高等学校工科数学系列丛书

线性代数与空间解析几何

主 编 范崇金 王 锋

HEUP 哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

线性代数与空间解析几何

主　编　范崇金　王　锋

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书满足工科线性代数课程(包括考研大纲)的要求,内容包括行列式、空间解析几何概要、线性方程组、矩阵、向量组与向量空间、方阵的特征值与特征向量、方阵的对角化、实对称阵与二次型、线性空间、线性代数应用举例,并简要介绍了 MATLAB 的使用。本书结构严谨、逻辑清晰、简明扼要、例题典型、习题经典;书后有习题答案;难题有提示;配有学习指导。本书可作为工科院校本科生线性代数教材。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与空间解析几何/范崇金,王锋主编. —哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2011.8

ISBN 978-7-5661-0226-3

Ⅰ.①线… Ⅱ.①范… ②王… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材②立体几何:解析几何-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2 ②O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 166962 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 肇东市一兴印刷有限公司
开　　本 787 mm×960 mm 1/16
印　　张 15.25
字　　数 323 千字
版　　次 2011 年 8 月第 1 版
印　　次 2011 年 8 月第 1 次印刷
定　　价 31.00 元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

高等学校工科数学系列丛书编审委员会

前　　言

本书为工科线性代数教材，其首先覆盖了教育部工科线性代数课程的基本要求，也覆盖了全国工科研究生入学考试要求，本教材的基本学时为64学时。与传统线性代数教材的几个不同之处：(1)将传统工科微积分(高等数学)中的空间解析几何一章加到本书中，一是因为空间解析几何与微积分没有必然的逻辑联系，二是空间解析几何的空间向量部分又是线性代数中抽象向量理论极好的几何模型；(2)为使线性代数课程满足更高的要求，本书增加了数域上线性空间一章；(3)为使线性代数课程更有工科特色，消除线性代数仅仅是一套枯燥符号系统的现象，也为增加学生的学习兴趣，本书增加了线性代数应用一章；(4)在当今，数学的应用在很大程度上是通过电脑软件实现的，本书增加了 MATLAB 的应用部分。

本书由哈尔滨工程大学基础数学教学中心组织编写，第1章由吴红梅编写，第2章由朱磊编写，第3章由王珏编写，第4章由张戌希编写，第5章由葛斌编写，第6章由孙巍编写，第7章由凌焕章编写，第8章由刘献萍编写，第9章由林蔚编写，第10章由王立刚编写。本书由范崇金、王锋统稿。

在本书的编写过程中，得到了哈尔滨工程大学理学院广大老师的帮助以及哈尔滨工程大学出版社的大力支持，在此一并表示诚挚的谢意。由于我们水平有限，不当之处在所难免，欢迎广大师生提出宝贵建议。

哈尔滨工程大学基础数学教学中心

《线性代数与空间解析几何》编写组

2011年6月25日

目　录

第1章　行　列　式

线性代数起源于解线性方程组,人们在准确地阐述线性方程组的可解性与解的结构时,引入了行列式和矩阵;而行列式和矩阵本身也成了线性代数的重要组成部分. 这样,线性方程组、行列式和矩阵就构成了线性代数的重要基础部分.

本章的主要内容:

(1) 行列式的定义;

(2) 行列式的性质;

(3) 行列式的计算;

(4) 克莱姆法则.

1.1　二阶行列式和三阶行列式

1. 二阶行列式

引例1　解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & \text{①} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & \text{②} \end{cases}$$

解　①$\times a_{22}$ - ②$\times a_{12}$得到$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$

②$\times a_{11}$ - ①$\times a_{21}$得到$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,得

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

从未知数解的右端来看,分子、分母均为四个数分两对相乘再相减而得. 为了便于记忆,我们引入**二阶行列式**.

定义1.1　二阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$定义为 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

可用 D 表示,其中 a_{ij}称为行列式的**元素**,元素 a_{ij}的第一个下标 i 称为行标,表示该元素位于第 i 行,第二个下标 j 称为列标,表示该元素位于第 j 列.

同理,可令

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - a_{12} b_2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - b_1 a_{21}$$

若 $D \neq 0$,则方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

例 1.1 解方程组

$$\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 4 \times 1 = 2$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 4 \times 2 = -5$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 1 \times 1 = 3$$

所以

$$x = \frac{D_1}{D} = -\frac{5}{2}, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{3}{2}$$

2. 三阶行列式

引例 2 解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & ② \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & ③ \end{cases}$$

为了得出关于三元线性方程组类似解的表达式,我们引入三阶行列式的定义.

定义 1.2 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \equiv a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

通过类似于二元线性方程组的消元法及行列式表示,可以得到三元线性方程组的解法,若三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

则可得到方程组的唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}$$

证明 在方程①,②中视 x_3 为常数去解 x_1 和 x_2 得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\cdot x_1=\begin{vmatrix} b_1-a_{13}x_3 & a_{12}\\ b_2-a_{23}x_3 & a_{22}\end{vmatrix} \qquad ④$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\cdot x_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1-a_{13}x_3\\ a_{21} & b_2-a_{23}x_3\end{vmatrix} \qquad ⑤$$

方程③两边同乘$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$,再将④,⑤两式代入,化简得到

$$\left(a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}-a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}+a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\right)x_3=a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & b_1\\ a_{22} & b_2\end{vmatrix}-a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}+b_3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

这就是 $D\cdot x_3=D_3$ 从而

$$x_3=\frac{D_3}{D}$$

同理,可得另外两式

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}$$

在此,我们自然会猜到以上的公式能够一般化,但这要定义四阶和四阶以上的行列式. 这正是下一节的内容.

三阶行列式可按图 1.1 所示的**对角线法则**计算.

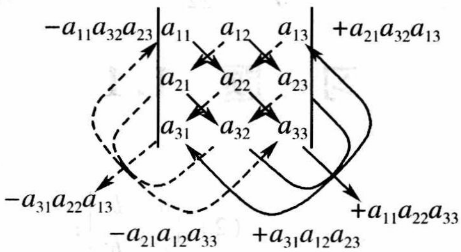

图 1.1

评注:虽然用对角线法则计算二、三阶行列式,既直观又快捷,可惜对于高于三阶的行列式,对角线法则就不再适用了.

例 1.2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{vmatrix}$$

解 由对角线法则,有

$$D=1\times2\times2+(-2)\times1\times3+2\times0\times3-3\times2\times3-(-2)\times2\times2-1\times0\times1=-12$$

例 1.3 解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=1\\ 3x_1+5x_2+2x_3=8\\ x_1-2x_2-3x_3=-1\end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 3 & 5 & 2\\ 1 & -2 & -3\end{vmatrix}=22\neq0$$

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 8 & 5 & 2\\ -1 & -2 & -3\end{vmatrix}=66$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 8 & 2\\ 1 & -1 & -3\end{vmatrix}=-22$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 5 & 8\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=44$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{66}{22}=3,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-22}{22}=-1,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{44}{22}=2$$

习 题 1.1

1. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix}a & b\\ a^2 & b^2\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix}1 & a & b\\ 0 & 2 & c\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;　　(6) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$.

2. 利用行列式解下列方程组:

(1) $\begin{cases} 5x+2y=3 \\ 4x+2y=1 \end{cases}$;　　(2) $\begin{cases} 2x-4y+z=1 \\ x-5y+3z=2. \\ x-y+z=-1 \end{cases}$

3. 验证下列等式,并归纳出三阶行列式的性质:

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+ka_1 & b_2+kb_1 & c_2+kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} a_1+x_1 & b_1+y_1 & c_1+z_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

4. 令 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,化简下列两式,并找出规律:

(1) $a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$;

(2) $a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

1.2 排　　列

1. 全排列及其逆序数

n 元排列：由自然数 $1,2,\cdots,n$ 构成的不重复全排列称为(一个) **n 元排列**. 一切 n 元排列的集合记为 A_n，A_n 中有 $n!$ 个元素.

例如 $A_2=\{12,21\}$，　$A_3=\{123,132,213,231,312,321\}$.

在 n 元排列中规定 $123\cdots(n-1)n$ 为**标准排列(自然排列)**.

排列的逆序数：在一个 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，如果两个数的先后次序与标准排列不同，则这两个数构成一个**逆序**，一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的**逆序数**，记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$. 即对于 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$，若比 p_i 大的且排在 p_i 前面的数有 t_i 个 $(i=1,2,\cdots,n)$，则 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数为

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n$$

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例 1.4　求排列 451326 的逆序数，并判断排列的奇偶性.

解　在排列 451326 中，4 排在首位，其逆序数 $t_1=0$；

5 的前面比 5 大的数没有，其逆序数 $t_2=0$；

1 的前面比 1 大的数有 4 和 5，其逆序数 $t_3=2$；

3 的前面比 3 大的数有 4 和 5，其逆序数 $t_4=2$；

2 的前面比 2 大的数有 4,5,3，其逆序数 $t_5=3$；

6 是最大的数，前面比 6 大的数没有，其逆序数 $t_6=0$.

则此排列的逆序数 $\tau(451326)=0+0+2+2+3+0=7$，此排列为奇排列.

例 1.5　求排列 $n(n-1)\cdots21$ 的逆序数.

解　元素 $n,n-1,\cdots,2,1$ 的逆序数依次为 $t_1=0,t_2=1,t_3=2,\cdots,t_{n-1}=n-2,t_n=n-1$. 所以 $\tau(n(n-1)\cdots21)=0+1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

2. 对换

对换：在一个排列中对调其中的两个数字，而保持其余的数字不变，这种过程称为**对换**；对换两个相邻的数字称为**相邻对换**.

命题 1.1　若 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)=t$，则经过 t 次相邻对换，可将排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 调成 $12\cdots n$.

证明　设数字 i 前面有 t_i 个数比 i 大，则 $t=t_1+t_2+\cdots+t_n$. 1 经过 t_1 次相邻对换调到首位，而这并不改变 $t_i(i=2,3,\cdots,n)$；2 经过 t_2 次相邻对换调到第 2 位；依此类推，最终排列

$p_1p_2\cdots p_n$ 经过 $t_1+t_2+\cdots+t_n$ 次,即 t 次相邻对换调成了排列 $12\cdots n$.

命题1.2 对换改变原来排列的奇偶性.

证明 若对换排列的两个相邻的数,排列的逆序数加1或减1,则奇偶性改变. 现设排列

$$a_1\cdots a_ipb_1\cdots b_jqc_1\cdots c_k \qquad ①$$

对换 p,q 两数后调为排列

$$a_1\cdots a_iqb_1\cdots b_jpc_1\cdots c_k \qquad ②$$

这个过程可分解为:排列①先经过 $j+1$ 次相邻对换调为排列

$$a_1\cdots a_ib_1\cdots b_jqpc_1\cdots c_k \qquad ③$$

排列③再经过 j 次相邻对换调为排列②. 因而排列①经过 $2j+1$ 次相邻对换调为排列②. 再由证明的前一部分知排列①和排列②的奇偶性相反.

推论 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数,偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

证明 由命题1.2知对换的次数就是排列奇偶性的改变次数,而标准排列是偶排列,则推论成立.

习 题 1.2

1. 求下列排列的逆序数,并判断其奇偶性:

(1) 4132; (2) 14325;

(3) $n(n-1)\cdots 21$; (4) $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$.

2. 选择i和j使

(1) 3i4625j7 为奇排列;

(2) 29i146j73 为偶排列.

1.3 n 阶行列式

1. 三阶行列式的特点

本节我们要定义任意 n 阶行列式,为此我们观察三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

的特点:

(1) 行列式为3! 个单项式的和,每个单项式为 $\pm a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$;

(2) 排列 $p_1p_2p_3$ 取遍1,2,3的所有全排列;

(3) 当排列 $p_1p_2p_3$ 为 123,231,312 时,单项式的系数为 +1;当排列 $p_1p_2p_3$ 为 321,213,132 时,单项式的系数为 -1. 计算知 123,231,312 都为偶排列,而 321,213,132 都是奇排列,因此各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^{\tau}$,其中 τ 为列标排列的逆序数.

根据这些特点,三阶行列式的展开式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3 \in A_3} (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$$

其中 $\tau(p_1p_2p_3)$ 是排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数, $\sum\limits_{p_1p_2p_3 \in A_3}$ 表示对所有的三阶排列求和.

类似的,我们把三阶行列式推广到 n 阶行列式.

2. n 阶行列式的定义

定义 1.3 对给定的 $n \times n$ 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$,我们称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n \in A_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

为 n **阶行列式**,也可简记为 $|a_{ij}|_n$;称 a_{ij} 为行列式(第 i 行第 j 列)的**元素**.

评注: $|a_{ij}|_n$ 是一个数值,在定义上它是 $n!$ 项单项式的和,其中一般项 $\pm a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 的每个因子来自此行列式的不同的行和不同的列.

命题 1.3 上三角行列式(当 $i>j$ 时, $a_{ij}=0$)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证明 由定义,在此行列式的一般项 $\pm a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 中,若 $p_n \neq n$,则 $a_{np_n}=0$,此项为 0. 在 $\pm a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{n-1,p_{n-1}} a_{nn} (p_{n-1} \leqslant n-1)$ 中,若 $p_{n-1} \neq n-1$,此项也为 0. 如此继续下去,此行列式的定义式中仅留下了 $(-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,命题成立.

评注: (1) 同样可以证明,下三角行列式(当 $i<j$ 时, $a_{ij}=0$)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) 对角行列式(当 $i \neq j$ 时, $a_{ij}=0$)

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

定理 1.1　行列式和它的转置行列式相等,即设行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $D=D'$.

证明　左边的行列式记为 $D=|a_{ij}|_n$,右边的行列式记为 $D'=|b_{ij}|_n$,$b_{ij}=a_{ji}$则

$$D'=|b_{ij}|_n=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$$

将 $a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$等值改写为 $a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$时,前者的行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 被调成排列 $12\cdots n$;同时,其列标排列 $12\cdots n$ 被调成排列 $q_1q_2\cdots q_n$. 由于两个调换过程是同步进行的,故所用相邻对换的个数相同,再由命题 1.1 知

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=\tau(q_1q_2\cdots q_n)$$

又当 $p_1p_2\cdots p_n$ 取遍一切 n 元排列后,相应的 $q_1q_2\cdots q_n$ 也取遍一切 n 元排列,从而

$$D'=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}=\sum(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}=|a_{ij}|_n=D$$

评注:此定理说明行列式的行和列具有同等的地位;对于行列式的行有什么结论,对于列也有相同的结论.

习　题　1.3

1. 确定下列五阶行列式的项所带的符号:

(1) $a_{12}a_{23}a_{31}a_{45}a_{54}$;

(2) $a_{25}a_{32}a_{14}a_{43}a_{51}$.

2. 写出 5 阶行列式 $|a_{ij}|_5$ 的展开式中含有 a_{11} 和 a_{23} 的所有带负号的项.

3. 用定义计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & & a_{1n} \\ & \iddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$;