	1	14	22	10	18	14	22	10	18	1
3	11	24	7	20	11	24	7	20	3	24	7	20	3	11	7	20	3	11	24	20	3	11	24	7
9	17	5	13	21	17	5	13	21	9	5	13	21	9	17	13	21	9	17	5	21	9	17	5	13
16	4	12	25	8	4	12	25	8	16	12	25	8	16	4	25	8	16	4	12	8	16	4	12	25
22	10	18	1	14	10	18	1	14	22	18	1	14	22	10	1	14	22	10	18	14	22	10	18	1
3	11	24	7	20	11	24	7	20	3	24	7	20	3	11	7	20	3	11	24	20	3	11	24	7
9	17	5	13	21	17	5	13	21	9	5	13	21	9	17	13	21	9	17	5	21	9	17	5	13
15	23	6	19	2	23	6	19	2	15	6	19	2	15	23	19	2	15	23	6	2	15	23	6	19
22	10	18	1	14	10	18	1	14	22	18	1	14	22	10	1	14	22	10	18	14	22	10	18	1
3	11	24	7	20	11	24	7	20	3	24	7	20	3	11	7	20	3	11	24	20	3	11	24	7
9	17	5	13	21	17	5	13	21	9	5	13	21	9	17	13	21	9	17	5	21	9	17	5	13
15	23	6	19	2	23	6	19	2	15	6	19	2	15	23	19	2	15	23	6	2	15	23	6	19
16	4	12	25	8	4	12	25	8	16	12	25	8	16	4	25	8	16	4	12	8	16	4	12	25
3	11	24	7	20	11	24	7	20	3	24	7	20	3	11	7	20	3	11	24	20	3	11	24	7
9	17	5	13	21	17	5	13	21	9	5	13	21	9	17	13	21	9	17	5	21	9	17	5	13
15	23	6	19	2	23	6	19	2	15	6	19	2	15	23	19	2	15	23	6	2	15	23	6	19
16	4	12	25	8	4	12	25	8	16	12	25	8	16	4	25	8	16	4	12	8	16	4	12	25
22	10	18	1	14	10	18	1	14	22	18	1	14	22	10	1	14	22	10	18	14	22	10	18	1
9	17	5	13	21	17	5	13	21	9	5	13	21	9	17	13	21	9	17	5	21	9	17	5	13
15	23	6	19	2	23	6	19	2	15	6	19	2	15	23	19	2	15	23	6	2	15	23	6	19
16	4	12	25	8	4	12	25	8	16	12	25	8	16	4	25	8	16	4	12	8	16	4	12	25
22	10	18	1	14	10	18	1	14	22	18	1	14	22	10	1	14	22	14	18	14	22	14	18	1
3	11	24	7	20	11	24	7	20	3	24	7	20	3	11	7	20	3	11	24	20	3	11	24	7

据此，可给出如下 $\Phi(n)$的计算表:

$\lambda(n)$, $\mu(n)$, $\Phi(n)$计算表

n	$\varphi(n)$	$n!$	$\lambda(n)$	$\mu(n)$	$\Phi(n)$
4	2	24	2	2	128
5	4	120	6	2	800
6	2	720	60	12	288
7	6	5040	120	8	2352
8	4	40320	1260	48	1024
9	6	362880	6720	64	3888
10	4	3628800	90720	480	1600
11	10	3991680	362880	384	9680
12	4	479001600	979200	5760	2304
13	12	6227272800	3991680	3840	16224
14	6	14!	1037836800	53760	4704
15	8	15!	10897286400	80640	14400
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(21)

由这两个轮回表，可知有如下的结轮：

1. 任一元素可处于完美幻方的任一位置；

2. 各方之同一位置元素也构成一个同构的完美幻方，而且在表中也有这个完美幻方存在；

3. 用 $\boldsymbol{B}$ 的转置 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，或 $\boldsymbol{B}$ 的行、列逆序代替 $\boldsymbol{B}$ 均可给出相应的行、列轮回表. 因此，给一个 n 阶完美幻方，通过上列同构变换可得 $\Phi(n)$个同构的完美幻方：

$$\Phi(n)=\begin{cases}8n^2\varphi(n) & n\text{是奇数;}\\ 4n^2\varphi(n) & n\text{是偶数.}\end{cases} \tag{22}$$

四、常用的完美幻方

1. 5 阶完美幻方　总共有 36 个基本的 5 阶完美幻方 C_{ij}. 其中 C_{11}, C_{22}, C_{12}, C_{21} 是对称的 5 阶完美幻方.