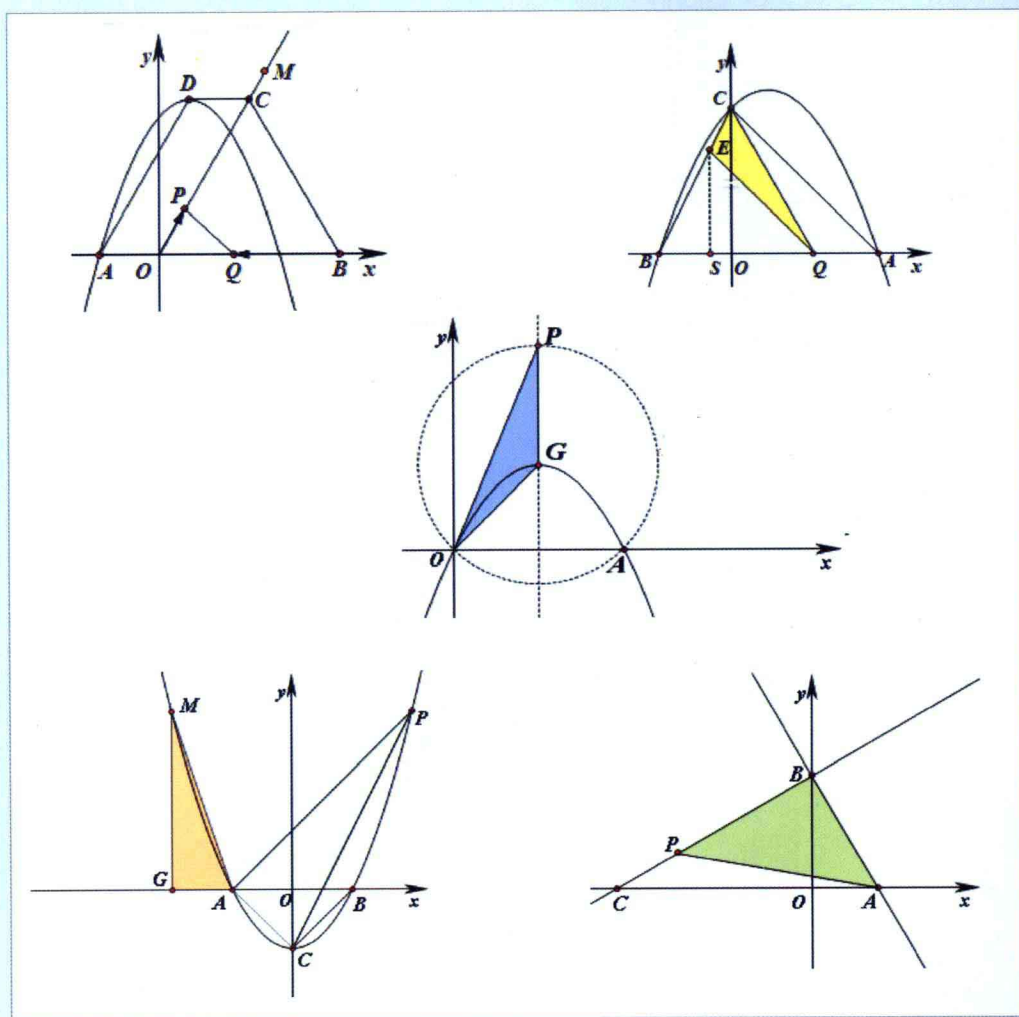


动态解析中考数学压轴题

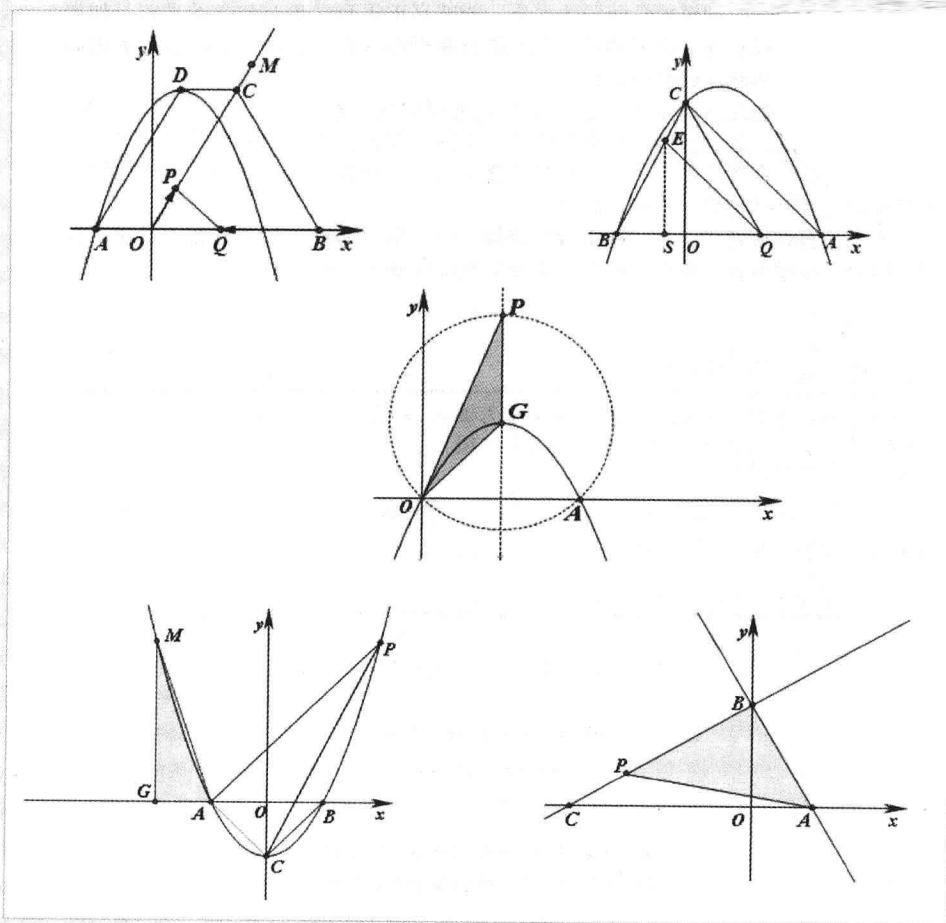
左传波 李 蓉 编著
王鹏远 主审



动态解析中考数学压轴题

左传波 李 蓉 编著

王鹏远 主审



科学出版社

北京

内 容 简 介

近年来,动点问题(或称为动态几何问题)已经是中考数学试卷的热点。

本书与以往的学习用书不同,着重培养学生动手实验、探索发现、猜想验证和自主学习的能力。本书所附带的数学软件《Z+Z智能教育平台——超级画板》为学生提供了一个观察、操作、猜想和验证的平台,原来只能依靠发挥想象的问题现在能够动手实验了;让动态问题所描述的运动过程真正实现,能够有效地帮助学生理解问题、探索问题和解决问题,有助于培养学生利用数学结合思想处理问题的习惯,有助于帮助学生理解数学问题的本质,能够真正提高学生对数学的理解、加深学生对知识的掌握;通过直观演示、动态解析和思路点拨,帮助学生从根本上提高数学成绩,彻底清除压轴题的障碍。

除了动点问题之外,本书还收集了其他类型的压轴题,并进行了分类、总结。本书能够大大减少数学教师的重复性劳动,节约数学教师大量的时间,提高教学效率。本书配套的资源库和《Z+Z智能教育平台——超级画板》软件(免费版本)可以被随意复制和传播,方便、高效。

本书适合在校初中学生、初中数学教师、中考数学命题人员和研究人员参考使用,同时对数学教育专业的本科生、研究生等也有使用价值。

图书在版编目(CIP)数据

动态解析中考数学压轴题 / 左传波, 李蓉编著. —北京: 科学出版社, 2011
(Z+Z智能教育平台普及丛书 / 张景中主编)
ISBN 978-7-03-029562-0

I. 动… II. ①左… ②李… III. 数学课—计算机辅助教学—应用软件—初中—
升学参考资料 IV. G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第227017号

责任编辑: 李 敏 赵 鹏 / 责任校对: 陈玉凤
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号
邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京天时彩色印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年1月第一版 开本: 787×1092 1/16
2011年1月第一次印刷 印张: 17 1/4
印数: 1—4 000 字数: 400 000

定价: 45.00元(含光盘)

(如有印装质量问题, 我社负责调换)



丛书序

编写这套丛书，是想让老师们和同学们能够更方便地使用《Z+Z 超级画板》。

为了教学或学习，要做各种具体的事情。这些事情当中，有不少是机械性、重复性的劳动。

例如，几何作图、描点画曲线、作统计表和统计图、繁琐的计算以及书写公式等。这些工作交给计算机来做，可以事半功倍，有利于腾出更多的时间和精力投入更具创造性的活动。

还有些事情，不用计算机几乎不能做。例如，画一个旋转的立方体，让变动的点、线、圆留下轨迹，对变化的几何量实时测量，把 13 自乘 1000 次等。安排计算机做这些，有利于在教学或学习中把某些问题表现得更清楚、理解得更透彻。

简单来说，使用计算机的好处至少有两条：一条是减轻负担，一条是提高兴趣。对老师们来说主要是减轻负担，对同学们来说主要是提高兴趣。

使用计算机做事，离不开软件。有很多软件可以做上面说的这些事。例如，作动态几何图形的软件、画函数曲线的软件、造统计表的软件、进行计算或公式排版的软件等。但是，软件多了，学起来就要花更多的力气，用起来切换麻烦，还有兼容问题。常常听老师们说，要有一种多功能的教学工具软件就好了。

这套丛书里说的《Z+Z 超级画板》，就是这种多功能的教学工具软件。买生活必需品上超级市场，应有尽有；在教学活动中用超级画板，得心应手，左右逢源。超级画板的“超级”之意，就是比照超级市场而来。至于“Z+Z”，则是“知识+智慧”的意思。

也就是说，这是一款知识性和智能性相结合的、多功能的教学软件。目前的版本，特别适合数学和物理学科的教学和学习。

超级画板的功能很多，用户手册就接近 300 页。但它毕竟是个工具，就像黑板、粉笔、直尺、圆规、三角板一样。根据您的工作需要，先用它最常

用、最好用的功能。

使用超级画板这样的软件，又好像下象棋、下围棋，上手入门十分容易，成为高手往往要经过辛勤劳动。有些对计算机还不熟悉的老师问我，现在都知道课程要和信息技术整合，但如何具体做起来呢？我的建议是尽快动手使用信息技术，由浅入深，分下面四个层次来做：

第一个层次，是改变工具、减轻劳动。

这是初步的简单应用。自己的教学经验和特长要保持、要发挥。原来怎样上课、备课现在仍然保持自己的习惯和套路。但是想一想，有没有一些事情用计算机作起来更省力、省事、省时间呢？用计算机画一些比较复杂的图形总比用粉笔在黑板上画方便吧？用计算机写教案、修改、引用总要方便些吧？用计算机作计算或书写推导公式总要快捷准确些吧？有条件，在网上布置作业答疑就更便利了。这些工作，本来也能做，用了新技术能够做得更快、更方便，好像用圆珠笔代替毛笔一样。学习新的工具要花时间精力，但学会了能减轻劳动，是值得的。例如，学会用超级画板作几何图形和函数曲线只要十几分钟甚至几分钟，这样一本万利的事何乐而不为呢。

第二个层次，叫做现场发挥、梦想成真。

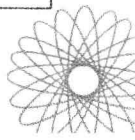
过去，在教学过程中常有一些想像或虚拟的比方，但实际上做不到。例如，在黑板上画一个圆内接正多边形，说如果正多边形的边数越来越多，它的面积和周长就越来越接近圆的面积和周长。用了超级画板，画一个边数会逐步增加的正多边形是轻而易举的事。又如，让几何图形和函数图像随参数变化，让运动的图形留下踪迹，让统计图表跟着数据变化……许多过去想到做不到的事，现在都可以在教学现场即兴发挥，随意操作。另外，“电子黑板”上写的、画的东西会自动被储存，根据教学需要随意隐藏、显示或改变颜色和大小位置，这都是过去想到做不到的，现在是家常便饭了。

第三个层次，进行建设资源设计创作。

随着对超级画板操作的熟悉，受同行所做课件的启发，更多地吸取或总结了别人或自己的经验，就会产生创新的愿望和灵感。原来想不到的知识表现方式，现在可以设计出来了。使用超级画板，可以制作引人入胜的动画，设计游戏式的课件和学件，使用自动解题、交互解题、几何图形的信息搜索、编程、迭代等智能性更高的功能建设教学资源，推出创新的成果。在这套丛书中，有不少内容来自于教学一线老师的创造。

第四个层次，达到教学模式推陈出新的境界。

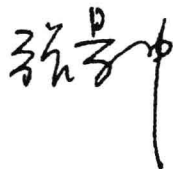
教学资源丰富了，对信息技术运用自如了，备课方法、讲授方法、学习方法、教学组织会自然地发生变化。例如，学生看到老师在课堂上运用自如



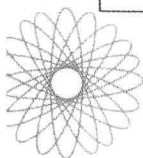
地作图计算推导，看到老师创作的引人入胜的动画，就会产生自己动手试一试的强烈愿望。如果有条件，最好组织学生自己动手在教师指导下探索、试验，尝试开展研究性的学习。由于信息技术的介入，会使学生全身心地投入到教学活动之中，对课程内容产生浓厚的兴趣。在这方面，有些老师已经作了成功的探索，本丛中相当多的篇幅，就来自他们的亲身体会。

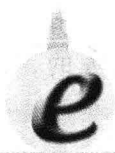
如果这套丛书能帮读者实现上述几个层次的提升，从减轻负担到增长兴趣再到创新发展，编著者的辛劳，就是得到了最好的回报。

我们还希望，这套丛书不仅是老师们和同学们的参考读物，也是大家创造性地教学与学习活动的园地和平台。希望大家在阅读使用中对它的内容和形式多多提出批评指正，对《Z+Z 超级画板》软件多多提出改进意见，使软件和丛书变得更实用、更丰富，共同为中国的教育信息化贡献我们的力量。



2004年8月





序

把数学变得更容易一些，这是我从 20 世纪 70 年代就开始思考的问题。我认为：解决问题的根本就是改造数学本身，为教育的目的改良数学，这也是“教育数学”的来由。“教育数学”的提出，虽然得到很多专家的支持，也取得了不小的成果，但离正式进入中学课堂，还有一段很长的路要走。

治不了本，能治标也好。譬如找一个水平较高的老师，买一本质量可靠的教辅资料……这都是有利于数学学习的。在计算机迅速普及、信息技术高速发展的今天，计算机的辅助作用也不容忽视。

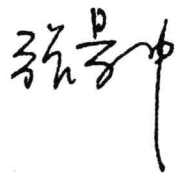
面前的这本《动态解析中考数学压轴题》就齐集了上面的三个因素。

该书的写作以及超级画板课件是由左传波和李蓉两位老师完成的。左老师十几年来从事超级画板的技术培训和应用研究，积累了大量利用超级画板开展数学教学、数学学习和数学研究方面的经验。李老师教学经验丰富，她常年负责指导初三学生数学的复习，对中考中出现的动点问题有深入的研究。两位老师共同撰写，可谓珠联璧合、相得益彰。

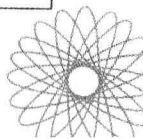
该书中每个题的解法，都经过王鹏远老师的审订。王老师从事中学数学教学近 50 年，在数学教学和计算机辅助教学领域有丰富的研究成果和著作。他写出了我国第一本有关用几何画板辅助数学教学的书。《Z+Z 智能教育平台——超级画板》（以下简称《超级画板》）出现后，王老师体验到这款国产软件确实很适合中国数学教学的需求，他热情地投身于“Z+Z”的研究和培训，并主持了教育部课程发展中心有关“Z+Z”用于数学新课程的项目。在“教育部—微软携手助学活动”中（该活动选择微软的 Math3.0 和中国的《超级画板》作为数学教师培训的主要工具软件），王老师是数学教师培训的主讲专家。有王老师的参与，我相信该书的质量将更上一层楼。

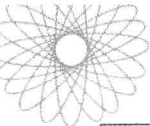
王老师说：“在目前的中国，‘应试教育’是无奈的现实，我们力求在‘应试教育’的环境中推进素质教育，通过提高学生的数学素质来提升成绩。”我赞成这个理念。

该书题目很多，可以有选择地做。希望读者通过做题来理解数学的思想、概念和方法，不要陷入题海而不能自拔。先想想，想不通就用计算机看看、画画、算算。数学提倡抽象的理性思维，直观是为抽象服务的，用计算机是为了不用计算机。

A handwritten signature in black ink, consisting of stylized Chinese characters '张红' followed by a vertical line.

2010年7月12日





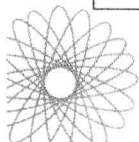
前言

让技术为数学教育注入强劲的活力

本书从近三年全国 300 多份中考数学试卷中选取了 200 多道综合性较高的试题，借助计算机手段对试题进行了动态解析，故把本书取名为《动态解析中考数学压轴题》。读者得到的不是一般纸质的中考复习资料，而是附有可动手操作的动态数学软件光盘的出版物。从本书获益的当然首先是即将参加中考的初三学子和帮助他们复习的毕业班教师。本书将极大减轻学生数学中考复习的沉重负担，在加深学生的数学理解和全面提升学生数学思维能力的前提下，使复习变得更有成效，从而提高学生的应考能力和考试成绩。

作者深知，书店里有关中考复习的图书已经泛滥成灾，在大力推行素质教育的今天，为什么还要出版这本书呢？但是应该承认，无论是广大的学生、教师还是社会，目前谁都无法避开“应试教育”的大环境。既然选拔性考试一时间不能废除，那么考试复习资料就必然成为一种不可忽视的社会需求。所以我们只能在逐步改革考试制度和有效改进复习方法上扎扎实实地做点实事：提倡科学的复习方法，不搞题海战术式的机械训练，而是在提高数学理解和数学思维能力上多下工夫。这是我们在“应试教育”的大环境下推进素质教育的一次探索。我们相信这种美好的愿望是能够得到大家认可的。

另外或许有对本书使用效果的质疑之声，这本书真的就那么灵吗？我们说世界上不可能有那种灵丹妙药，用了它就能让你中考多得多少分。如果说有那种中考复习资料，那绝对是一种商业炒作。但不同的复习方法代表着不同的教学理念，的确有优劣之分，的确有事倍功半和事半功倍之分。能否把看似复杂的抽象的数学问题变得容易一些？能否抓住数学的本质使学生更多一些理性思考而少一些机械记忆？能否让学生在复习过程中感悟生动活泼的数学思想方法从而能举一反三、以一当十？这就是我们追求的理念，也是本书希望渗透的教学理念。从这个角度看，本书绝对有一些亮点。



本书中的题目，一般是中考数学试卷中每质量较高的压轴题。这些题目一般需要灵活运用几方面的知识才能解决，对许多学生来说或者无从入手，或者知道了答案也不能理解，或者看懂了解题过程却不能举一反三。本书侧重于用动态的眼光去观察、探索、发现、总结其中的规律，说清楚其中的道理。

在本书中，对例题的处理主要包括“动感体验”、“思路点拨”、“动态解析”和“简要评注”四部分。

“动感体验”是指导你动手操作动态的数学软件，在图形运动和数据变化的过程中感悟数学思想方法。

“思路点拨”启发你寻找解答问题的突破口，提示你解决问题的关键步骤。

“动态解析”数形结合，图文并茂。各种题设条件逐一列出，结论成立与否一目了然。

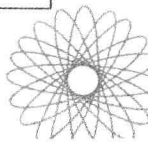
“简要评注”进一步总结题目的特点，渗透解题的思路，挖掘诸如此类问题的解决方案。

使用本书，除了阅读纸质的复习内容外，你还可以通过在计算机上动手操作与观察发现：解决问题的思路水到渠成，解答问题的过程自然而然。

全书共分六章，每章分若干小节。在每一节中除了一些例题之外，后面还附加了一些练习。

虽然从本书获益的首先是身处初三的即将面临中考的学生和帮助他们复习的毕业班教师，但是我们相信，随着时间的推移，它将引起越来越多读者的兴趣。显然，初一、初二的学生和他们的家长会很快认识到这类书的价值。随后广大的数学教师、数学教育工作者和关心数学教育的人士会从本书联想到一个非常值得关注的话题，那就是：数学应该怎样教，怎样学？怎样让信息技术为数学教育注入强劲的活力？这是本书的话外音。我们希望“用事实说话”的方式引起对这方面问题的广泛关注和深入讨论。

我们处在知识爆炸的信息社会，信息技术的飞速发展深刻而广泛地影响着社会的各个领域，而计算机与数学的结合把数学推到了前所未有的重要位置：数学应用的领域极大地拓宽了，应用数学的人群也不仅限于理工科的人员，更多的人在自己的工作领域中需要用到数学；数学的重要性越来越被社会所认识，数学教育也越来越被重视。数学不仅关系到国家的安全和发展，也关系到公民的就业。在今天，对数学教育无疑提出了比以往任何时代都更高的要求。然而，由于数学高度抽象的特点，许多学生被挡在了数学的殿堂之外，失去了学习数学的兴趣和信心。社会对数学教育的迫切需求与数学教



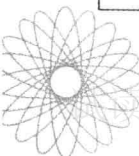
育的现状形成了尖锐的矛盾，正是这个原因使得数学教育改革成了当今世界各国规划各自发展时关心的课题。

当社会的许多领域都在享受技术进步成果的时候，数学教育自然也对信息技术的进步寄予厚望：信息技术能否为数学教育注入强劲的活力？能否使抽象的数学变得容易理解？能否使数学变得更加有趣？能否给学生提供一个观察、探索、猜测、验证等“做”数学的机会？对此，国外（首先是美国）进行了多年的试验，但试验结果并不令人乐观。前两年，美国国会曾经做了一个调查报告，声称“教学软件无助于提高学生成绩”。这个结论是否正确，是否带有普遍性？这促使人们深入进行思考。本书是我们对这个问题的思考和探索的部分记录。我们的看法是，信息技术可以为数学教育注入强劲的活力，但是需要考虑数学教育本身的规律和需求。

以书会友，我们希望与更多的同行进行交流，共同推进数学教育的深入改革。

作者

2010年7月于桂花岗





如何使用本书

对于每一道例题，我们建议你首先进行独立思考和解答。在解题过程中遇到困难后，再去参考后面的分析、点拨和解析部分；在独立解答完成后，可以通过后面的分析、点拨和解析部分，优化解题思路。

本书配带一张光盘，光盘的主要内容是与例题配套的计算机文件，以及打开这些文件需要用到的《Z+Z 智能教育平台——超级画板》软件（简称《超级画板》）。打开光盘，启动“zjzMath.exe”文件，根据提示在半分钟之内即可完成《超级画板》的安装，安装后的软件为免费版本，可永久使用。关于《超级画板》的功能介绍可以登录 www.zplusz.org 查询。



在条件允许的情况下，我们强烈建议你按照本书的提示在计算机上自己进行操作、观察和体验。只要你懂得计算机的基本操作，就能够使用光盘中的内容了，而不需要事先对《超级画板》软件做任何的了解。下面说明在阅读本书和使用光盘配套资源过程中需要了解的五项主要操作：

(1) 根据要求打开文件。例如，在第一章第一节例 1-1 的“动感体验”部分，要求打开文件“例 1-1.zjz”，进入光盘中“第一章”文件夹，找到“例 1-1.zjz”，用鼠标双击它即可打开。

(2) 通过拖动点改变实数的大小。操作步骤是：鼠标单击这个点，然后按照要求左右（或者上下）拖动即可拖动这个点，从而改变对应实数的大小。

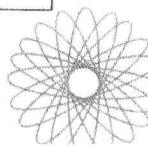
(3) 通过动画按钮改变参数的值。单击动画按钮的左侧部分即可执行按钮的动作，这时往往是得到了一个特殊的状态。

(4) 拖动一个自由点或者半自由点。将鼠标指向这个点然后按住鼠标上下（或者左右）拖动即可。

(5) 在同一个文档内翻页。当一个文档有多个页面时，通过单击工具条中的 （下一页）和 （上一页）或者通过键盘中 PageDown（下一页）和 PageUp（上一页）可进行页面之间的转换。在具有多个页面的文档

中还设置了翻转页面的按钮，通过单击按钮也可以完成操作。

当然，如果你确实没时间或没机会使用计算机，也不影响本书的使用效果。大致翻一翻，随机看几个例题，你就会发现，书中利用大量图片展示了各种条件下所可能出现的各种结论。单单对照着这些图片，就可以让你理解题目的动态解析过程，开阔你的视野，启迪你的思维，并进一步帮助你透彻理解问题，充分掌握行之有效的解题思路和方法。



《Z + Z 智能教育平台普及丛书》

编写委员会

主 编 张景中

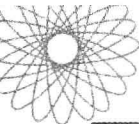
副主编 左传波

编 委 张景中 王鹏远 李传中

左传波 饶永生 周传高

本书软件系统设计 李传中 张景中

本书软件程序编写 李传中 陈天翔



目 录

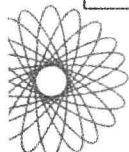
丛书序

序

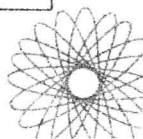
前言

如何使用本书

第一章 因动点而产生的存在性问题	1
第一节 等腰三角形的存在性问题	1
第二节 等边三角形的存在性问题	13
第三节 直角三角形的存在性问题	19
第四节 相似三角形的存在性问题	34
第五节 平行四边形的存在性问题	47
第六节 梯形的存在性问题	65
第七节 相切关系的存在性问题	78
第二章 图形运动中的函数关系问题	85
第一节 与比例线段有关的函数关系	85
第二节 由动点产生的面积关系问题	93
第三节 由图形运动产生的面积关系问题	105
第三章 因动点而产生的求最值问题	115
第一节 线段和差的最值问题	115
第二节 多边形周长的最值问题	127
第三节 多边形面积的最值问题	134
第四节 与最值有关的设计问题	147
第四章 图形的平移、翻折与旋转问题	152
第一节 图形平移与利用图形平移处理的问题	152
第二节 图形旋转与利用图形旋转处理的问题	154



第三节 图形翻折与利用图形翻折处理的问题·····	172
第五章 图形运动中的计算推理问题 ·····	184
第一节 几何证明以及由代数计算推导的证明问题·····	184
第二节 代数计算以及由几何推导进行的代数计算问题·····	200
第三节 与方案设计有关的数学推理问题·····	209
第六章 运动或变量与函数图像问题 ·····	222
第一节 参数对函数图像性质的影响·····	222
第二节 问题解决与函数图像信息问题·····	237
附录 练习题参考答案 ·····	248



第一章 因动点而产生的存在性问题

在图形运动过程中，研究满足某些条件的对象是否存在的问题，统称为存在性问题。例如，是否存在等腰三角形、直角三角形、平行四边形、矩形等常见的多边形，或者是否存在与某个已知的图形具有相似或全等关系的图形。

等腰三角形、直角三角形、平行四边形、矩形等都是我们非常熟悉的几何图形，相似或全等也是我们非常熟悉的几何关系。但是在运动变化的过程中判断一个图形是否为某个图形或者是否有某种性质时，就需要对这些几何图形和几何关系具有更加深刻的认识与理解。因此，简单的图形由静止的状态进入运动的环境，也可能变得非常复杂。

但是只要紧紧抓住几何图形或几何关系的本质，总是可以“以不变应万变”的方式处理这些问题。例如，只要有两条边相等的三角形就是等腰三角形，因此只要有两条边相等的条件成立，就存在一个对应的等腰三角形。但是在三角形中，只要任何两条边相等，这个三角形都是等腰三角形。因此，需要做到不遗漏任何等腰三角形存在的情况。

某个或某几个对象在运动，判断是否存在一个时刻或者一个条件，使得某些条件成立或者说某些对象存在。

本章以若干典型的存在性问题为例，通过动态解析，帮助学生认识这类问题的本质并掌握解决这类问题的基本思路和方法。

第一节 等腰三角形的存在性问题

【例 1-1】 如图 1-1 所示，平面直角坐标系中有一矩形纸片 $OABC$ ， O 为原点，点 A ， C 分别在 x 轴， y 轴上，点 B 的坐标为 $(m, \sqrt{2})$ （其中 $m > 0$ ），在 BC 边上选取适当的点 E 和点 F ，将 $\triangle OCE$ 沿 OE 翻折，得到 $\triangle OGE$ ；再将 $\triangle ABF$ 沿 AF 翻折，恰好使点 B 与点 G 重合，得到 $\triangle AGF$ ，且 $\angle OGA = 90^\circ$ 。

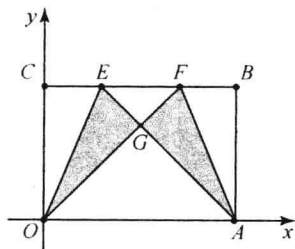


图 1-1

(1) 求 m 的值。

(2) 求过点 O ， G ， A 的抛物线的解析式和对称轴。

(3) 在抛物线的对称轴上是否存在点 P ，使得 $\triangle OPG$ 是等腰三角形？若不存在，请说明理由；若存在，直接答出所有满足条件的点的坐标（不要求写出求解过程）。