Yan Yuan
燕园教育

2013 考研专家指导丛书

考研数学标准模拟试卷与精解（数学一）

清华大学 王欢
北京大学 王德军
首都师范大学 童武
主编

由多次参加命题及阅卷的专家亲自编写，内容系统、权威
严格按照最新考试大纲，突出重点

赠送MP3盘
考研名师童武教授
考研数学串讲视频+辅导讲义

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

Yan Yuan
燕园教育

2013 考研专家指导丛书

考研数学标准模拟试卷与精解（数学一）

清华大学 王 欢
北京大学 王德军
首都师范大学 童 武
主编

由多次参加**命题及阅卷的专家**亲自编写，内容系统、权威

严格按照最新考试大纲，突出重点

赠送MP3盘 考研名师童武教授 考研数学串讲视频+辅导讲义

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

图书在版编目(CIP)数据

考研数学标准模拟试卷与精解. 数学一 / 王欢,王德军,童武主编.
—北京:中国石化出版社,2012.2
(2013年考研专家指导丛书)
ISBN 978-7-5114-1421-2

Ⅰ.①考… Ⅱ.①王… ②王… ③童… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第016642号

中国石化出版社出版发行
地址:北京市东城区安定门外大街58号
邮编:100011 电话:(010)84271850
读者服务部电话:(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com
北京科信印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092毫米 16开本 10.25印张 258千字
2012年3月第1版 2012年3月第1次印刷
定价:20.00元(赠送MP3盘)

前 言

中国加入 WTO 之后，改革开放逐步深化，经济发展速度日益加快，社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进，我国对硕士研究生等高层次人才的需求越来越大，这方面的教育也在稳步发展，规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化，考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说，全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试，即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上，重点考查考生分析问题和解决问题的能力，并且要采用科学的办法，保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习，顺利通过数学考试、赢取高分，我们根据国家教育部制定的最新考试大纲，基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验，以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路，倾力推出这套考研专家指导丛书。本套丛书包括《考研数学历届真题权威解析(数学一)》、《考研数学历届真题权威解析(数学二)》、《考研数学历届真题权威解析(数学三)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学一)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学二)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学三)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学一)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学二)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学三)》、《考研数学最后冲刺超越 135 分(数学一)》、《考研数学最后冲刺超越 135 分(数学二)》、《考研数学最后冲刺超越 135 分(数学三)》、《考研数学名师名家高分复习全书(理工类)》、《考研数学名师名家高分复习全书(经济类)》、《考研数学名师名家高等数学辅导讲义》、《考研数学名师名家线性代数辅导讲义》、《考研数学名师名家概率论与数理统计辅导讲义》、《考研数学最新精选 1000 题(理工类)》、《考研数学最新精选 1000 题(经济类)》、《考研数学必做客观题 1800 题精析(理工

类)》、《考研数学必做客观题 1800 题精析(经济类)》、《考研数学必做主观题 600 题精析(理工类)》和《考研数学必做主观题 600 题精析(经济类)》。

本套书的编写特点如下:

1. 配合最新考试大纲,反映最新变化

本书在严格遵循最新考试精神和最新考试大纲要求的基础上,力求反映最新考试要求,紧扣全国硕士研究生入学数学考试的脉搏。

2. 注重考试技巧、高效突破难关

本书精辟阐明解题思路,全面展现题型变化,为考生全程领航和理性分析,引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本套冲刺试卷进行考前模拟实战训练,检验自己的学习成果,及时进行查漏补缺,有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练,这样效果最佳。

3. 教授亲自主笔,编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编著。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作,积累了丰富的教学辅导经验,对历年考试情况比较了解,对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序,力求达到完美,但限于时间和水平,仍可能存在不足,纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编　者

目　录

模拟试卷(一)

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

1. 设$f(x)$为R上不恒等于零的奇函数，且$f'(0)$存在，则函数$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$(　　).

(A)在$x=0$处左极限不存在　　(B)有跳跃间断点$x=0$

(C)在$x=0$处右极限不存在　　(D)有可去间断点$x=0$

2. 设$f(x,y)$与$\varphi(x,y)$均为可微函数，且$\varphi'_y(x,y)\neq 0$，已知(x_0,y_0)是$f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的一个极值点，下列选项正确的是(　　).

(A)若$f'_x(x_0,y_0)=0$，则$f'_y(x_0,y_0)=0$　　(B)若$f'_x(x_0,y_0)=0$，则$f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

(C)若$f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则$f'_y(x_0,y_0)=0$　　(D)若$f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则$f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

3. 设非齐次线性微分方程$y'+P(x)y=Q(x)$有两个不同的解$y_1(x),y_2(x)$，C为任意常数，则该方程的通解是(　　).

(A) $C[y_1(x)-y_2(x)]$　　(B) $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$

(C) $C[y_1(x)+y_2(x)]$　　(D) $y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$

4. 下列各选项正确的是(　　).

(A)若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$都收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$收敛

(B)若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$都收敛

(C)若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$u_n\geqslant\dfrac{1}{n}$

(D)若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，且$u_n\geqslant v_n(n=1,2,\cdots)$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛

5. 设$\boldsymbol{A}$为3阶矩阵，将$\boldsymbol{A}$的第2行加到第1行得$\boldsymbol{B}$，再将$\boldsymbol{B}$的第1列的-1倍加到第2列得$\boldsymbol{C}$，记$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则(　　).

(A) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$　　(B) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$

(C) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{AP}$　　(D) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^T$

6. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，则下列向量组中线性无关的是(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$

7. 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别为随机变量，X_1 与 X_2 的分布函数，为使 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$ 是某一随机变量的分布函数，在下列给定的各组数值中应取（　　）.

(A) $a=\frac{3}{5},b=-\frac{2}{5}$　　(B) $a=\frac{2}{3},b=\frac{2}{3}$

(C) $a=-\frac{1}{2},b=\frac{3}{2}$　　(D) $a=\frac{1}{2},b=-\frac{3}{2}$

8. 设两个随机变量 X 与 Y 独立同分布，$P\{X=-1\}=P\{Y=-1\}=\frac{1}{2}$，$P\{X=1\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$，则下列各式中成立的是（　　）.

(A) $P\{X=Y\}=\frac{1}{2}$　　(B) $P\{X=Y\}=1$

(C) $P\{X+Y=0\}=\frac{1}{4}$　　(D) $P\{XY=1\}=\frac{1}{4}$

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

9. 设常数 $a\neq\frac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$ ________ .

10. 方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z=$ ________ .

11. 微分方程 $y''+y=-2x$ 的通解为________ .

12. $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(|x|+x^2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}x=$ ________ .

13. 设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $\boldsymbol{B}=$ ________ .

14. 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}(-\infty<x<)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 X 的简单随机样本，其样本方差 S^2，则 $E(S^2)=$ ________ .

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}, & x\neq 1,\\ 1, & x=1,\end{cases}$ 问函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否连续？若不连续，修改函数在 $x=1$ 处的定义使之连续.

16.（本题满分 9 分）

设 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 为非零向量，且 $|\vec{b}|=1$，$\vec{a}$、$\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，求 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{|\vec{a}+\vec{b}t|-|\vec{a}|}{t}$.

17.（本题满分 10 分）

从点 $P_1(1,0)$ 作 x 轴的垂线，交抛物线 $y = x^2$ 于点 $Q_1(1,1)$，再从 Q_1 作这条抛物线的切线与 x 轴交于 P_2，然后又从 P_2 作 x 轴的垂线，交抛物线于点 Q_2……，依次重复上述过程得到一系列的点 $P_1,Q_1,P_2,Q_2,\cdots,P_n,Q_n,\cdots$.

(Ⅰ) 求 $\overline{OP_n}$；

(Ⅱ) 求级数 $\overline{Q_1P_1} + \overline{Q_2P_2} + \cdots + \overline{Q_nP_n} + \cdots$ 的和，其中 $n\,(n \geqslant 1)$ 为自然数，而 $\overline{Q_iP_i}$ 表示点 Q_i 与 P_i 之间的距离.

18. (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上二阶可导且 $f''(x) < 0$，证明：$\int_0^1 f(x^2)\,dx \leqslant f\left(\frac{1}{3}\right)$.

19. (本题满分 11 分)

在变力 $F = yzi + zxj + xyk$ 的作用下，质点由原点沿直线运动到椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上第一卦限的点 $M(\xi,\eta,\zeta)$，问当 ξ、η、ζ 取何值时，F 所做的功 W 最大，并求出 W 的最大值.

20. (本题满分 11 分)

考虑二次型 $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$，问 λ 取何值时，f 为正定二次型.

21. (本题满分 11 分)

设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-1,2,-1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = (0,-1,1)^T$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的两个解.

(Ⅰ) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量；

(Ⅱ) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ} = \boldsymbol{\Lambda}$；

(Ⅲ) 求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\left(\boldsymbol{A} - \frac{3}{2}\boldsymbol{E}\right)^6$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵.

22. (本题满分 11 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 是来自正态总体 X 的简单随机样本，$Y_1 = \frac{1}{6}(X_1 + \cdots + X_6)$，$Y_2 = \frac{1}{3}(X_7 + X_8 + X_9)$，$S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i - Y_2)^2$，$Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S}$，证明统计量 Z 服从自由度为 2 的 t 分布.

23. (本题满分 11 分)

假设随机变量 X_1、X_2、X_3、X_4 相互独立，且同分布，$P\{X_i = 0\} = 0.6$，$P\{X_i = 1\} = 0.4\ (i = 1,2,3,4)$，求行列式 $X = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的概率分布.

模拟试卷(一)参考答案与解析

一、选择题

1. 【考点提示】极限、间断点

【解题分析】由题设，$f(-x) = -f(x)$，则有 $f(0) = 0$,

从而$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}g(x)$,

即$g(x)$在$x=0$处极限存在，但$x=0$时$g(x)$无定义，

因此可补充定义$g(0)=f'(0)$，则$g(x)$在$x=0$处连续.

综上,$g(x)$有可去间断点$x=0$，所以选(D).

2. 【考点提示】二元函数条件极值问题

【解题分析】依题意知(x_0,y_0)是拉格朗日函数,$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$的驻点，

即(x_0,y_0)使得
$$\begin{cases}F'_x\big|_{(x_0,y_0)}=f'_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi'_x(x_0,y_0)=0, & (1)\\ F'_y\big|_{(x_0,y_0)}=f'_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi'_y(x_0,y_0)=0, & (2)\\ F'_\lambda\big|_{(x_0,y_0)}=\varphi(x_0,y_0)=0. \end{cases}$$

因为$\varphi'_y(x_0,y_0)\neq 0$，所以从(2)式可得$\lambda=-\dfrac{f'_y(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}$,

代入(1)式得$f'_x(x_0,y_0)-\dfrac{\varphi'_x(x_0,y_0)f'_y(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}=0$,

即$f'_x(x_0,y_0)\varphi'_y(x_0,y_0)=\varphi'_x(x_0,y_0)f'_y(x_0,y_0)$.

当$f'_x(x_0,y_0)\neq 0$且$\varphi'_y(x_0,y_0)\neq 0$时,$f'_x(x_0,y_0)\varphi'_y(x_0,y_0)\neq 0$,

从而$f'_y(x_0,y_0)\neq 0$，故选(D).

3. 【考点提示】一阶线性微分方程解的叠加原理及通解结构

【解题分析】根据已知条件及线性微分方程解的叠加原理,$y_1(x)-y_2(x)$是齐次线性微分方程$y'+P(x)y=0$的一个非零解，又$y_1(x)$是原非齐次线性微分方程的一个特解，进而由线性方程通解的结构可知$y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$是原非齐次线性微分方程的通解，其中C为任意常数，故选(B).

4. 【考点提示】级数的收敛性

【解题分析】$(u_n+v_n)^n=u_n^2+2u_nv_n+v_n^2\leqslant 2(u_n^2+v_n^2)$，所以(A)是答案.

5. 【考点提示】初等矩阵的运算

【解题分析】根据已知条件，用初等矩阵描述有

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{PAP}^{-1}.$$

故选(B).

6. 【考点提示】线性无关性

【解题分析】由题设，观察四个选项:

关于(A)，由于$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)=0$,

则$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$线性相关.

关于(B)，由于$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=0$,

则$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$也线性相关，

关于(C)，由定义，设有一组数k_1,k_2,k_3,

使得 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=0$

即 $(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(2k_1+2k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(3k_2+3k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=0$,

由已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则 $\begin{cases}k_1+k_3=0,\\2k_1+2k_2=0,\\3k_2+3k_3=0,\end{cases}$

该方程组的系数矩阵的行列式为 $\begin{vmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{vmatrix}=12\neq0$,

从而 $k_1=k_2=k_3=0$，由此知(C)中向量组线性无关.

而由同样的方法，建立关于(D)中向量组相应的方程组，可计算出系数矩阵的行列式为0，则(D)中向量组线性相关. 综上选(C).

7.【考点提示】分布函数

【解题分析】本题考查分布函数的性质，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$,

则由题设得 $1=\lim\limits_{x\to+\infty}[aF_1(x)-bF_2(x)]=a-b$,

所以 $a-b=1$，四个选项中只有(A)的 a,b 满足上式的条件，所以选(A).

8.【考点提示】概率分布

【解题分析】由于 $\{X=Y\}=\{X=1,Y=1\}\cup\{X=-1,Y=-1\}$，且由题设知 X 与 Y 独立同分布，则

$$\begin{aligned}P\{X=Y\}&=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=-1,Y=-1\}\\&=P\{X=1\}\cdot P\{Y=1\}+P\{X=-1\}\cdot P\{Y=-1\}\\&=(1/2)^2+(1/2)^2=1/2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{X+Y=0\}&=P\{X=1,Y=-1\}+P\{X=-1,Y=1\}\\&=2P\{X=1\}P\{Y=-1\}=2\cdot(1/2)^2=1/2,\end{aligned}$$

$$P\{XY=1\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=-1,Y=-1\}=1/2.$$

综上，选(A).

二、填空题

9.【考点提示】数列的极限

【解题分析】由题设，原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left[1+\dfrac{1}{n(1-2a)}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n(1-2a)}=\dfrac{1}{1-2a}$.

10.【考点提示】隐函数的全微分

【解题分析】这是求隐函数在某点的全微分，这里点 $(1,0,-1)$ 的含意是 $z=z(1,0)=-1$,

将方程两边求全微分，由一阶全微分形式不变性得 $\mathrm{d}(xyz)+\dfrac{\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$,

再由全微分四则运算法则得 $(xy)\mathrm{d}z+(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)z=-\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

令 $x=1,y=0,z=-1$ 得 $\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{d}x-\mathrm{d}z}{\sqrt{2}}$,即 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}x-\sqrt{2}\mathrm{d}y$ 为所求.

11.【考点提示】二阶常系数微分方程的解法

【解题分析】特征方程 $\lambda^2+1=0$，$\lambda=\pm i$

于是齐次方程通解为 $\bar{y}=c_1\cos x+c_2\sin x$

设特解为 $y^*=Ax$，代入方程得 $y^*=-2x$，所以 $y=c_1\cos x+c_2\sin x-2x.$

12.【考点提示】二重积分

【解题分析】$\iint\limits_{|x+y|\leqslant 1}(|x|+x^2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}|x|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_1}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1-x\}$,

而 $\iint\limits_{D_1}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y=\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，因此 $\iint\limits_{|x+y|\leqslant 1}(|x|+x^2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=4\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}.$

13.【考点提示】矩阵方程

【解题分析】由已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则 $|\boldsymbol{A}|=-2\neq 0$,

由公式 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 化简矩阵方程 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{E}$,

即分别以 $\boldsymbol{A}$ 左乘该方程，以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 右乘该方程得 $-2\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{AB}-8\boldsymbol{E}$,

从而 $2(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=8\boldsymbol{E}$，即 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=4\boldsymbol{E}$，因此 $\boldsymbol{B}=4(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}$,

其中 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}=4\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&-1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$

14.【考点提示】无偏估计

【解题分析】依题意，可得 $E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=0$,

$D(x)=E(X^2)-[E(x)]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\Gamma(3)=2$,

因为样本方差 S^2 是总体方差的无偏估计，所以 $E(S^2)=D(x)=2.$

三、解答题

15.【考点提示】先求极限 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，再由连续定义即可求解

【解题分析】因为 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-\frac{\sin(x-1)}{\cos(x-1)}}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}=\frac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to 1}\frac{\tan(x-1)}{\cos\frac{\pi x}{2}}$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\cos^2(x-1)}}{-\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}=-\frac{4}{\pi^2}.$$

而 $f(1)=1$，故 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)\neq f(1)$，所以函数在 $x=1$ 处不连续,

若令$f(1)=-\dfrac{4}{\pi^2}$，则函数在$x=1$处连续.

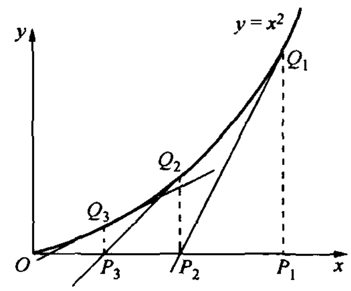
16.【考点提示】求极限

【解题分析】观察知道，此题为“$\dfrac{0}{0}$”型. 但不能用洛必达法则求解. 应该以去掉分子中的模符号“| |”为化简方向.

$$\lim_{t\to0}\frac{|\vec{a}+t\vec{b}|-|\vec{a}|}{t}=\lim_{t\to0}\frac{(|\vec{a}+t\vec{b}|-|\vec{a}|)(|\vec{a}+t\vec{b}|+|\vec{a}|)}{t(|\vec{a}+t\vec{b}|+|\vec{a}|)}=\lim_{t\to0}\frac{|\vec{a}+t\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2}{|t(\vec{a}+t\vec{b})|+|t\vec{a}|}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{(\vec{a}+t\vec{b})(\vec{a}+t\vec{b})-\vec{a}\cdot\vec{a}}{t(|\vec{a}+t\vec{b}|+|\vec{a}|)}=\lim_{t\to0}\frac{2\vec{a}\cdot\vec{b}+t\vec{b}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}+t\vec{b}|+|\vec{a}|}=\frac{2\vec{a}\cdot\vec{b}}{2|\vec{a}|}=|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

17.【考点提示】切线方程、级数求和



【解题分析】(Ⅰ)依题意画图(如右图). 由$y=x^2$得$y'=2x$, 任给$a(0<a\leqslant1)$，抛物线$y=x^2$在点(a,a^2)处的切线方程为$y-a^2=2a(x-a)$，该切线与x轴的交点为$(a/2,0)$，

因此由$\overline{OP_1}=1$，可知$\overline{OP_2}=\dfrac{1}{2}\overline{OP_1}=\dfrac{1}{2}$，$\overline{OP_3}=\dfrac{1}{2}\overline{OP_2}=\dfrac{1}{2^2}$，…，

以此类推，知$\overline{OP_n}=\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

(Ⅱ)又由$\overline{O_nP_n}=(\overline{OP_n})^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n-2}$，

知级数$\overline{O_1P_1}+\overline{O_2P_2}+\cdots+\overline{O_nP_n}+\cdots=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\overline{O_nP_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}.$

18.【考点提示】用泰勒公式证明积分不等式

【解题分析】由泰勒公式得$f(t)=f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f'\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(t-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}\left(t-\dfrac{1}{3}\right)^2$，

其中ξ介于$\dfrac{1}{3}$与t之间，从而$f(x^2)\leqslant f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f'\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(x^2-\dfrac{1}{3}\right)$，积分得$\displaystyle\int_0^1 f(x^2)\,dx\leqslant f\left(\frac{1}{3}\right)$.

19.【考点提示】曲线积分的综合题

【解题分析】(Ⅰ)先写出在变力F的作用下质点由原点沿直线运动到点$M(\xi,\eta,\zeta)$时所作的功W的表达式. 点O到点M的线段记为L，则$W=\displaystyle\int_L F\cdot ds=\int_L yzdx+zxdy+xydz.$

(Ⅱ)计算曲线积分：L的参数方程是$x=t\xi,y=t\eta,z=t\zeta,t\in[0,1]$.

$\Rightarrow W=\displaystyle\int_0^1(\eta\zeta t^2\cdot\xi+\xi\zeta t^2\cdot\eta+\xi\eta t^2\cdot\zeta)dt=3\xi\eta\zeta\int_0^1 t^2dt=\xi\eta\zeta.$

(Ⅲ)化为最值问题并求解：问题变成求 $W=\xi\eta\zeta$ 在条件 $\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1(\xi\geqslant 0,\eta\geqslant 0,\zeta\geqslant 0)$ 下的最大值与最大值点.

用拉格朗日乘子法求解. 令 $F(\xi,\eta,\zeta,\lambda)=\xi\eta\zeta+\lambda(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1)$,

则有 $$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial \xi}=\eta\zeta+2\lambda\frac{\xi}{a^2}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial \eta}=\xi\zeta+2\lambda\frac{\eta}{b^2}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial \zeta}=\xi\eta+2\lambda\frac{\zeta}{c^2}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1=0,\end{cases}$$

对前三个方程，分别乘以 ξ,η,ζ 得 $\frac{\xi^2}{a^2}=\frac{\eta^2}{b^2}=\frac{\zeta^2}{c^2}$($\lambda\neq 0$ 时),

代入第四个方程得 $\xi=\frac{1}{\sqrt{3}}a,\eta=\frac{1}{\sqrt{3}}b,\zeta=\frac{1}{\sqrt{3}}c.$

相应的 $W=\frac{1}{3\sqrt{3}}abc=\frac{\sqrt{3}}{9}abc$. 当 $\lambda=0$ 时相应的 ξ,η,ζ 得 $W=0$.

因此实际问题存在最大值，所以当 $\xi,\eta,\zeta=(\frac{1}{\sqrt{3}}a,\frac{1}{\sqrt{3}}b,\frac{1}{\sqrt{3}}c)$ 时 W 取最大值 $\frac{\sqrt{3}}{9}abc$.

20. **【考点提示】**利用顺序主子式来判定

【解题分析】二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&\lambda&-1\\ \lambda&4&2\\ -1&2&4\end{bmatrix}$.

二次型 f 正定的充分必要条件是 A 的顺序主子式全为正,

事实上, A 的顺序主子式为: $D_1=1>0$, $D_2=\begin{vmatrix}1&\lambda\\ \lambda&4\end{vmatrix}=4-\lambda^2$,

$$D_3=\begin{vmatrix}1&\lambda&-1\\ \lambda&4&2\\ -1&2&4\end{vmatrix}=-4\lambda^2-4\lambda+8=-4(\lambda-1)(\lambda+2).$$

于是，二次型 f 正定的充分必要条件是 $D_2>0,D_3>0$,

由 $D_2=4-\lambda^2>0$ 得 $-2<\lambda<2$,

由 $D_3=-4(\lambda-1)(\lambda+2)>0$ 得 $-2<\lambda<1$.

于是，二次型 f 正定当且仅当 $-2<\lambda<1$.

21. **【考点提示】**矩阵的特征值和特征向量、对角矩阵、相似矩阵

【解题分析】(Ⅰ)依题意，因为 $A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$,

所以3是矩阵$\boldsymbol{A}$的一个特征值，$\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^T$是$\boldsymbol{A}$属于3的特征向量，
又因为$\boldsymbol{A\alpha_1}=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{A\alpha_2}=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha_2}$，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是矩阵$\boldsymbol{A}$属于$\lambda=0$的特征向量，
所以$\boldsymbol{A}$的特征值是3、0、0，且$\lambda=0$的特征向量为
$k_1(-1,2,-1)^T+k_2(0,-1,1)^T$（$k_1,k_2$是不全为0的常数），
$\lambda=3$的特征向量为$k=(1,1,1)^T$（$k\neq 0$为常数）.
（Ⅱ）由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$不正交，所以要做Schmidt正交化：

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^T,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}-\frac{-3}{6}\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

单位化：$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

令$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 3\end{bmatrix}$.

（Ⅲ）由$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha})=(0,0,3\alpha)$，有

$$\boldsymbol{A}=(0,0,3\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha})^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&3\\0&0&3\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&1\\2&-1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

记$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&1&1\\1&-\frac{1}{2}&1\\1&1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，

则$P^{-1}BP=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}&&\\&-\frac{3}{2}&\\&&\frac{3}{2}\end{bmatrix}$，将其记为$\boldsymbol{\Lambda}_1$，其中$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha})$，

所以$\boldsymbol{B}^6=\boldsymbol{P}\Lambda_1^6\boldsymbol{P}^{-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^6\boldsymbol{PEP}^{-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^6\boldsymbol{E}.$

22.【考点提示】t分布

【解题分析】由题设，Y_1是样本$(X_1+\cdots+X_6)$的样本均值，Y_2是样本(X_7,X_8,X_9)的样本

均值，S^2 是样本 (X_7, X_8, X_9) 的样本方差，

设 $D(x)=\sigma^2, E(x)=\mu$，则 $E(Y_1)=E(Y_2)=\mu$，且有 $D(Y_1)=\frac{1}{6}\sigma^2, D(Y_2)=\frac{1}{3}\sigma^2$，

已知 Y_1 与 Y_2 独立，且 $E(Y_1-Y_2)=0$，

从而 $D(Y_1-Y_2)=\frac{1}{6}\sigma^2+\frac{1}{3}\sigma^2=\frac{1}{2}\sigma^2$，因此 $\frac{Y_1-Y_2}{\sigma/\sqrt{2}} \sim N(0,1)$.

又由正态总体样本方差的性质知 $\chi^2=\frac{2S^2}{\sigma^2}$ 服从自由度为 2 的 χ^2 分布，

因为 Y_1 与 S^2 独立，Y_2 与 S^2 独立，因而 Y_1-Y_2 也与 S^2 独立，

由服从 t 分布的随机变量的结构可知 $Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}=\frac{U}{\sqrt{\chi^2/2}}$ 服从自由度为 2 的 t 的分布.

23. **【考点提示】** X 由二阶行列式表示，实际上是随机变量 X_1、X_2、X_3、X_4 的函数，仍是一个随机变量，且 $X=X_1X_4-X_3X_2$，根据 X_1、X_2、X_3、X_4 独立同分布，有 X_1X_4 与 X_3X_2 独立同分布，因此可先求出 X_1X_4 与 X_2X_3 的分布律，再求 X 的分布律

【解题分析】 记 $Y_1=X_1X_4, Y_2=X_2X_3$，则 $X=Y_1-Y_2$，且 Y_1, Y_2 独立同分布：

$P\{Y_1=1\}=P\{X_1=1, X_4=1\}=P\{X_1=1\}P\{X_4=1\}=0.16=P\{Y_2=1\}$；

$P\{Y_1=0\}=1-P\{Y_1=1\}=0.84=P\{Y_2=0\}$.

$X=Y_1-Y_2$ 的所有可能取值 -1、0、1，且

$P\{X=-1\}=P\{Y_1-Y_2=-1\}=P\{Y_1=0, Y_2=1\}=P\{Y_1=0\}P\{Y_2=1\}=0.84\times 0.16=0.1344$；

$P\{X=1\}=P\{Y_1-Y_2=1\}=P\{Y_1=1, Y_2=0\}=P\{Y_1=1\}P\{Y_2=0\}=0.16\times 0.84=0.1344$；

$P\{X=0\}=1-2\times 0.1344=0.7312$.

于是行列式的概率分布 $X=\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.1344 & 0.7312 & 0.1344 \end{pmatrix}\cdots$