上海电視大学物理系試用教材

高等数学习題介答

第三册

曹偉傑編

上海电視大学

第八章　积分及其应用

基本法則，基本定理

I．定积分的定义：

設$f(x)$是在$[a, b]$上的連續函数，用分点

$$a_0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

把$[a, b]$分成n个子区間，在每一个子区間$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点ξ_i，并令$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，当$\Delta x_i\to 0$，則和式$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$的极限就称为$f(x)$在$[a, b]$上的定积分，記为$\int_a^b f(x)dx$，

即
$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\substack{\|\Delta x_i\|\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

II．牛頓-萊布尼茲公式

若$F(x)$是在区間$[a, b]$上連續的函数$f(x)$的一个原函数，即

$$F'(x)=f(x),$$

則
$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)。$$

III．定积分的性质

1．$\int_a^b[f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$。

2．$\int_a^b Af(x)dx=A\int_a^b f(x)dx$，其中$A$为常数。

3．$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$。

4．設M，m是$f(x)$在$[a, b]$上的最大值及最小值，則

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a)。$$

5．若$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\Phi(x)$，

則
$$\int_a^b\varphi(x)dx\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b\Phi(x)dx。$$

6．积分中值定理

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi)=(b-a)f\{a+\theta(b-a)\}$$

其中$a<\xi<b$ 或 $a>\xi>b$；$0<\theta<1$。

7. 定积分的变量置换法

$$\int_a^b f(x)\,dx \xlongequal[\substack{\varphi(t_1)=a\\ \varphi(t_2)=b}]{x=\varphi(t)} \int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt。$$

8. 定积分的分部积分法

$$\int_a^b u\,dv=\Big[uv\Big]_a^b-\int_a^b v\,du。$$

9. 遞推公式

(1)　$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$　(n 为大于 1 的整数)

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

若 n 为偶数时，　$I_n=\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots n}\cdot\dfrac{\pi}{2}$

若 n 为奇数时，　$I_n=\dfrac{2\cdot4\cdot6\cdots(n-1)}{3\cdot5\cdot7\cdots n}$。

(2)　$I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^m x\,dx$　(m, n 为正整数)

若 $n\geqslant2$ 时，　$I_{m,n}=\dfrac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}$；

若 $m\geqslant2$ 时，　$I_{m,n}=\dfrac{m-1}{m+n}I_{m-2,n}$。

(3)　$I_n=\int_0^{\infty}\dfrac{dx}{(a^2+x^2)^n}$　($a>0$, n 是大于 1 的整数)

$$I_n=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1};$$

$$I_n=\frac{1}{a^{2n-1}}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2}。$$

IV. 定积分的应用

1. 曲边梯形的面积

若曲綫为 $y=\varphi(x)$，它和 $x=a$, $x=b$ 以及 x 軸所圍成的面积为

$$A=\int_a^b|\varphi(x)|\,dx。$$

2. 曲綫的弧长

(1) 平面曲綫的弧长

若曲綫的方程为 $f(x,y)=0$

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_{y_1}^{y_2}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy;$$

若曲綫的方程为 $x=f(t)$，$y=\varphi(t)$

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt;$$

若曲綫的方程为 $\rho=\rho(\theta)$

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta。$$

(2) 空間曲綫的弧长

若曲綫的方程为 $\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ \varphi(x,y,z)=0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} S&=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx \\ &=\int_{y_1}^{y_2}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dy \\ &=\int_{z_1}^{z_2}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}\,dz; \end{aligned}$$

若曲綫的方程为 $x=f_1(t)$，$y=f_2(t)$，$z=f_3(t)$

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt。$$

3．体积

(1) 若曲綫的方程为 $f(x,y)=0$

繞 x 軸的旋轉的体积为 $V_x=\pi\int_a^b y^2dx;$

繞 y 軸的旋轉的体积为 $V_y=\pi\int_c^d x^2dy$。

(2) 若立体以垂直于 x 軸的平面相截，截面积为 $S(x)$

則体积 $$V=\int_a^b S(x)\,dx。$$

4．旋轉曲面积

(1) 設 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有連續导数

則 $$A=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx。$$

(2) 設 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有連續导数

则 $$A=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt。$$

(3) 設 $\rho=\rho(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有連續导数

则 $$A=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\rho\sin\theta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta。$$

5．平面物质曲綫的重心

(1) 平面曲綫方程：$y=f(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$

重心坐标： $$\bar{x}=\frac{\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx};$$

$$\bar{y}=\frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}。$$

(2) 平面曲綫方程：$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$

重心坐标： $$\bar{x}=\frac{\int_{\alpha}^{\beta}x\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt}{\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt};$$

$$\bar{y}=\frac{\int_{\alpha}^{\beta}y\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt}{\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt}。$$

6．轉动慣量(关于平面物质曲綫繞其軸的轉动慣量)

物质曲綫对于直綫 g 的轉动慣量 I

$$I=\int_0^S\gamma^2\rho\,ds$$

其中 ρ 是物质曲綫的密度 $\rho=\rho(s)$；$\gamma=\gamma(s)$ 是曲綫上点 $\rho(s)$ 到直綫 g 的距离。

因平面物质曲綫对于 Ox 軸，Oy 軸以及原点的轉动慣量分别为

$$I_x\,(\text{对 } Ox \text{ 軸})=\int_0^S y^2\rho\,ds;$$

$$I_y\,(\text{对 } Oy \text{ 軸})=\int_0^S x^2\rho\,ds;$$

$$I_0\,(\text{对原点})=\int_0^S(x^2+y^2)\rho\,ds。$$

由此得 $I_0=I_x+I_y$。

V. 重积分定义，仿定积分有

$$\iint_D f(x, y)\,dA = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \|\Delta A_i\|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta A_i$$

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dV = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \|\Delta V_i\|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \zeta_i, \eta_i)\,\Delta V_i$$

VI. 积分估值定理

1. $mA \leqslant \iint_D f(P)\,dA \leqslant MA$;

2. $mV \leqslant \iiint_V f(P)\,dV \leqslant MV$。

其中 m, M 分别为 $f(P)$ 在所論区域上最小值与最大值。

VII. 重积分的应用

1. 体积

(1) 直角坐标：

① $V = \iiint_V dV = \iiint_V dx\,dy\,dz$;

② $V = \iint_D z\,dA = \iint_D z\,dx\,dy$。

(2) 圆柱坐标(平面时即为极坐标)：

① $V = \iiint_V \rho\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$;

② $V = \iint_D f(\rho, \theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$。

(3) 球面坐标：

$V = \iiint_V \rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$。

2. 曲面积

(1) 直角坐标：

$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$。

(2) 圆柱坐标：

$$S = \iint_D \sqrt{\rho^2 + \rho^2\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}\,d\rho\,d\theta。$$

(3) 球面坐标：

$$S=\iint_D \sqrt{\rho^2\sin^2\theta+\sin^2\theta\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\right)^2}\,\rho\,d\theta\,d\varphi。$$

3. 重心 (1) 平面图形的重心

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy},\quad \bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy},\quad \bar{z}=\frac{\iint\limits_D z\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy}。$$

(2) 空間体的重心

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V dx\,dy\,dz},\quad \bar{y}=\frac{\iiint\limits_V y\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V dx\,dy\,dz},\quad \bar{z}=\frac{\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V dx\,dy\,dz}。$$

VIII. 广义积分

1. 无穷区間上的广义积分

$$\left.\begin{array}{l}① \int_a^\infty f(x)\,dx=\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx\\ ② \int_{-\infty}^b f(x)\,dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx\end{array}\right\}\qquad(1)$$

若(1)式右端极限存在，则左端积分称为收斂；

若(1)式右端极限不存在，则左端积分称为发散。

$$③ \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx=\int_a^\infty f(x)\,dx+\int_{-\infty}^a f(x)\,dx \qquad (2)$$

若(2)式右端二个积分收斂，则左端积分称收斂。

2. 无穷型不連續函数的广义积分

若 $f(x)$ 在 c 点无界

$$\left.\begin{array}{l}① \int_a^c f(x)\,dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx\\ ② \int_c^d f(x)\,dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_{c+\varepsilon}^d f(x)\,dx\end{array}\right\}\qquad(3)$$

若(3)式右端极限存在，则左端积分称为收斂；

若(3)式右端极限不存在，则左端积分称为发散。

③ 若 $f(x)$ 在 c 点处无界

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx \qquad (4)$$

若(4)式右端二个积分收敛，则左端积分称为收敛。

3. Γ 函数

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx,\ \text{其中}\ \alpha>0$$

$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}\qquad\qquad \text{其中}\ \alpha<0$$

$$\Gamma(1)=1,\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

若 n 为正整数时，$\Gamma(n+1)=n!$

4. β 函数

$$\beta(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx=\int_0^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}dx,\ \text{其中}\ m>0,\ n>0。$$

5. Γ 函数与 β 函数的关系

$$\beta(n,m)=\beta(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

IX. 积分近似法

1. 矩形法：

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n)$$

2. 梯形法：

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right)$$

3. 抛物线法(Simpson 公式)：

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{3n}[y_0+y_n+4(y_1+y_3+\cdots+y_{n-1})$$
$$+2(y_2+y_4+\cdots+y_{n-2})]$$

第一部分　定积分

习题解答

1. 用定积分的定义，求下列各题的值

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)$

解：

$$S_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n-1}{n}}\right)。$$

此处$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，$x_i=\dfrac{i-1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$，$\Delta x_i=\dfrac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$

右边是$\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i$，此时小区間长都相等，即将区間$[0,1]$ n等分，$n\to\infty$

时，$\Delta x_i=\dfrac{1}{n}\to 0$

故　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\int_0^1\dfrac{1}{1+x}dx=[\ln(1+x)]_0^1=\ln 2-\ln 1=\ln 2$。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right\}$

解：$S_n=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}$

$$=\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}}\right\}。$$

此处，$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$x_i=\dfrac{i-1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$，$\Delta x_i=\dfrac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$，右边是$\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i$，此时小区間长为等长，即将区間$[0,1]$ n等分，当$n\to\infty$时，$\Delta x_i=\dfrac{1}{n}\to 0$

故　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=[\arcsin x]_0^1$

$$=\arcsin 1-\arcsin 0=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}。$$

2．証明下列不等式

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$

解：在区間$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上有$1\geqslant\sin x\geqslant 0$，又$\sin^{n+1}x=\sin^n x\cdot\sin x$，

$\therefore$　$\sin^{n+1}x\leqslant\sin^n x$，当$x=0$和$x=\dfrac{\pi}{2}$时等号才成立。

故　$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx。$$

(2) $\ln(1+\sqrt{2})<\int_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^n}}<1$　　$(n>2)$

解：若$n>2$，$0<x<1$时，$0<x^n<x^2$，　$\therefore$　$1<1+x^n<1+x^2$。

因而
$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}<\frac{1}{\sqrt{1+x^n}}<1$$

$$\therefore\quad \int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx<\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^n}}\,dx<\int_0^1 1\,dx$$

此处
$$\int_0^1 1\,dx=[x]_0^1=1-0=1$$

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]_0^1$$

$$=\ln(1+\sqrt{2})-\ln 1=\ln(1+\sqrt{2})。$$

$$\therefore\quad \ln(1+\sqrt{2})<\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}<1\quad(n>2)$$

3．証明 $\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(a-x)\,dx$，并用其証明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^m x\,dx。$$

証：設 $x=a-t$，$dx=-dt$

当 $x=0$ 时，$t=a$；$x=a$ 时，$t=0$

$$\therefore\quad \int_0^a f(x)\,dx=\int_a^0 f(a-t)(-dt)=\int_0^a f(a-t)\,dt=\int_0^a f(a-x)\,dx。$$

将此結果用以解决下面問題，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\,dx。$$

4．由虎克定律，彈簧伸长时的反作用力是与它的伸长长度成正比，設一彈簧伸长 4 厘米时，作功 10 仟克米，問彈簧伸长 10 厘米时，作功多少？

解：$F=kx$

$$10=W=\int_0^4 kx\,dx=\left[\frac{k}{2}x^2\right]_0^4=\frac{16}{2}k=8k。\qquad\therefore\quad k=\frac{5}{4}$$

$$W=\int_0^{10}kx\,dx=\frac{5}{4}\int_0^{10}x\,dx=\left[\frac{5}{4}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^{10}=\frac{250}{4}=62.5\text{ 仟克米。}$$

5．試証定积分 $\int_0^2 e^{x^2-x}dx$ 介于 $\frac{2}{\sqrt[4]{e}}$ 与 $2e^2$ 之間。

証：$y=e^{x^2-x}$，　$y'=e^{x^2-x}(2x-1)$

令　$y'=0$，$x=\frac{1}{2}$，　$y=\frac{1}{e^{\frac{1}{4}}}$

又　$x=0, y=1$；　$x=2, y=e^2$

$$\therefore \quad 最小値为\ \frac{1}{e^{\frac{1}{4}}}；最大値为\ e^2$$

由积分估値定理有

$$2\frac{1}{e^{\frac{1}{4}}}\leqslant\int_0^2 e^{x^2-x}dx\leqslant 2e^2。$$

$$\therefore \quad \frac{2}{\sqrt[4]{e}}\leqslant\int_0^2 e^{x^2-x}dx\leqslant 2e^2。$$

6．一电流的电动势为 $E=E_0\sin\omega t$，其中 E_0，ω 是常量，求在半周期中的平均电动势。

解：E（半个周期中的平均电动势）$=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}E_0\sin\omega t\,dt=\frac{2}{\pi}E_0$

7．試求函数 $y=\int_x^5\sqrt{1+x^2}\,dx$，当 $x=0$ 及 $x=\frac{3}{4}$ 时的导数。

解：　　$\because \quad \int_a^x f(x)\,dx=\varphi(x)$，　$\varphi'(x)=f(x)$

又　　$\because \quad \frac{dy}{dx}=-\sqrt{1+x^2}$

$$\therefore \quad 当\ x=0\ 时\ y'(0)=-1；\ x=\frac{3}{4}\ 时，\ y'\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{7}{4}$$

8．利用牛頓-萊布尼茲公式，計算下列定积分

(1) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\,\mathrm{tg}\,x=\Big[\mathrm{tg}\,x\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}+\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=1+1=2$。

(2) $\int_0^{\frac{5}{2}}\frac{dx}{25+4x^2}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+\frac{25}{4}}=\frac{2}{20}\Big[\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2}{5}x\Big]_0^{\frac{5}{2}}$

$$=\frac{1}{10}[\mathrm{arc\,tg}\,1-\mathrm{arc\,tg}\,0]=\frac{1}{10}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{40}。$$

(3) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{9-4x^2}=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\frac{9}{4}-x^2}=\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{6}{2}}\ln\frac{\frac{3}{2}+x}{\frac{3}{2}-x}\right]_{-1}^{1}$

$$=\frac{1}{12}\left(\ln\frac{5}{1}-\ln\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{12}(\ln 5+\ln 5)=\frac{1}{6}\ln 5。$$

(4) $$\int_0^1\frac{1-x^2}{1+x^2}dx=\int_0^1\left(-1+\frac{2}{1+x^2}\right)dx=\Big[-x+2\operatorname{arc\,tg}x\Big]_0^1$$

$$=(-1+2\operatorname{arc\,tg}1)-(-0+2\operatorname{arc\,tg}0)$$

$$=\left(-1+2\cdot\frac{\pi}{4}\right)-(2\cdot0)=\frac{\pi}{2}-1。$$

(5) $$\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{a+x}}=\int_0^a\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a+x}}{x-(a+x)}dx=\frac{1}{a}\int_0^a(\sqrt{a+x}-\sqrt{x})dx$$

$$=\frac{1}{a}\left[\frac{2}{3}(a+x)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a=\frac{2}{3a}\left[\{(2a)^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}\}-a^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$=\frac{2}{3a}\{(2a)^{\frac{3}{2}}-2a^{\frac{3}{2}}\}=\frac{2}{3a}\cdot2(\sqrt{2}-1)a^{\frac{3}{2}}。$$

(6) $$\int_{-2}^{-11}\frac{dx}{(11+5x)^3}=\frac{1}{5}\int_{-2}^{-11}\frac{d(11+5x)}{(11+5x)^3}$$

$$=\left[\frac{1}{5}\cdot\frac{(11+5x)^{-2}}{-2}\right]_{-2}^{-11}=\frac{387}{3872}。$$

(7) $$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\varphi}{\cos^2 2\varphi}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d(2\varphi)}{\cos^2 2\varphi}=\left[\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}。$$

(8) $$\int_1^e\frac{1+\log_a x}{x}dx=\int_1^e\left(1+\frac{\ln x}{\ln a}\right)d\ln x=\left[\ln x+\log_a e\,\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e$$

$$=1+\frac{1}{2}\log_a e。$$

(9) $$\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{a\,dx}{(a-x)(2a-x)}=a\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{1}{a}\left[\frac{1}{a-x}-\frac{1}{2a-x}\right]dx$$

$$=\left[\ln\left|\frac{2a-x}{a-x}\right|\right]_0^{\frac{a}{2}}=\ln\left|\frac{\frac{3a}{2}}{\frac{a}{2}}\right|-\ln\left|\frac{2a}{a}\right|\ (a\neq0)$$

$$=\ln3-\ln2=\ln\frac{3}{2}。$$

(10) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{4+5\sin x}\xlongequal{\operatorname{tg}\frac{x}{2}=u}\int_0^1\frac{\frac{2u}{1+u^2}du}{4+5\frac{2u}{1+u^2}}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{du}{u^2+\frac{5}{2}u+1}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{du}{\left(u+\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+\frac{5}{4}-\frac{3}{4}}{u+\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}\right|\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 2。$$

(11) $\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin^2(\omega x+\varphi_0)dx=\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\frac{1-\cos 2(\omega x+\varphi_0)}{2}dx$

$$=\frac{\pi}{2\omega}-\frac{1}{4\omega}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\cos 2(\omega x+\varphi_0)d2(\omega x+\varphi_0)$$

$$=\frac{\pi}{2\omega}-\left[\frac{1}{4\omega}\sin 2(\omega x+\varphi_0)\right]_0^{\frac{\pi}{\omega}}=\frac{\pi}{2\omega}。$$

(12) $\int_0^1\frac{dx}{x^2+x+1}=\int_0^1\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]_0^1=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi。$$

(13) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos 3t\cos 2t\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos 5t+\cos t)\,dt$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\sin 5t+\sin t\right]_{-\pi}^{\pi}=0。$$

9．利用分部积分法，計算下列定积分

(1) $\int_0^1 xe^{-x}dx=[-xe^{-x}]_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=-\frac{1}{e}+[-e^{-x}]_0^1=1-\frac{2}{e}。$

(2) $\int_0^{\pi}x^3\sin x\,dx=[-x^3\cos x]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}3x^2\cos x\,dx$

$$=\pi^3-6\left[(-x\cos x)\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx$$

$$=\pi^3-6\pi-6[\sin x]_0^{\pi}=\pi^3-6\pi。$$

(3) $\int_a^x\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})\,dx=[x\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})]_a^x$

$$-\int_a^x\frac{x\left[1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right]}{x+\sqrt{x^2-a^2}}dx=x\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})-a\ln a$$

$$-\int_a^x\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=x\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})-\sqrt{x^2-a^2}-a\ln a。$$

(4) $$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=\int_0^a\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=a^2\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int_0^a\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=\left[a^2\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^a-\left[\int_0^a x\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx\right]=a^2\arcsin 1$$

$$-\left[[-x\sqrt{a^2-x^2}]_0^a+\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx\right]=\frac{\pi a^2}{2}-\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx。$$

移項整理之

$$\therefore\quad 2\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{\pi}{2}a^2。$$

即 $$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{\pi a^2}{4}。$$

10．証明下列等式

(1) $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(a+b-x)\,dx$

証：$\int_a^b f(a+b-x)\,dx\xlongequal[dx=-dt]{a+b-x=t}-\int_b^a f(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(x)\,dx。$

(2) $\int_{-b}^b f(x)\,dx=\int_{-b}^b f(-x)\,dx$

証：$\int_{-b}^b f(x)\,dx\xlongequal[dx=-du]{x=-u}-\int_b^{-b}f(-u)\,du=\int_{-b}^b f(-u)\,du=\int_{-b}^b f(-x)dx。$

(3) $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=\int_0^1 x^n(1-x)^m dx$

証： $$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx\xlongequal[-dx=du]{1-x=u}-\int_1^0(1-u)^m u^n du=\int_0^1 u^n(1-u)^m du$$

$$=\int_0^1 x^n(1-x)^m dx。$$

11．已知 $\varphi'(a)=b$，$\varphi'(b)=a$ 計算 $\int_a^b\varphi'(x)\varphi''(x)dx$ 。

証：$\int_a^b\varphi'(x)\varphi''(x)\,dx\xlongequal[du=\varphi''(x)dx,\ v=\varphi'(x)]{u=\varphi'(x),\ dv=\varphi''(x)dx}[\varphi'(x)\varphi'(x)]_a^b-\int_a^b\varphi'(x)\varphi''(x)\,dx$

$$\therefore\quad 2\int_a^b\varphi'(x)\varphi''(x)\,dx=[\varphi'(x)\varphi'(x)]_a^b=[\varphi'(b)]^2-[\varphi'(a)]^2=a^2-b^2$$

即 $$\int_a^b\varphi'(x)\varphi''(x)\,dx=\frac{a^2-b^2}{2}。$$

12．証明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2$

証：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx \xlongequal[dx=-dy]{x=\frac{\pi}{2}-y} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln\cos y(-dy) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln\cos y\,dy$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos y\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,dx \qquad (1)$$

等式双端加以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx$ 得

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\ln\cos x + \ln\sin x]dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\cos x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{\sin 2x}{2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\ln\sin 2x - \ln 2]dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin 2x\,dx - \frac{\pi}{2}\ln 2 = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\ln\sin y\,dy - \frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\sin x\,dx\right] - \frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,dx\right] - \frac{\pi}{2}\ln 2。$$

由(1)知：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,dx$

$$\therefore\quad 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx\right] - \frac{\pi}{2}\ln 2$$

移項整理：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2。$$

13．积分在几何上的应用题

(1) 求由抛物綫与 x 軸和直綫 $x=1$ 之間所圍成的面积。

解：如图 8.1 就是曲綫 $y=\sqrt{x}$ 的图形，且知其通过原点，当 $x\geqslant 0$ 时有 $y\geqslant 0$。

由图知：$dA=y\,dx$

$$\therefore\quad A=\int_0^1 y\,dx = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}。$$

(2) 求由曲綫 $y=xe^{-x}$ 与 x 軸和二直綫 $x=\pm 1$ 之間所圍成的面积。

解：如图 8.2 为曲綫 $y=xe^{-x}$ 的图形，且知其通过原点当 $x<0$ 时；

$y<0$，当 $x\geqslant 0$ 时 $y\geqslant 0$。

故由 $x=-1$ 到 $x=0$ 之間的

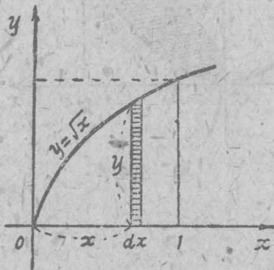

图 8.1

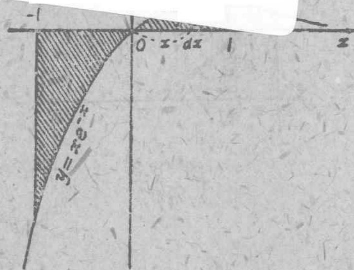

图 8.2

即 $A_1=-\int_{-1}^{0} y\,dx=-\int_{-1}^{0} xe^{-x}dx=\int_{0}^{-1} xe^{-x}dx$。

又由 $x=0$ 和 $x=1$ 之間的面积为 A_2

即 $A_2=\int_0^1 y\,dx=\int_0^1 xe^{-x}dx$。

故所求的面积 $A=A_1+A_2=\int_0^{-1} xe^{-x}dx+\int_0^1 xe^{-x}dx$。

此处用分部积分法

$$\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}+c=-e^{-x}(1+x)+c。$$

$$\therefore\ A=\left[-e^{-x}(1+x)\right]_0^{-1}+\left[-e^{-x}(1+x)\right]_0^1=1+\left(-\frac{2}{e}+1\right)=2\left(1-\frac{1}{e}\right)。$$

(3) 求抛物綫 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ $(a>0)$ 和两坐标軸之間所圍成的面积。

解：此曲綫的图形，只在第一象限內存在，由图 8.3 知所求面积 A 为：

$$A=\int_0^a y\,dx=\int_0^a(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2dx=\int_0^a(a-2\sqrt{a}\sqrt{x}+x)dx$$

$$=\left[ax-\frac{4}{3}\sqrt{a}\,x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{2}\right]_0^a=\frac{a^2}{6}。$$

(4) 求由两个抛物綫 $y^2=4x$，$x^2=4y$ 之間所圍成的面积。(如图 8.4)

解：求二个抛物綫 $y^2=4x$，$x^2=4y$ 的交点即解联立方程

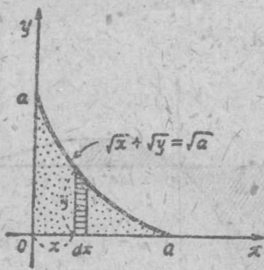

图 8.3

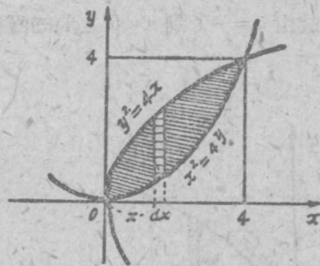

图 8.4

$$\begin{cases} y^2=4x & (1) \\ x^2=4y & (2) \end{cases}$$

将(2)代(1)得 $4x=\left(\frac{x^2}{4}\right)^2$， 即 $x(x-4)(x^2+4x+16)=0$

得 $x=0, 4$

所求的面积为 $A=\int_0^4\left(\sqrt{4x}-\frac{x^2}{4}\right)dx=\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{12}x^3\right]_0^4=\frac{16}{3}$。

(5) 求由曲綫 $y^2(a^2+x^2)=x^2(a^2-x^2)$，$(a>0)$所圍成的面积。

解：因为曲綫关于两个坐标轴对称，所求的面积 A 是第一象限的面积的4倍。

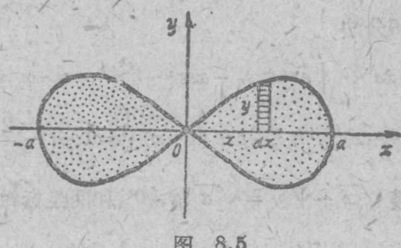

图 8.5

$$\therefore\quad A=\int_0^a y\,dx=4\int_0^a x\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}\,dx\ \underset{\substack{\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}=t \\ x^2=a^2\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ 2x\,dx=-\frac{4a^2t}{(1+t^2)^2}dt}}{=\!=\!=\!=\!=}\ 4\int_1^0-\frac{2a^2t^2}{(1+t^2)^2}dt$$

$$=8a^2\int_0^1\frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt$$