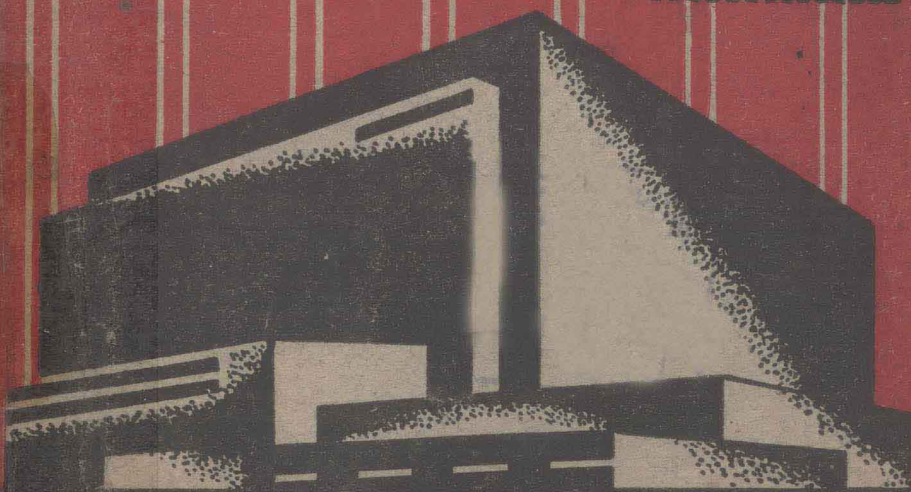


Smith Gale

斯蓋而氏解析幾何

黃錫祺譯 陳容普校訂

最新漢譯本



上海書店印行

Smith Gale

斯蓋而氏解析幾何

黃錫祺譯

陳容普訂

上海書店印行

中華民國三十八年七月新三版

斯蓋兩氏解析幾何

定價十四元二角

原著者

Smith And Gale

譯者

黃錫

祺

校訂者

陳容

普

發行人

徐堯

正

印刷兼
發行者

上海書店

上海福州路三〇〇號

版權所有
不准翻印

目次

第一章 代數及三角之復習

	頁數
1. 數	1
2. 常數	1
3. 二次式	2
4. 特別二次式	4
5. 二次式之兩根有某種關係時之情形	6
6. 變數	10
7. 二次式符號之變更	10
8. 無窮大	14
9. 多變數方程式	16
10. 直角三角形內一角之函數	18
11. 任意角	18
12. 三角法之公式及定理	19
13. 三角函數真數表	21
14. 三角函數符號規則	22
15. 希臘字母	22

第二章 笛卡兒坐標

16. 方向直線	23
----------	----

17. 笛卡兒坐標	24
18. 直角坐標	25
19. 角	28
20. 直角投影	29
21. 長度	31
22. 傾角及斜率	34
23. 分點	38
24. 面積	42
25. 投影定理II	47

第三章 曲線及方程式

26. 能適合一已知條件之軌跡	51
27. 能適合一已知條件之點之軌跡之方程式	51
28. 第一基本問題	53
29. 直線及圓之一般方程式	58
30. 方程式之軌跡	59
31. 第二基本問題	60
32. 比較原理	63
33. 第三基本問題	67
34. 對稱	72
35. 較深之討論	73
36. 討論方程式之方法	74
37. 交點	76
38. 超越曲線	79
39. 一般圖解法	82

第四章 直線及一般一次方程式

40. 導言	85
41. 直線方程式之次數	85
42. 一般一次方程式	86
43. 兩個一次方程式之解答之幾何意義	89
44. 兩條件可定一直線	92
45. 直線用其斜率及其上任意一點之坐標所表之方程式	95
46. 直線用其兩截距所表之方程式	96
47. 通過兩已知點之直線方程式	97
48. 直線方程式之法線式	101
49. 由直線至一點之距離	105
50. 一直線與第二直線之交角	109
51. 直線系	113
52. 與一已知直線平行之直線系	116
53. 與一已知直線垂直之直線系	117
54. 通過已知兩直線之交點之直線系	119
55. 直線之參數方程式	123

第五章 圓及方程式 $X^2 + Y^2 + DX + EY + F = 0$

56. 圓之一般方程式	130
57. 三要件可決定一圓	133
58. 圓系	136
59. 切線之長	144

第六章 極坐標

60. 極坐標	149
61. 方程式之軌跡	150
62. 改直角坐標爲極坐標	154
63. 應用	156
64. 軌跡之方程式	157

第七章 坐標之變換

65. 坐標之變換	160
66. 移軸	160
67. 轉軸	162
68. 坐標之一般變換	163
69. 軌跡之分類	164
70. 由變換坐標化簡方程式	165
71. 對於一次及二次方程式之應用	168

第八章 圓錐曲線及二次方程式

72. 極坐標方程式	173
73. 化爲直角坐標	178
74. 直角坐標方程式之討論及化簡	178
75. 直角坐標方程式之討論及化簡	182
76. 相配雙曲線及漸近線	189
77. 以漸近線爲軸之等軸雙曲線	191
78. 有心圓錐曲線的性質	192

79. 圓錐曲線的機械作法	192
80. 二次方程式之軌跡之形狀	194
81. 二次方程式之軌跡之作法	197
82. 圓錐曲線系	200

第九章 切線及法線

83. 切線之斜率	207
84. 切線及法線之方程式	210
85. 圓錐曲線之切線及法線	212
86. 通過曲線外一點之切線	215
87. 圓錐曲線之切線及法線之性質	217
88. 切曲線於原點之切線	221
89. 求切線方程式之第二法	223

第十章 直線與圓錐曲線之關係

90. 直線與圓錐曲線之位置關係	226
91. 直線系與圓錐曲線及直線與圓錐曲線系之位置關係	228
92. 圓錐曲線之切線	230
93. 以斜率表切線	233
94. ρ 方程式	235
95. 切線	237
96. 漸近方向及漸近線	238
97. 心	240
98. 直徑	241
99. 有心圓錐曲線之相配直徑	244

第十一章 軌跡，參數方程式

100. 解析幾何之第一基本問題	248
101. 由已知曲線用一定方法作成之軌跡	249
102. 曲線之參數方程式	253
103. 諸曲線系之交點之軌跡	259

第十二章 一般二次方程式

104. 一般二次方程式	264
105. 可約圓錐曲線之條件	264
106. 可約圓錐曲線系	267
107. 轉軸時之不變式	269
108. 移軸時之不變式	273
109. 二次方程式之軌跡之性質	275
110. 等圓錐曲線	278
111. 五條件決定一圓錐曲線	279

第十三章 相似圓錐曲線之變位

112. 相似圓錐曲線	281
113. 相等形	281
114. 移位	282
115. 轉位	282
116. 易位	284
117. 直線上之反射	287
118. 對稱變位	287
119. 全等圓錐曲線及對稱圓錐曲線	291

120. 等比變位	291
121. 相似變位	292
122. 相似圓錐曲線	293

第十四章 反演變換

123. 定義	297
124. 反演方程式	297
125. 圓錐曲線之反演	299
126. 兩圓所成之角	303
127. 反演時角之不變	304
128. 直線系之反演	305
129. 同心圓系之反演形	307
130. 正交圓系	308

第十五章 極，極線及極配形

131. 對於圓之極及極線	310
132. 極與極線之作法	311
133. 對於圓之極配形	313
134. 對於任意二次方程式之軌跡之極與極線	315
135. 對於任意二次方程式之軌跡之極配形	317
136. 一圓對於他圓之極配形	320
137. 相系	323

第十六章 空間之笛卡兒坐標系

138. 笛卡兒坐標系	325
-------------	-----

139. 直角投影	327
140. 直線之方向餘弦	330
141. 長	331
142. 兩有向直線間之角	334
143. 分點	335

第十七章 面，曲線及方程式

144. 空間之軌跡	338
145. 面之方程式	338
146. 與坐標面平行之平面	340
147. 曲線之方程式	340
148. 一方程式之軌跡	343
149. 二方程式之軌跡	343
150. 曲線方程式之討論	344
151. 曲面方程式之討論	345

第十八章 平面及三變數之一次方程式

152. 平面方程式之法線式	348
153. 一次普通方程式 $Ax + By + Cz + D = 0$	349
154. 三條件定一平面	353
155. 平面方程式之截距式	356
156. 平面與點間之距離	356
157. 兩平面間之角	357
158. 平面系	359

第十九章 空間直線

159. 直線之普通方程式	363
160. 直線之射影面	366
161. 各種直線方程式	369
162. 直線與平面間之相關位置	373
163. 三個一次方程式之解答之幾何意義	374

第二十章 特殊面

164. 導言	379
165. 球	379
166. 柱面	383
167. 曲線之射影柱面	384
168. 錐面	385
169. 旋轉面	386
170. 列線曲面	387

第二十一章 坐標之變換，各種坐標系

171. 移軸	391
172. 轉軸	392
173. 極坐標	393
174. 球面坐標系	394
175. 圓柱坐標系	394

第二十二章 二次曲面及三變數之二次方程式

176. 二次曲面	397
-----------	-----

77. 三變數二次一般方程式之化簡法	398
78. 橢圓面	400
79. 單葉雙曲面	401
80. 雙葉雙曲面	402
81. 橢圓拋物面	405
82. 雙曲拋物面	406
83. 母直線	408

第二十三章

直線與二次曲面之關係

二次曲面理論之應用

84. ρ 方程式	410
85. 切平面	411
86. 極平面	412
87. 外切錐面	413
88. 漸近方向及錐面	415
89. 心	419
90. 徑面	419

解析幾何學

第一章

代數及三角之復習

1. 數 實行代數演算時所生之數有兩種，即實數與虛數。

凡數之平方爲正數者，爲實數。零亦爲實數。

凡數之平方爲負數者，曰純虛數。凡純虛數皆應化爲一負數之平方根，故以式 $b\sqrt{-1}$ 表之，其中 b 爲實數，而

$$(\sqrt{-1})^2 = -1.$$

凡數之能以 $a+b\sqrt{-1}$ 表之者，曰虛數或複數。(Imaginary or Complex number)，其中 a 及 b 爲實數，且 b 不等於零。複數之平方通常仍爲複數，因 $(a+b\sqrt{-1})^2 = a^2 - b^2 + 2ab\sqrt{-1}$ ，

若 a 不等於零則此數必爲複數故也。

2. 常數 凡數量之值一定不變者曰常數。

在任何問題中，其值恆不變之常數，曰絕對常數 (Absolute constant) 如 $2, -3, \sqrt{1}, \pi$ 等。

隨意常數 (Arbitrary constant) 或參數 (Parameter) 爲在一組數值中可指定任何一數值之常數。但此種指定之值在全盤演算內不能再變。

隨意常數尋常用英文字母中前段數個表之。如不足用，在應用時爲增加此種記號起見則於其右上角加撇號或右下角加下標或二者兼用之。例如：

用撇號，

a' (讀 a 一撇), a'' (讀 a 二撇), a''' (讀 a 三撇), 皆表不同之常數.

用下標 (Subscript)

b (讀 b 一), b_2 (讀 b 二), 皆表不同之常數.

兼用二者,

c_1' (讀 c 一一撇), c_3'' (讀 c 三二撇), 皆表同不之常數.

3. 二次式. 模範式. 任可二次方程式, 均可由移項及集項寫爲模範式 (Typical form)

$$1) \quad Ax^2 + Bx + C = 0,$$

式中未知數以 x 表之. 係數 A, B, C 爲隨意常數, 可爲任何值, 但 A 不能等於零, 因如此則方程式非二次矣. C 曰常數項.

方程式之左邊

$$2) \quad Ax^2 + Bx + C$$

二次式, 任何二次式, 均可寫爲如此之模範式, 其 x 表未知數. $B^2 - 4AC$ 稱爲 (1) 或 (2) 之判別式, 以 Δ 表之.

即二次式或二次方程式之判別式, 等於其模範式中未知數一次項之係數之平方, 減去未知數二次項之係數與常數項之積之四倍.

凡代二次式之未知數之數, 而能令此二次式等於零者, 名爲此二次式之根.

二次式 (2) 之根亦爲二次方程式 (1) 之根, 二次方程式之根, 即謂能適合該方程式也.

在代數學內證明, (2) 或 (1) 有兩根 x_1 , 及 x_2 此兩根可由解 (1) 得之, 即

$$(3) \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{B}{2A} + \frac{1}{2A} \sqrt{B^2 - 4AC}, \\ x_2 = -\frac{B}{2A} - \frac{1}{2A} \sqrt{B^2 - 4AC}. \end{cases}$$

兩值相加，得

$$(4) \quad x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}.$$

兩值相乘，得

$$(5) \quad x_1 x_2 = \frac{C}{A}.$$

故得

定理 I. 二次式之兩根之和，等於未知數一次項之係數變其符號，再除以二次項之係數。

兩根之積，等於常數項除以二次項之係數。

二次式(2)，可寫為

$$(6) \quad Ax^2 + Bx + C \equiv *A(x - x_1)(x - x_2),$$

此可由將右邊乘出，以(4)及(5)代入證明之。

例如，因二次方程式 $3x^2 - 4x + 1 = 0$ 之兩根為 1 及 $\frac{1}{3}$ ，故得恆等式

$$3x^2 - 4x + 1 = 3(x - 1)(x - \frac{1}{3}).$$

若 A, B, C 俱為實數，則兩根 x_1, x_2 為實數或虛數，全由判別式而定。其關係述之如下

定理 II. 設二次式各項係數俱為實數，並用 Δ 表其判別式。則

當 Δ 為正時，兩根俱為實數，且不相等。

當 Δ 為零時，兩根俱為實數，且相等。

當 Δ 為負時，兩根俱為虛數。

*符號 = 讀『恆等於』，表示用此符號相連之兩式，只有形式之不同。

故二次式可寫為下列三種形式；式中之數，均為實數。

$$(7) \begin{cases} Ax^2+Bx+C \equiv A(x-x_1)(x-x_2), \text{設}\Delta\text{爲正, 由(6).} \\ A^2x+Bx+C \equiv A(x-x_1)^2, \text{設}\Delta\text{爲零, 由(6).} \\ Ax^2+Bx+C \equiv A\left[\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\frac{4AC-B^2}{4A^2}\right], \text{設}\Delta\text{爲負.} \end{cases}$$

今證明第三式如下：

$$\begin{aligned} Ax^2+Bx+C &\equiv A\left(x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}\right) \\ &\equiv A\left(x^2+\frac{B}{A}x+\frac{B^2}{4A^2}+\frac{C}{A}-\frac{B^2}{4A^2}\right), \end{aligned}$$

在括號內加減 $\frac{B^2}{4A^2}$ ，

$$\equiv A\left[\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\frac{4AC-B^2}{4A^2}\right].$$

4. **特別二次式.** 若第2頁(1)內係數 B 及 C 有一或俱為零，則稱此二次式曰特別二次式。

款 I. $C=0$.

由分解因子，方程式(1)變為

$$(1) \quad Ax^2+Bx \equiv x(Ax+B)=0.$$

故其兩根為 $x_1=0$, $x_2=-\frac{B}{A}$ 若二次方程式之常數項等於零，則一根等於零。反之，若二次方程式有一根等於零，則此方程式，必無常數項；因若 $x=0$ 能適合2頁(1)，則由代入得 $C=0$ 。

款 II. $B=0$.

2頁方程式(1)變為

$$(2) \quad Ax^2+C=0.$$

由3頁定理I, $x_1+x_2=0$, 即

$$(3) \quad x_1=-x_2.$$