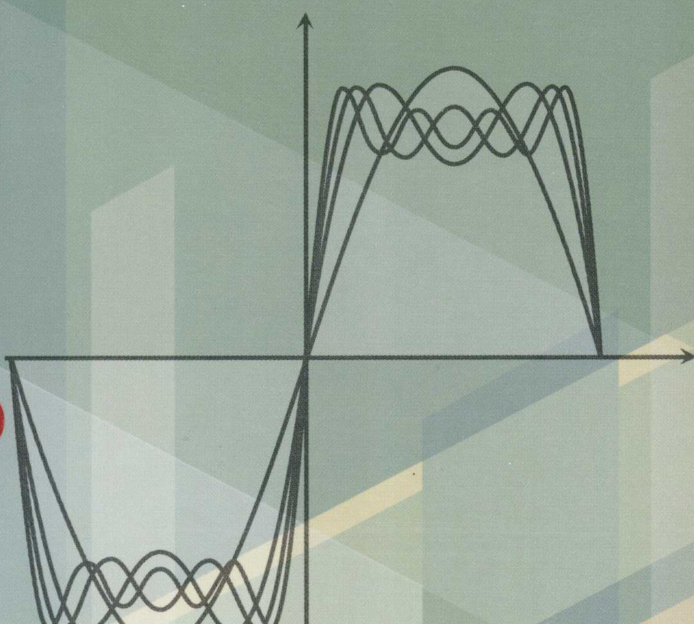
普通高等教育“十二五”规划教材

数学分析教程

（中册）

崔尚斌　编著



科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

数学分析教程

(中册)

崔尚斌　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是供综合性大学和师范院校数学类各专业本科一、二年级学生学习数学分析课程的一部教材，分上、中、下三册．本册为中册，讲授一元函数的积分学和级数理论，内容包括一元函数的定积分及其应用、广义积分、无穷级数、函数序列和函数级数、幂级数和傅里叶级数等．

本书对传统数学分析教材的编排做了一些与时俱进的改革，内容做了适当缩减和增补，除了如传统教材一样重视对基础知识和基本技巧的传授外，也增加了一些分析学的新内容．本书讲解十分清晰、浅显易懂，配有充足的例题和习题，并对数学分析各个组成部分的来龙去脉和历史发展有清楚并且引人入胜的介绍，不仅适合教师课堂讲授，也很适合学生自学使用．

图书在版编目（CIP）数据

数学分析教程．中册/崔尚斌编著．—北京：科学出版社，2013
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-036806-5
Ⅰ．①数…　Ⅱ．①崔…　Ⅲ．①数学分析-高等学校-教材　Ⅳ．①O17
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 037798 号

责任编辑：张中兴／责任校对：包志虹
责任印制：阎　磊／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
化学工业出版社印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2013 年 3 月第　一　版　开本：720×1000 B5
2013 年 3 月第一次印刷　印张：21 1/2
字数：426 000
定价：36.00 元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

目　录

第 7 章

定 积 分

许多应用问题，如平面图形的面积、旋转体的体积、变速直线运动的路程、变力做的功、非均匀杆的质量、非均匀导线上的电荷量等，都可作为“微小量的积累”的极限来计算. 人们由此概括出了微积分理论的另一个重要概念 —— 定积分. 本章讲述定积分理论，包括定积分的定义、性质和计算方法，微积分基本定理，函数可积的达布准则等.

定积分和导数一样，是数学分析中最重要的概念之一. 实际上，数学分析的别名是微积分，后一名称是微分学和积分学的合称. 而积分学，则是指包括定积分在内的所有关于函数积分的理论. 但在关于函数的所有各种形式的积分中，定积分是最基本和最重要的，因为其他形式的积分都是定积分的各种推广并且都必须通过化为定积分来计算. 定积分概念是和导数概念同时形成的，由牛顿和莱布尼茨二人各自独立地提出，因此产生于 17 世纪后半叶. 但其思想的萌芽早在 2500 年前的古希腊时期就已经出现了. 阿基米德 (Archimedes, 公元前 287～ 公元前 212) 继承和发展欧多克索斯的“穷竭法”，推导出了许多平面图形的面积和一些立体的体积公式. 现在来看，阿基米德采用的正是定积分的思想. 一些研究数学史的学者说，读了阿基米德的著作，就不会对积分学的思想感到新奇了. 但另一方面，正像导数的概念在牛顿和莱布尼茨那个时代并不严谨、其严格化是直到一个半世纪之后的柯西和魏尔斯特拉斯时期才完成的一样，牛顿和莱布尼茨在最初提出定积分的概念时，也没能给出这个概念的严格定义. 现在所采用的定积分的定义，是他们离世一个多世纪之后的 1854 年由黎曼给出的. 由于这个原因，定积分又叫黎曼积分.

7.1 定积分的概念和基本性质

7.1.1 定积分概念的引出

许多应用问题，都可作为“微小量的积累”取极限来计算. 下面仅举三例来说明.

1. 平面梯形的面积

几何学的一个基本问题是求平面图形的面积和立体图形的体积. 以平面图形的面积问题为例, 如果这个平面图形是长方形、三角形、四边形或多边形这些以直线段为边的图形, 那么它的面积是很容易计算的. 但是如果这个图形有一些弯曲的边界, 如圆、椭圆、曲边三角形等, 则其面积的计算就没有那么简单了. 在第 2 章一开始已经看到, 即使是对圆这样最简单的以曲线为边界的图形, 其面积的计算都需要使用极限. 可想而知, 其他更复杂图形面积的计算, 也一定需要应用取极限的办法来解决. 下面就应用类似于计算圆面积的穷竭法的思想, 来计算曲边梯形的面积.

曲边梯形是指由四条边围成的平面图形, 其中有一条边是曲线, 其余三条边都是直线, 并且与曲线相邻的两条直边互相平行. 两条互相平行的直边叫做这个曲边梯形的腰, 第三条直边叫做它的底. 在特殊情况下, 两条腰中的一条可退化为一个点, 这时这个曲边梯形也叫做曲边三角形. 也可两条腰都退化为点.

在平面上建立直角坐标系 Oxy, 使得曲边梯形的底边位于 Ox 轴上, 曲边梯形位于上半平面. 设底边占据的区间是 $[a,b]$, 而曲线的方程是 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$, 其中 f 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数 (图 7-1-1).

把区间 $[a,b]$ 划分成一些长度非常小的小区间 $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $\cdots$, $[x_{n-1},x_n]$, 其中

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

这样的一个划分叫做区间 $[a,b]$ 的一个**分割**, 点 x_0, x_1, x_2, $\cdots$, x_{n-1}, x_n 叫做这个分割的**分点**. 在每个小区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上任取一点 ξ_k $(x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k)$, 以 $f(\xi_k)$ 为高、$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ 为底边作矩形, 以这个小矩形的面积近似地代替区间 $[x_{n-1},x_1]$ 上的小曲边梯形的面积 (局部地以直代曲 —— 在区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上, 以通过点 $(\xi_k,f(\xi_k))$ 的水平线代替该区间上小曲边梯形的弯曲的上底边, 如图 7-1-2 所示), 那么所有这些小矩形的面积之和便是曲边梯形面积 S 的近似值

$$S\approx\sigma=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}).$$

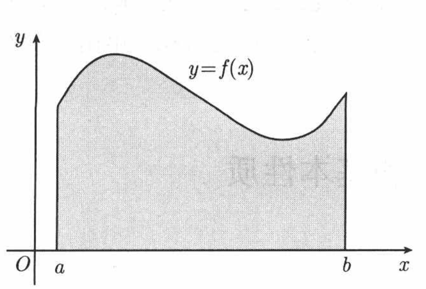


图 7-1-1　曲边梯形的面积

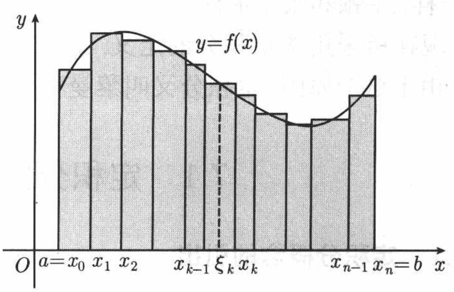


图 7-1-2　以直代曲求面积

显然, 分割作得越细, 即 $\delta=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta x_k$ 越小, 则上述和 σ 越接近曲边梯形的面积 S. 换言之, 随着 $\delta\to 0$, 必有 $\sigma\to S$, 即

$$S=\lim_{\delta\to 0}\sigma=\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.$$

上面所说分割作得细, 必须是小区间的长度都非常小, 亦即 $\delta=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta x_k$ 非常小, 而不是仅分点的个数 n 很大. 如果只是 n 很大而 δ 不小, 则 σ 可能会与曲边梯形的面积 S 相差很大. 例如, 如果取 $x_1=\dfrac{1}{2}(b-a)$, 并取 $x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}$ 为区间 $\left(\dfrac{1}{2}(b-a), b\right)$ 中的点 (取 $x_n=b$), 则无论 n 多么大, 都有可能 σ 与 S 相差很大, 除非点 ξ_1 取得非常特殊, 然而这样特殊的 ξ_1 是非常难取到的.

例 1　求抛物线 $y=x^2$ 与 Oy 轴及直线 $x=a$ $(a>0)$ 所围曲边三角形的面积.

解　把区间 $[0,a]$ 作 n 等分, 则分点为 $x_k=\dfrac{ak}{n}$, $k=0,1,\cdots,n$. 在每个小区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上, 作以此小区间为底边、以曲线 $y=x^2$ 在此小区间的左端点的值 x_{k-1}^2 为高的矩形, 然后把所有这些小矩形的面积相加, 得曲边三角形面积的近似值①

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a}{n}\left(\frac{a(k-1)}{n}\right)^2=\frac{a^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\frac{a^3}{6n^3}n(n-1)(2n-1).$$

显然, 当 $n\to\infty$ 时, 该近似值趋于曲边三角形面积的精确值 S, 即

$$S=\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\frac{a^3}{3}.$$

2. 变速直线运动的路程

设质点做变速直线运动, 速度 v 关于时间 t 的依赖关系是 $v=v(t)$. 在时间段 $[0,T]$ $(T>0)$ 里, 该质点所走过的路程 s 是多少?

类似于曲边梯形面积的求法, 把时间段 $[0,T]$ 作分割, 设分点为 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=T$. 对每个 $1\leqslant k\leqslant n$, 取 $\tau_k\in[t_{k-1},t_k]$, 把时间段 $[t_{k-1},t_k]$ 里质点的运动近似地看成以 $v(\tau_k)$ 为速度的匀速直线运动, 则在这个时间段里质点走过的路程近似地为 $v(\tau_k)(t_k-t_{k-1})$, 因此时间段 $[0,T]$ 里, 质点所走过的路程 s 的近似值为

$$s\approx\sum_{k=1}^{n}v(\tau_k)(t_k-t_{k-1}).$$

---

① $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\sum\limits_{k=1}^{n}k(k-1)+\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{n+1}[k(k-1)(k-2)-(k-1)(k-2)(k-3)]+\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{1}{3}(n+1)n(n-1)+\dfrac{1}{2}n(n+1)=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

记 $\delta=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(t_k-t_{k-1})$. 则当 $\delta\to 0$ 时, 上式的极限就是 s 的精确值, 即

$$s=\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n}v(\tau_k)(t_k-t_{k-1}).$$

例 2 已知自由落体运动是匀加速运动, 即加速度 g (重力加速度) 是常数, 进而速度 $v(t)=gt$. 据此求自由落体在时间段 $[0,T]$ 里所走过的路程 s.

解 把时间段 $[0,T]$ 作 n 等分, 则分点为 $t_k=\dfrac{k}{n}T,\ k=0,1,\cdots,n$. 在每个小时间段 $[t_{k-1},t_k]$ 里, 以质点在此小时间段开始时的速度 $v(t_{k-1})=gt_{k-1}=\dfrac{1}{n}(k-1)gT$ 作近似值, 求得质点在此小时间段里所走过的路程的近似值为 $v(t_{k-1})(t_k-t_{k-1})=\dfrac{1}{n}(k-1)gT\cdot\dfrac{1}{n}T=\dfrac{gT^2}{n^2}(k-1)$, 从而在时间段 $[0,T]$ 里质点所走过的总路程的近似值为

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}v(t_{k-1})(t_k-t_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}\frac{gT^2}{n^2}(k-1)=\frac{gT^2}{n^2}\cdot\frac{1}{2}n(n-1)=\frac{gT^2}{2n}(n-1).$$

令 $n\to\infty$, 得自由落体在时间段 $[0,T]$ 里所走过的路程 s 的精确值

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{gT^2}{2n}(n-1)=\frac{1}{2}gT^2.$$

3. 河流的水流量

河流里水流量每年的变化情况, 是反映气候变化和影响工农业生产的重要信息, 国家必须对此信息有清楚的了解. 流经一条河流每年的水流量, 可以通过在这条河流里选择一些观测点设置水位标尺和流速仪, 再运用与前两例类似的方法计算获得. 设某条河流在某个观测点的横截面如图 7-1-3 所示. 已知该点处河流宽度为 a (m), 水位标尺以下部分横截面的面积为 S_0 (m^2), 测得该点处水位 h (m) 随时间 t (s) 变化的函数关系为 $h=h(t)$, 流经该点的水的流速 v (m/s) 随时间 t 变化的函数关系为 $v=v(t)$, 求在时间段 $[0,T]$ 里, 流经该观测点的总水量 Q (m^3).

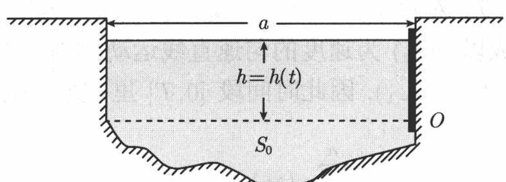


图 7-1-3 河流的横断面

由以上所列条件知, 流经该观测点的水流密度为

$$f(t)=[S_0+ah(t)]v(t)\ \ (\mathrm{m}^3/\mathrm{s})$$

对时间段 $[0,T]$ 作分割, 设分点为 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=T$. 对每个 $1\leqslant k\leqslant n$, 把时间段 $[t_{k-1},t_k]$ 里水的流动近似地看成等流密度的流动, 则在这个时间段里流经该观测点的水的体积为 $f(\tau_k)(t_k-t_{k-1})$, 其中 $\tau_k\in[t_{k-1},t_k]$. 因此在时间段 $[0,T]$ 里, 流经该观测点的水的总体积 Q 的近似值为

$$Q\approx\sum_{k=1}^{n}f(\tau_k)(t_k-t_{k-1}).$$

记 $\delta=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(t_k-t_{k-1})$. 则当 $\delta\to0$ 时, 上式的极限就是 Q 的精确值, 即

$$\begin{aligned}Q&=\lim_{\delta\to0}\sum_{k=1}^{n}f(\tau_k)(t_k-t_{k-1})\\&=\lim_{\delta\to0}a\sum_{k=1}^{n}h(\tau_k)v(\tau_k)(t_k-t_{k-1})+\lim_{\delta\to0}S_0\sum_{k=1}^{n}v(\tau_k)(t_k-t_{k-1}).\end{aligned}$$

7.1.2 定积分的定义

上面介绍的这些例子, 虽然问题的来源不同, 但它们的数学表现形式却都类似, 即已知定义在区间 $[a,b]$ 上的函数 f, 需要先把区间 $[a,b]$ 作分割:

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,\tag{7.1.1}$$

并在每个小区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上取点 ξ_k, 然后作和

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}),\quad \Delta x_k=x_k-x_{k-1}.$$

最后再使 $\delta=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta x_k\to0$ 而求上述和 σ 的极限

$$S=\lim_{\delta\to0}\sigma=\lim_{\delta\to0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.$$

由于这类问题的广泛性, 有必要把这类问题作为一个专门的课题进行研究. 这就引出了函数 f 在区间 $[a,b]$ 上的定积分的概念. 在给出定积分的定义之前, 需要先介绍几个名词和记号.

用符号 Δ 表示区间 $[a,b]$ 的任意一个分割, 即 Δ 是满足条件 (7.1.1) 的一组分点 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n$ 的集合

$$\Delta=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\},\qquad 其中\ a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

记 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $k=1,2,\cdots,n$, 并令 $\|\Delta\|=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta x_k$. $\|\Delta\|$ 叫做分割 Δ 的模; $\|\Delta\|$ 越小, 则称分割 Δ 越精细. 对于从这个分割所得到的每个小区间 $[x_{k-1},x_k]$, 如前

所取的点 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ 叫做**介点**, 它们的集合记作 Ξ, 即 $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$, 称为从属于分割 Δ 的**介点集**, 而和

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

叫做函数 f 对应于分割 Δ 和介点集 Ξ 的**积分和**, 记作 $S(f, \Delta, \Xi)$, 即

$$S(f, \Delta, \Xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

与数列的极限和函数的极限概念类似, 引进积分和的极限的概念.

定义 7.1.1 如果存在与分割 Δ 和介点集 Ξ 无关的实数 I, 使对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都存在相应的 $\delta > 0$, 使当 $\|\Delta\| < \delta$ 时, 都成立

$$|S(f, \Delta, \Xi) - I| < \varepsilon,$$

则称当 $\|\Delta\|$ 趋于零时, 积分和 $S(f, \Delta, \Xi)$ 以 I 为极限, 记作

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} S(f, \Delta, \Xi) = I.$$

当然也可写出积分和 $S(f, \Delta, \Xi)$ 的具体表达式而记作

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = I \quad 或 \quad \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = I.$$

现在便可给出定积分的定义.

定义 7.1.2 设 f 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数. 对区间 $[a, b]$ 的任意分割 Δ 和任意介点集 Ξ, 作 f 的相应的积分和 $S(f, \Delta, \Xi)$. 如果这个积分和在 $\|\Delta\| \to 0$ 时有极限 I (自然,I 应当是与分割 Δ 和介点集 Ξ 无关的实数), 则称函数 f 在区间 $[a, b]$ 上**可积**, 并称极限值 I 为函数 f 在区间 $[a, b]$ 上的**积分**, 记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I.$$

因此

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

因此, 暂时不要考虑函数的可积性问题, 即认为所涉及的函数都是可积的, 那么上面举的三个例子可分别写成

(1) 由曲线 $y = f(x)$ 和 Ox 轴及两条铅直线 $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ 所围曲边梯形的面积是

$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

假设 $f(x) \geqslant 0, \forall x \in [a,b]$;

(2) 速度函数是 $v = v(t)$ 的做变速直线运动的质点, 在时间段 $[0,T]$ 里所走过的路程是

$$s = \int_0^T v(t)\mathrm{d}t;$$

(3) 对于河流的流量问题, 有

$$Q = a\int_0^T h(t)v(t)\mathrm{d}t + S_0\int_0^T v(t)\mathrm{d}t.$$

在积分符号 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 中, f 叫做**被积函数**, $[a,b]$ 叫做**积分区间**, a 和 b 分别叫做定积分的**下限**和**上限**, x 叫做**积分变元**. 需要说明的是, 定积分是一个数, 而不是一个函数, 它只与被积函数 f 以及积分区间 $[a,b]$ 有关, 而与采用什么积分变元没有关系, 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(y)\mathrm{d}y = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \cdots.$$

尽管例 1 和例 2 中, 分割区间的方式和选取的介点都是特殊的, 即分割区间是用等分的方法, 选取的介点都是小区间的左端点, 但这样做只是为了计算的方便. 在定义定积分的概念时, 必须要求分割区间的方式是任意的, 并且介点的选取也是任意的. 换言之, 只有对任意的分割 Δ 和任意的介点集 $\varXi$, 由 $\|\Delta\| \to 0$ 能够推得 $S(f,\Delta,\varXi) \to I$ 时, 才说函数 f 是可积的并且它的积分是 I; 如果不做这样的要求, 就不能得到一个合理的定义. 例如, 考虑定义在区间 $[0,1]$ 上的狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 是有理数}, \\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数}, \end{cases}$$

(狄利克雷, Peter Gustav Lejeune-Dirichlet, 1805~1859, 德国人). 如果如例 1 和例 2 那样, 把区间 $[0,1]$ 作 n 等分并且取介点为小区间的左端点, 那么得到的积分和是

$$\sum_{k=1}^n D(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n 1\cdot(x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = 1;$$

而如果取区间 $[0,1]$ 的分割使得除 $x_0 = 0$ 之外的其他分点都是无理数, 并取介点为小区间的左端点, 或者虽然把区间 $[0,1]n$ 等分, 但取每个小区间中的介点为该区间中的无理数, 那么得到的积分和将是

$$\sum_{k=1}^n D(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = 1\cdot(x_1 - x_0) + \sum_{k=2}^n 0\cdot(x_k - x_{k-1}) = x_1 - x_0 = x_1,$$

或者

$$\sum_{k=1}^{n} D(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0.$$

显然按第一种方法作的积分和, 在分割的模 $\|\Delta\|$ 趋于零时以 1 为极限, 而按第二和第三种方法作的积分和, 在 $\|\Delta\|$ 趋于零时以 0 为极限. 因此, 如果不对分割 Δ 和介点集 Ξ 做任意性的要求, 那么对狄利克雷函数, 是该以 1 作为它在区间 $[0,1]$ 上的定积分呢, 还是以 0 作为它在该区间上的定积分? 只能把像狄利克雷函数这样出现以上现象的函数置于我们的讨论对象之外. 这样在作定积分的定义时, 要求分割 Δ 和介点集 Ξ (特别是后者) 都必须是任意的.

如果对一个函数 f, 当分割的模 $\|\Delta\|$ 趋于零时, 积分和 $S(f, \Delta, \Xi)$ 没有极限, 就称 f **不可积**. 因此, 狄利克雷函数是不可积的函数.

定积分的概念最早是由牛顿和莱布尼茨各自独立地引进的. 但是正如他们在引进导数的概念时并没有给出导数的严格定义一样, 在引进定积分的概念时他们也没有给出这个概念的严格定义, 原因在于当时还没有极限的概念. 定积分的上述严格定义是由黎曼在 19 世纪中叶给出的. 1902 年, 法国数学家勒贝格 (Henri Lebesgue, 1875~1941) 为了解决可积函数列的极限函数的可积性等问题, 提出了一种新的积分理论. 为区别勒贝格引进的这种新的积分, 人们便把按定义 7.1.1 和定义 7.1.2 给出的定积分叫做**黎曼积分**, 相应的可积函数叫做**黎曼可积函数**; 而把由勒贝格定义的积分叫做**勒贝格积分**, 相应的可积函数叫做**勒贝格可积函数**. 本书讨论的积分都是黎曼积分, 所说的可积函数都是黎曼可积函数. 至于勒贝格积分, 将在后续课程实变函数中专门讨论.

7.1.3 定积分的基本性质

从定义 7.1.1 看到, 积分和的极限与数列的极限、函数的极限既有差别, 又很类似, 在性质上有很多相似之处. 因此, 下面推导定积分的基本性质时直接应用, 而不再重复其与数列的极限、函数的极限的相应性质完全类似的证明.

定理 7.1.1 (可积函数必有界) 如果 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则它必在 $[a,b]$ 上有界.

证明 (反证法) 假设 f 在区间 $[a,b]$ 上无界. 我们来构作 f 的一个积分和 $S(f, \Delta, \Xi)$, 它对应分割的模 $\|\Delta\|$ 可以任意小, 但对适当选择的介点集 Ξ, $|S(f, \Delta, \Xi)|$ 却能任意大.

对任意给定的正整数 n, 把区间 $[a,b]$ n 等分, 记分点为 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. 令 $\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$. 显然, $\|\Delta\| = \dfrac{b-a}{n}$, 因此, 只要 n 充分大, $\|\Delta\|$ 就充分小. 由于 f 在区间 $[a,b]$ 上无界, 所以它必在 n 个小区间 $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\cdots$, $[x_{n-1}, x_n]$ 中的某一个上无界, 设为 $[x_{k_0-1}, x_{k_0}]$. 任意取定其他小区间 $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\cdots$, $[x_{k_0-2}, x_{k_0-1}]$, $[x_{k_0}, x_{k_0+1}]$, $\cdots$, $[x_{n-1}, x_n]$ 中的介点 ξ_1, ξ_2, $\cdots$, ξ_{k_0-1}, ξ_{k_0+1}, $\cdots$, ξ_n, 下面特别地选取小区间 $[x_{k_0-1}, x_{k_0}]$ 中的介点 ξ_{k_0}, 使得积分和

$S(f,\Delta,\Xi)$ 的绝对值大于任意给定的正数 M.

事实上, 当给定 $M>0$ 后, 由于 f 在 $[x_{k_0-1},x_{k_0}]$ 上无界, 所以必存在 $\xi_{k_0}\in[x_{k_0-1},x_{k_0}]$, 使得

$$|f(\xi_{k_0})|>\frac{\left|\displaystyle\sum_{k\neq k_0}f(\xi_k)\Delta x_k\right|+M}{\Delta x_{k_0}}.$$

这样就有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\right|\geqslant|f(\xi_{k_0})|\Delta x_{k_0}-\left|\sum_{k\neq k_0}f(\xi_k)\Delta x_k\right|>M.$$

而这是与 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ 在 $\|\Delta\|$ 趋于零时有极限相矛盾的. 因此, 如果 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则它必在 $[a,b]$ 上有界. 证毕.

定理 7.1.2 (定积分的线性性) 如果 f 和 g 都在 $[a,b]$ 上可积, 则对任意实数 α 和 β, $\alpha f+\beta g$ 也在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b\Big(\alpha f(x)+\beta g(x)\Big)\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证明 记 $I_1=\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $I_2=\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. 设 $\Delta=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\}$ 是区间 $[a,b]$ 的任意一个分割, $\Xi=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$ 是任意一个相应的介点集. 则由 $I_1=\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 和 $I_2=\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 可知

$$\lim_{\|\Delta\|\to0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=I_1,$$

$$\lim_{\|\Delta\|\to0}\sum_{k=1}^{n}g(\xi_k)\Delta x_k=I_2.$$

因此, 类似于数列极限和函数极限的线性性质, 有

$$\lim_{\|\Delta\|\to0}\sum_{k=1}^{n}\Big(\alpha f(\xi_k)+\beta g(\xi_k)\Big)\Delta x_k=\lim_{\|\Delta\|\to0}\left(\alpha\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k+\beta\sum_{k=1}^{n}g(\xi_k)\Delta x_k\right)$$

$$=\alpha\lim_{\|\Delta\|\to0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k+\beta\lim_{\|\Delta\|\to0}\sum_{k=1}^{n}g(\xi_k)\Delta x_k=\alpha I_1+\beta I_2.$$

所以函数 $\alpha f+\beta g$ 也在 $[a,b]$ 上可积, 且 $\displaystyle\int_a^b\Big(\alpha f(x)+\beta g(x)\Big)\mathrm{d}x=\alpha I_1+\beta I_2$. 证毕.

定理 7.1.3 (定积分的区间可加性) 如果 f 在 $[a,b]$ 和 $[b,c]$ 上都可积, 其中 $a<b<c$, 则 f 也在 $[a,c]$ 上可积, 且

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 由定理 7.1.1 知 f 在 $[a,b]$ 和 $[b,c]$ 上都有界, 所以它也在 $[a,c]$ 上有界. 设

$$|f(x)| \leqslant M, \quad \forall x \in [a,c].$$

记 $I_1 = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $I_2 = \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$. 由 $I_1 = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 知, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的 $\delta_1 > 0$, 使对 $[a,b]$ 的任意分割 $\Delta_1 = \{x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_{l-1}^{(1)}, x_l^{(1)}\}$ 和任意相应的介点集 $\varXi_1 = \{\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \cdots, \xi_l^{(1)}\}$, 只要 $\|\Delta_1\| < \delta_1$, 就有

$$\left|\sum_{k=1}^{l} f(\xi_k^{(1)})\Delta x_k^{(1)} - I_1\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

同理, 由 $I_2 = \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$ 知, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的 $\delta_2 > 0$, 使对 $[b,c]$ 的任意分割 $\Delta_2 = \{x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_{m-1}^{(2)}, x_m^{(2)}\}$ 和任意相应的介点集 $\varXi_2 = \{\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \cdots, \xi_m^{(2)}\}$, 只要 $\|\Delta_2\| < \delta_2$, 就有

$$\left|\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k^{(2)})\Delta x_k^{(2)} - I_2\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

现在令 $\delta = \min\left\{\delta_1, \delta_2, \frac{\varepsilon}{9M}\right\}$. 下面证明: 对区间 $[a,b]$ 的任意一个分割 $\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$ 和任意一个相应的介点集 $\varXi = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$, 只要 $\|\Delta\| < \delta$, 就有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - (I_1 + I_2)\right| < \varepsilon.$$

事实上, 如果 b 是一个分点, 即 $b \in \Delta$, 设 $b = x_{k_0}$, 则 $\Delta_1 = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{k_0-1}, x_{k_0}\}$ 是区间 $[a,b]$ 的一个分割, $\Delta_2 = \{x_{k_0}, x_{k_0+1}, x_{k_0+2}, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$ 是区间 $[b,c]$ 的一个分割, 而且显然 $\|\Delta_1\| \leqslant \|\Delta\| < \delta \leqslant \delta_1$, $\|\Delta_2\| \leqslant \|\Delta\| < \delta \leqslant \delta_2$, 所以有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - (I_1 + I_2)\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{k_0} f(\xi_k)\Delta x_k - I_1\right| + \left|\sum_{k=k_0+1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - I_2\right| < \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

如果 b 不是一个分点, 把 b 增加到分割 Δ 得一新的分割 Δ', 并相应地在介点集 $\varXi$ 中增加介点得一新的介点集 $\varXi'$. 用 x_0', x_1', x_2', $\cdots$, x_n', x_{n+1}' 表示分割 Δ' 的全体分点, 用 ξ_1', ξ_2', $\cdots$, ξ_{n+1}' 表示介点集 $\varXi'$ 中的全部介点. 则根据已证明的结论有

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} f(\xi_k')\Delta x_k' - (I_1 + I_2)\right| < \frac{2}{3}\varepsilon.$$