时代教育

教辅类图书著名品牌

名校大课堂

根据新大纲及人教版最新教材编写

全国十所名校同步导学

高二数学

本书主编 李士欣 李清娟

南北名校强强联合 特级教师随堂解题

学法解法立体指导 典题秘题同步传真

机械工业出版社

全国十所名校同步导

名校大课堂

高二数学

[配套最新修订版教材]

编　　委　北京师范大学附属实验中学
数学特级教师　马成瑞
中国人民大学附中化学特级教师　李新黔
首都师范大学附中数学特级教师　韩新生
天津耀华中学语文高级教师　陈桂芬
河北省石家庄一中语文特级教师　刘志忠
河北省石家庄一中化学特级教师　邱飞洲
江苏省苏州中学数学特级教师　夏　炎
江苏省启东中学政治高级教师　杨正杰
安徽省安庆市一中物理特级教师　谷寿平
江西师范大学附中英语特级教师　潘祖英
山东省实验中学数学高级教师　韩相河

本书主编　李士欣　李清娟
副 主 编　梁书果　冯津爽　李书斤
编　　著　李士欣　李清娟　梁书果　冯津爽　李书斤
周彦霞　万建玲　刘宏明　高建英　霍文明

机械工业出版社

本书是依据教育部颁布的课程标准和人教版最新教材编写的同步辅导书。它紧跟教学与考试形势，采集名校名师多年积累起来的学习方法和解题思路，紧跟高考改革形势，总结了历年高考题型。

全书依据课本单元顺序编写。每节之下均设有重点难点突破、名师随堂解题、名校最新秘题（附答案与提示）三个板块。每章后均有本章知识结构与学法指导、本章综合训练（附答案与提示及配分）。本书可供高中师生配合课本同步学习使用。

图书在版编目（CIP）数据

名校大课堂. 高二数学/李士欣，李清娟主编. —北京：机械工业出版社，2003.6

（全国十所名校同步导学）

ISBN 7-111-02977-1

I. 名… II. ①李… ②李… III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 049345 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

策　　划：邝　鸥　　潘海鸥

责任编辑：于奇慧　　版式设计：郑文斌

封面设计：鞠　杨　　责任印制：路　琳

北京蓝海印刷有限公司印刷 • 新华书店北京发行所发行

2003 年 6 月第 2 版第 1 次印刷

880mm×1230mm 1/32 • 13.25 印张 • 484 千字

定价：17.00 元

携手走进名校大课堂

（代前言）

名校名师，打造“名校大课堂”

近年来，随着素质教育呼声的日渐高涨及教育改革的不断深化，一批实力雄厚、成就斐然的重点中学渐渐“浮出水面”。它们长期在本地的中、高考大战中稳拔头筹；它们培养了一个又一个中考、高考“状元”。一流的教师队伍，一流的教学体系，一流的训练方法，这些也许就是它们屡战屡胜的“秘笈”。从“推广名校经验，普及精英教育”的理念出发，我们组织了北京师范大学附属实验中学、中国人民大学附中、首都师范大学附中、天津耀华中学、河北省石家庄一中、江苏省苏州中学、江苏省启东中学、安徽省安庆市一中、江西师范大学附中、山东省实验中学等 10 所全国著名重点中学的资深特、高级教师，编写了这套包括初中、高中各学科，供中学生课前预习、随堂练习、课后复习的“名校大课堂·全国十所名校同步导学”丛书。

三个特点，树立“名校大课堂”“双高双新双紧跟”的品牌

起点高　要求高　本丛书的编写宗旨是：“弘扬名校精神，传播名校经验，奉献名校真题”。在十几位编委的主持下，来自重点中学教学第一线的 100 多位特、高级教师集思广益，精诚合作，制定了本丛书科学、严谨的编写体例和内容要求，进而宵衣旰食，殚精竭虑，如期拿出了高质量的书稿。在这里，简明透彻的重难点介绍，独具特色的例题评析，经典实用的训练题的遴选，无不浸透着众多教师孜孜以求的汗水。名校的高起点、高要求在这里得到充分的体现。

版本新　知识新　本丛书依据教育部颁布的各学科课程标准，以及经全国中小学教材审定委员会 2003 年审查通过的人教版最新初、高中教材编写。新标准，新教材，新思路，新题型，品质自然不凡。

紧跟教学与考试新形势　紧跟教育改革新动向　本丛书在新的教育改革精神指导下，采集名校名师多年积累起来的学习方法和解题思路，科学提炼，科学组合，使之贯穿全丛书每一分册。并且，紧跟中考、高考改革形势，总结历年中考、高考题型，尤其是深入分析近年来全国各地中考试卷和全国各种高考试卷，群策群力，携手攻关，对下一年度中考及高考方向、特点乃至题型，都作了科学预测。其中不乏许多前瞻精辟之见。

三大板块，凸显“名校大课堂”优良品质

本丛书依据课本章节顺序编写。每节（课）之下，设有**重点难点突破**、**名师随**

堂解题、名校最新秘题三大板块。

重点难点突破 在对本节知识整体把握的基础上，将其中的学习重点、难点提炼出来，深入分析，精心讲解。讲解中强调深入浅出，准确实用。对重点，着重谈需注意和强调之处；对难点，指出其难在何处，提示应如何克服，具有很强的针对性。

名师随堂解题 通过对不同形式、不同风格例题的解析，帮助学生掌握分析、解决各种试题的基本能力。[基础题]、[易错题]、[创新题]、[名校模拟题与高考题]各有侧重，其中的**导析**、**错误原因分析**等言简意赅，一语中的。在例题的安排上，既强调“基础”和“同步”，又兼顾“综合”与“发散”，题型多样，难度深浅结合。为便于学生使用，我们在例题前标出了代表难易程度的 1～3 级星号，具有很强的实用性。

名校最新秘题 集 10 所重点中学多年复习、应考的经验，选取其历年经典试卷试题，分类列出，从基础、综合两个层面对学生进行整体培训。试题经众人遴选，专家把关，具有一定的典型性和代表性。

由于横跨语文、数学、英语、物理、化学、政治、历史、地理、生物数科，我们从各学科实际出发，在体例结构的设置中向该学科作了适当倾斜，以使之更加适合学生需要。

参加本书编写的还有：杨春辉、路清倩、赵旭辉、邢春辉、左海潮、孙引路等。

本丛书在编写过程中，得到了各参编学校的大力支持；丛书的统稿工作亦得到了有关专家的协助，在此特致谢忱！

丛书编委会

2003 年 6 月

目　　录

注：每节均包含重点难点突破、名师随堂解题、名校最新秘题三个板块。

第六章 不 等 式

6.1 不等式的性质

重点难点突破

不等式的性质是本章的理论基础，它包括实数大小与实数运算的关系及不等式的八个定理、三个推论.

实数大小比较的定义，是比较法证明不等式的基础.

1. 实数大小比较的定义

$a-b>0 \Leftrightarrow a>b$；$a-b=0 \Leftrightarrow a=b$；$a-b<0 \Leftrightarrow a<b$

上述三式左边是实数运算性质，右边反映的是实数大小顺序，合起来反映了实数的运算性质和大小顺序间的关系，它是本章的理论基础，是解不等式和证明不等式的依据.

2. 不等式的性质

定理 1 （对称性或反身性） $a>b \Leftrightarrow b<a$

定理 2 （传递性） $\left.\begin{matrix} a>b \\ b>c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a>c$

定理 3 （加法性质） $\left.\begin{matrix} a>b \\ c\in \mathbf{R} \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+c>b+c$

推论 $\left.\begin{matrix} a>b \\ c>d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+c>b+d$

说明：①定理 3 是不等式移向法则的基础.

②定理 3 推论是同向不等式相加法则的依据．它还可以推广到任意有限个同向不等式的两边分别相加，所得不等式与原不等式同向.

定理 4 （乘法性质） $\left.\begin{matrix} a>b \\ c>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac>bc$

推论 1 $\left.\begin{matrix} a>b>0 \\ c>d>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac>bd$　　推论 2 $\left.\begin{matrix} a>b>0 \\ n\in \mathbf{N}^* \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^n>b^n$

定理 5 (开方性质) $\left.\begin{matrix} a>b>0 \\ n\in \mathbf{N}^* \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$

名师随堂解题

基础题

★例 1 $a>b$，$ab>0$，试比较$\dfrac{1}{a}$与$\dfrac{1}{b}$大小.

思路：比较$\dfrac{1}{a}$与$\dfrac{1}{b}$的大小，依实数大小比较定义，只需考查它们的差$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$的符号即可.

解：$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{b-a}{ab}$

由已知$a>b$，$ab>0$，则$b-a<0$，$\dfrac{b-a}{ab}<0$，即$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$

说明：①同号两数的顺序关系与其倒数的顺序关系相反.

②引申：若$a>b$，比较$\dfrac{1}{a}$与$\dfrac{1}{b}$的大小.

★★例 2 对于实数 a、b、c，判断下列命题的真假：

(1) 若$a>b$，则$ac<bc$；

(2) 若$a>b$，则$ac^2>bc^2$；

(3) 若$ac^2>bc^2$，则$a>b$；

(4) 若$a<b<0$，则$a^2>ab>b^2$；

(5) 若$a<b<0$，则$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$；

(6) 若$a<b<0$，则$\dfrac{b}{a}>\dfrac{a}{b}$；

(7) 若$a<b<0$，则$|a|>|b|$；

(8) 若$a<b<0$，则$\dfrac{b}{a}<1$；

(9) 若$c>a>b>0$，则$\dfrac{a}{c-a}>\dfrac{b}{c-a}$；

(10) 若$a>b$，$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$，则$a>0$，$b<0$.

思路：这一组命题主要考查不等式的性质及性质定理的条件与结论.

解：(1) 因 c 的正负或是否为零未知，无法判断 ac 与 bc 的大小，所以是假命题.

(2) 因$c^2\geqslant 0$，所以$c=0$时有$ac^2=bc^2$，故为假命题.

(3) 由$ac^2>bc^2$，知$c\neq 0$，$c^2>0$所以为真命题.

(4) 由$\begin{cases}a<b\\a<0\end{cases}\Rightarrow a^2>ab$，又$\begin{cases}a<b\\b<0\end{cases}\Rightarrow ab>b^2$，所以为真命题.

(5) 由$a<b<0$有$ab>0$，$\dfrac{1}{ab}>0\Rightarrow\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$，故为假命题.

(6) 由$a<b<0\Rightarrow\begin{cases}-a>-b>0\\-\dfrac{1}{b}>-\dfrac{1}{a}>0\end{cases}\Rightarrow\dfrac{a}{b}>\dfrac{b}{a}$，所以为假命题.

(7) 两负实数中，较小的数的绝对值反而大，所以是真命题.

(8) $a<b<0\Rightarrow|a|>|b|\Rightarrow\dfrac{|b|}{|a|}<1\Rightarrow\dfrac{b}{a}<1$，所以为真命题.

(9) 因为$c-b>c-a>0\Rightarrow\dfrac{1}{c-a}>\dfrac{1}{c-b}>0$

又因为$\begin{cases}a>b>0\\\dfrac{1}{c-a}>\dfrac{1}{c-b}>0\end{cases}\Rightarrow\dfrac{a}{c-a}>\dfrac{b}{c-b}$，所以为真命题.

(10) 因为$\begin{cases}a-b>0\\\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}>0\end{cases}\Rightarrow\dfrac{b-a}{ab}>0\Rightarrow ab<0$又因为$a>b$，所以$a>0$，$b<0$，为真命题.

说明：对于判断题，如果是真命题，应说明理由或进行证明. 在推理过程中应紧扣定义、性质、定理，并要注意特殊情况，如果是假命题只需举一反例.

易错题

★例1 a、b为实数，下面五个命题中正确的是(　　)

(1) 若$a>b$，若$a^2>b^2$；　　(2) 若$|a|>b$，则$a^2>b^2$；

(3) 若$a>|b|$，则 $a^2>b^2$；　　(4) 若$a^2>b^2$，则$a>b$；

(5) 若$|a|\neq b$，则$a^2\neq b^2$.

错解：正确的一个是(1).

错误原因分析：(1) 中认为“较大数的平方必然较大”，其实，只要用特殊值检验，就可以发现(1) 是假命题，如$-3>-4$，怎能推出$(-3)^2>(-4)^2$呢？从本质上讲，即在$a-b>0$两边同乘以$a+b$

(Ⅰ)当$a+b>0$，则$(a-b)(a+b)>0$　　$\therefore a^2-b^2>0$，故$a^2>b^2$；

(Ⅱ)当$a+b<0$，则$(a-b)(a+b)<0$　　$\therefore a^2-b^2<0$，故$a^2<b^2$；

(Ⅲ)当$a+b=0$，则$(a-b)(a+b)=0$　　$\therefore a^2-b^2=0$，故$a^2=b^2$.

解：命题(2) 也是错误的，只要举反例：取$a=1$，$b=-2$时，由$|1|>-2$，推

不出 $1^2 > (-2)^2$.

命题(4) 也是错误的，举反例：取 $a=-2$ ，$b=1$ 时，由 $a^2>b^2$ ，推不出 $a>b$.

命题(5) 也是错误的，举反例：取 $a=2$ ，$b=-2$ 时，$|a|\neq b$ ，但 $a^2=b^2$.

只有命题(3) 是正确的，因为 $a>|b|$ ，即保证了 a 为正数．$a>|b|\geqslant 0$，由不等式性质知 $a^2>b^2$.

所以，正确的一个是(3) .

说明：一般判断一个命题是假命题，只要举一反例即可；而判断一个命题是真命题必须进行严格的逻辑论证.

★★★例 2 若已知二次函数 $y=f(x)$ 的图像过原点且 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$ ，$3\leqslant f(1)\leqslant 4$. 求 $f(-2)$ 的范围.

错解：$\because$ $y=f(x)$ 过原点 $\therefore f(x)=ax^2+bx$ $\therefore f(-1)=a-b$ ，$f(1)=a+b$

$$\therefore \begin{cases}1\leqslant a-b\leqslant 2 & ①\\ 3\leqslant a+b\leqslant 4 & ②\end{cases}$$

由 $\dfrac{①+②}{2}$ 知 $2\leqslant a\leqslant 3$ ③ 由 $\dfrac{②-①}{3}$ 知 $\dfrac{1}{2}\leqslant b\leqslant \dfrac{3}{2}$ ④

又 $f(-2)=4a-2b$ $\therefore 4\times 2-2\times\dfrac{3}{2}\leqslant f(-2)\leqslant 4\times 3-2\times\dfrac{1}{2}$

$\therefore 5\leqslant f(-2)\leqslant 11$

解法一：利用方程思想

$\because f(x)=ax^2+bx$

$$\therefore \begin{cases}f(1)=a+b\\ f(-1)=a-b\end{cases} \quad \therefore \begin{cases}a=\dfrac{1}{2}[f(1)+f(-1)]\\ b=\dfrac{1}{2}[f(1)-f(-1)]\end{cases}$$

有整体意识

$\because f(-2)=4a-2b=3f(-1)+f(1)$

且 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$ $3\leqslant f(1)\leqslant 4$

$\therefore 6\leqslant f(-2)\leqslant 10$.

正确解题的关键是用 $f(-1)$、$f(1)$ 表示 $f(-2)$

解法二：待定系数法

设 $m(a+b)+n(a-b)=f(-2)=4a-2b$

$$\therefore \begin{cases}m+n=4\\ m-n=-2\end{cases} \quad \therefore \begin{cases}m=1\\ n=3\end{cases}$$

$\therefore f(-2)=(a+b)+3(a-b)=f(1)+3f(-1)$

$\because 1\leqslant f(-1)\leqslant 2$ ，$3\leqslant f(1)\leqslant 4$

$\therefore 6\leqslant f(-2)\leqslant 10$

名校大课堂 高二数学

说明：由两个或两个以上的不等式确定范围时，一般不能通过这些不等式的加减等变形来表示其他不等式.

创新题

★★★例1　若 $a>0$，$bc>a^2$ 且 $a^2-2ab+c^2=0$，判断 a、b、c 大小.

思路：比较 a、b、c 大小可先判断 a、b、c 正负.

解：$\because 2ab=a^2+c^2$ 及 $a>0$　　$\therefore 2ab=a^2+c^2>0$，于是 $b>0$

又 $bc>a^2>0$　　$\therefore c>0$

$\because a^2-2ab+c^2=0$　即 $a^2-2ab+b^2=b^2-c^2$

$\therefore b^2-c^2=(a-b)^2\geqslant 0$ 即 $b^2\geqslant c^2$，$b\geqslant c$

若 $b=c$，由 $a^2-2ab+b^2=0$ 即 $(a-b)^2=0$ 可得 $a=b$　　正推难，用反证法

此时有 $a=b=c$，于是 $bc=a^2$ 与 $bc>a^2$ 矛盾

所以 $b\neq c$，即 $b>c$

又 $\because b^2>bc>a^2$　　$\therefore b>a$

今比较 a 与 c 大小

$\because a^2+c^2=2ab>2a^2$ 即 $c^2>a^2$　　$\therefore c>a$

于是 a、b、c 关系为 $b>c>a$

说明：①判断 a、b、c 正负很关键.

②充分利用了平方数的非负性，在解题中，将 $a^2-2ab+c^2=0$ 变形为 $2ab=a^2+c^2>0$，$(a-b)^2=b^2-c^2\geqslant 0$ 起了关键作用.

③推出 $b^2\geqslant c^2$ 时，用反证法证明了 $b\neq c$.

★★例2　已知 x、y、$E\in\mathbf{R}$ 且 $x+y+z=0$，$xyz>0$，求证

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<0.$$

思路：从结论入手，即证 $\dfrac{xy+xz+yz}{xyz}<0$，联系已知条件将 $x+y+z=0$ 平方.

解：$\because x+y+z=0$　　$\therefore x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz=0$

$\therefore xy+yz+xz=-\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}<0$.

$T=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{xy+yz+xz}{xyz}=-\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2xyz}<0$ 得证.

名校模拟题

★★例1　已知实数 a、b、c 满足 $b+c=6-4a+3a^2$ ①，$c-b=4-4a+a^2$ ②，确

定 a、b、c 间大小关系.

思路：多项式间大小比较用比差法.

解：$\because c-b=4-4a+a^2=(a-2)^2\geqslant 0$ $\quad\therefore c\geqslant b$

①–②得 $b=1+a^2$

则 $b-a=1-a+a^2=(a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$ $\quad\therefore b>a$

$\therefore c\geqslant b>a$

说明：两次用作差比较法，都用配方法判断符号.

★★**例 2** (1) 设 $a>0$，$b>0$，且 $a\neq b$，$n\in\mathbf{N}^*$，试比较 $(a+b)(a^n+b^n)$ 与 $2(a^{n+1}+b^{n+1})$ 的大小；

(2) 已知 $x\in\mathbf{R}$，比较 $\frac{1}{1+x}$ 与 $1-x$ 的大小.

思路：上述两题均可用作差比较法.

解：(1) $(a+b)(a^n+b^n)-2(a^{n+1}+b^{n+1})$

$=ab^n+a^nb-a^{n+1}-b^{n+1}$

$=a(b^n-a^n)+b(a^n-b^n)=(b^n-a^n)(a-b)$

由于 a、b 大小不定，需分类讨论

①当 $a>b>0$ 时，$b^n-a^n<0$，$a-b>0$，故上式 <0；

②当 $b>a>0$ 时，$b^n-a^n>0$，$a-b<0$，故上式 <0；

综合上述可知，$(a+b)(a^n+b^n)<2(a^{n+1}+b^{n+1})$

(2) $\frac{1}{1+x}-(1-x)=\frac{x^2}{1+x}$

①要对 x 进行讨论

①当 $x=0$ 时，$\frac{x^2}{1+x}=0$ $\quad\therefore\frac{1}{1+x}=1-x$；

②要注意变形方向

②当 $x<-1$ 时，$\frac{x^2}{1+x}<0$ $\quad\therefore\frac{1}{1+x}<1-x$；

③当 $x>-1$ 且 $x\neq 0$，即 $-1<x<0$ 或 $x>0$ 时，$\frac{x^2}{1+x}>0$ $\quad\therefore\frac{1}{1+x}>1-x$

说明：①作差后对差式进行整理变形，化为积(或商)的形式，通分、因式分解、配方等是常用方法.

②在确定差式的符号时，往往要对字母进行分类讨论.

名校最新秘题

一、选择题(每小题四个选项中，只有一项符合题目要求)

1．下列命题中正确的是(　　)

A．若 $a>b$ 则 $a^2>b^2$　　B．若 $a^2>b^2$ 则 $a>b$

C．若 $a>|b|$ 则 $a^2>b^2$　　D．若 $|a|>b$ 则 $a^2>b^2$

2．设 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则有(　　)

A．$a^2>b^2$　　B．$a+b>2\sqrt{ab}$

C．$ab<b^2$　　D．$a^2+b^2>|a|+|b|$

3．若 $a>b>c$，$a+b+c=0$，则有(　　)

A．$ab>ac$　　B．$ac>bc$　　C．$ab>bc$　　D．以上皆错

4．若 $a-c>b-d$，$c>d$，则(　　)

A．$a>b$　　B．已知条件矛盾

C．a、b 大小不定　　D．仅当 c、$d<0$ 时，$a>b$

5．(1999 年成都市毕业班第一次诊断性检测题)若 $m<n$，$p<q$ 且 $(p-m)(p-n)>0$，$(q-m)(q-n)<0$，则 m、n、p、q 的大小顺序是(　　)

A．$m<p<q<n$　B．$p<m<q<n$　C．$m<p<n<q$　D．$p<m<n<q$

6．下列命题正确的是(　　)

A．$a.>b\Rightarrow ac^2>bc^2$

B．$a-b<0$，$c>1\Rightarrow\frac{c-1}{b}<\frac{c-1}{a}$

C．$a>b$，$c>d\Rightarrow(a-b)^2>(d-c)^2$

D．$a>b>0$，$c>d>0\Rightarrow\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$

二、填空题

7．已知 $a<b<0$，$c>0$，在下列空白处填上恰当的不等号：

①若 $ad>bd$，则 d _____ 0；　　② $(a-2)c$ _____ $(b-2)c$；

③ $\sqrt{|a|}$ _____ $\sqrt{|b|}$；　　④ $\frac{c}{a}$ _____ $\frac{c}{b}$．

8．在“充分、必要、充要、非充分非必要”中选择适当的词句填空：

① $a>b$，$c>d$ 是 $a+c>b+d$ 的______条件；

② $a+b>2$，$ab>1$ 是 $a>1$ 且 $b>1$ 的______条件；

③ $\frac{a}{b}>1$ 是 $a>b$ 的_____条件；

④ $|x-y|<2\varepsilon$ 是 $|x-a|<\varepsilon$ 且 $|y-a|<\varepsilon$ ______的条件．

三、解答题

9. 用不等式的性质证明：

(1) 已知 $a>b>0$，$c>d>0$，那么 $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$；

(2) 已知 $a>b>0$，$d<c<0$，那么 $\frac{\sqrt{a}}{c}<\frac{\sqrt{b}}{d}$.

10. 若 $ab\neq 0$，试比较 $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ 与 $\sqrt[3]{a-b}$ 的大小.

11. 有一所学校，原来是一个长方形布局，市政府对这所学校进行规划，需改成正方形布局，但要求要么保持原面积不变，要么保持原周长不变，那么这所学校应选哪种布局最有利.

答案与提示

一、**1.** C　**2.** C　**3.** A　**4.** A　**5.** B　**6.** D

二、**7.** ①< ②< ③> ④>

8. ①充分 ②必要 ③非充分非必要 ④必要

三、**9.** **提示：**(1) ∵ $a>b>0$，$c>d>0$ 由定理 4 推论 1 得，$ac>bd$. 将不等式两边同乘以 $\frac{1}{cd}$，由定理 4 得，$\frac{ac}{cd}>\frac{bd}{cd}$，就是 $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$

(2) ∵ $a>b>0$ 由定理 5 得，$\sqrt{a}>\sqrt{b}$

∵ $d<c<0$，同乘以(-1)，由定理 4 得，$-d>-c>0$

由题(1) 得 $\frac{\sqrt{a}}{-c}>\frac{\sqrt{b}}{-d}$，两边同乘以$(-1)$，由定理 4 得，$\frac{\sqrt{a}}{c}<\frac{\sqrt{b}}{d}$.

10. **提示：**比较 $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ 与 $\sqrt[3]{a-b}$ 的大小，相当于比较 $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^3$ 与 $(\sqrt[3]{a-b})^3$ 的大小.

∵ $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^3-(\sqrt[3]{a-b})^3=-3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})$

∴ 当 $ab>0$，且 $a>b$ 时，$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}<\sqrt[3]{a-b}$；当 $ab>0$，且 $a<b$ 时，$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}>\sqrt[3]{a-b}$；当 $ab<0$，且 $a>b$ 时，$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}>\sqrt[3]{a-b}$；当 $ab<0$，且 $a<b$ 时，$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}<\sqrt[3]{a-b}$

11. **提示：**设这所学校原长方形的长为 a，宽为 b，若保持原面积不变，则规划后正方形的面积为 ab，若保持原周长不变，则规划后正方形的周长为，$2(a+b)$哪种方法更优就是比较面积哪个大，即 ab 与 $[\frac{2(a+b)}{4}]^2=(\frac{a+b}{2})^2$ 的大小问题：由 $ab-(\frac{a+b}{2})^2=\frac{-(a-b)^2}{4}<0(a\neq b)$，即 $ab<(\frac{a+b}{2})^2$

6.2 算术平均数与几何平均数

重点难点突破

1．如果 a、$b\in\mathbf{R}$，那么 $a^2+b^2\geqslant 2ab$（当且仅当 $a=b$ 时等号成立）.

推论：如果 a、b 是正实数，那么 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时取“=”号）.

说明：称 $\frac{a+b}{2}$ 为 a、b 的算术平均数，$\sqrt{ab}$ 为 a、b 的几何平均数．于是本推论可叙述为“两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数”，其几何意义是“半径不小于半弦.”

2．如果 a、b、c 是正数，那么 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$（当且仅当 $a=b=c$ 时，取“=”号）.

推论：如果 a、b、c 是正数，那么 $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$（当且仅当 $a=b=c$ 时取“=”号）.

3．利用算术平均数与几何平均数的关系（均值不等式），可以求某些函数的最值．运用时要注意①各数为正；②“和”或“积”为常数；③“=”能成立．即必须同时具备“正、定、等”三个条件．

名师随堂解题

基础题

★例 1　当 $x>-1$ 时，求函数 $f(x)=x+\frac{1}{x+1}$ 的最小值.

思路：将 x 变形为 $(x+1)-1$，而 $(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}$ 是定值，用基本不等式求最小值.

解：$\because x>-1\quad\therefore x+1>0$　颇具技巧的变形，体会运用

$\therefore f(x)=x+\frac{1}{x+1}=(x+1)+\frac{1}{x+1}-1\geqslant 2-1=1$

当 $x+1=\frac{1}{x+1}$，即当 $x=0$ 时，$f(x)$ 取最小值 1.

★★例 2　若 a、b、c、d 都是正数，求证 $\frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt[4]{abcd}$

思路：直接用基本不等式

适当分组用公式

解法一：∵a、b、c、d都是正数

$$\therefore \frac{a+b+c+d}{4}=\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}\geqslant\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}}\geqslant\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}$$

$=\sqrt[4]{abcd}$（当且仅当$a=b=c=d$时取"="号）

解法二：∵a、b、c、d都是正数

两次用公式$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，但要注意公式成立条件及等号成立的条件

$$\therefore \frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\frac{2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd}}{4}=\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}\geqslant\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}$$

$=\sqrt[4]{abcd}$（当且仅当$a=b=c=d$时取"="号）

易错题

★★例 已知a、$b\in\mathbf{R}^+$且$a+b=1$，求证$(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})\geqslant 9$.

错解：因为a、$b\in\mathbf{R}^+$，所以$1+\frac{1}{a}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{a}}$，$1+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{b}}$

所以$(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})\geqslant 4\sqrt{\frac{1}{ab}}$

又因为$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}$，所以$\frac{1}{ab}\geqslant 4$

所以$(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})\geqslant 4\sqrt{4}=8$

错误原因分析：不难看出$1+\frac{1}{a}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{a}}$当且仅当$1=\frac{1}{a}$，即$a=1$时取等号，这就使得$b=0$，已经与已知矛盾．把$a$和$b$相关的两数变成独立的了．

证明：因为$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}$，所以$\frac{1}{ab}\geqslant 4$

$$(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})=1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}=1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{a+b}{ab}$$

$$=1+2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geqslant 1+4\sqrt{\frac{1}{ab}}\geqslant 1+4\sqrt{4}=9$$

（当且仅当$a=b$时取等号）

或者：$(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})=1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}\geqslant 1+2\sqrt{\frac{1}{ab}}+\frac{1}{ab}$

$\geqslant 1+2\sqrt{4}+4=9$（当且仅当$a=b$时取等号）