数学公共基础课程解题分析与考研辅导丛书

线性代数
解题分析与考研辅导

XIANXING DAISHU JIETI FENXI YU KAOYAN FUDAO

刘剑平 施劲松 鲍亮 曹宵临

主编

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

数学公共基础课程解题分析与考研辅导丛书

线性代数解题分析与考研辅导

主 编 刘剑平 施劲松 鲍 亮 曹宵临

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·上海·

图书在版编目(CIP)数据

线性代数解题分析与考研辅导/刘剑平等主编. —上海:华东理工大学出版社,2012.9

ISBN 978-7-5628-3345-1

Ⅰ.①线… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①线性代数-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 178675 号

数学公共基础课程解题分析与考研辅导丛书

线性代数解题分析与考研辅导

主　　编/刘剑平　施劲松　鲍亮　曹宵临

责任编辑/郭艳

责任校对/张波

封面设计/肖车　裘幼华

出版发行/华东理工大学出版社有限公司

地　　址:上海市梅陇路 130 号,200237

电　　话:(021)64250306(营销部)

(021)64252174(编辑室)

传　　真:(021)64252707

网　　址:press. ecust. edu. cn

印　　刷/上海展强印刷有限公司

开　　本/787mm×1092mm　1/16

印　　张/24.25

字　　数/586 千字

版　　次/2012 年 9 月第 1 版

印　　次/2012 年 9 月第 1 次

书　　号/ISBN 978-7-5628-3345-1

定　　价/49.80 元

联系我们:电子邮箱:press@ecust. edu. cn

官方微博:e. weibo. com/ecustpress

本书编委会

主　编	刘剑平	施劲松	鲍　亮	曹霄临	
编　委	刘剑平	施劲松	鲍　亮	曹霄临	朱坤平
	钱夕元	王　薇	邓淑芳	解惠青	陆元鸿
	俞绍文	姬　超	林爱红	宋　洁	卢俊杰
	温　涛	黄文亮	闫中凤	孙　叶	李　平
	樊国号	雷倩倩	叶炎钧		

前　言

线性代数是高等学校理、工科和经济学科专业的一门主要的基础课，也是研究生入学考试的必考内容.由于线性问题广泛存在于科学技术的各个领域，而某些非线性问题在一定条件下可转化为线性问题得以解决，尤其是计算机的日益普及，用代数方法解决实际问题，已渗透到各个领域，显示出其重要性和实用性，且作为修读后续课程的一门必不可少的基础课程，更决定其地位的重要.为了更好地指导学生学好这门课程，加深对所学内容的理解和掌握，提高其综合运用知识解决实际问题的能力，以及帮助学生有效地备考，我们编写了这本《线性代数解题分析与考研辅导》，其目的是为广大教师提供一本好的参考书，为广大学生提供一位好的“辅导老师”.

本书是按教育部制订的教学基本要求组织编写，内容包括矩阵、行列式、线性代数方程组、向量、矩阵特征值问题、二次型及线性空间和线性变换等7章，前6章均包含基本要求精述，基本内容精讲，典型例题精析，习题全解，考研试题精选，单元练习精练，单元练习精解等，第7章包含习题全解.本书可作为大学本科、专科、专升本的学生学习线性代数的辅导教材，也可供参加硕士生入学考试的学生复习使用.

本书通过基本要求精述、基本内容精讲和典型例题精析，不仅使学生对基本概念、基本理论、基本方法有一个系统的总结，而且对理解各概念之间的关系，提高学生的分析问题、解决问题的能力，深入理解和巩固知识无疑是极其有益的.每章后有单元练习精练及精解，书末附6套线性代数期终考试卷、历年研究生入学考试题、5套考研模拟练习卷及其答案，为学生自测练习、复习思考、开阔视野提供了很好的材料.

本书由长期从事线性代数教学和考研复习的有经验的教师编写而成，由刘剑平、施劲松、鲍亮、曹宵临主编.在编写过程中得到了华东理工大学教材建设委员会和教务处的大力支持，得到了鲁习文教授、李建奎教授的支持和关心，在此表示衷心的感谢.同时，对编写过程中给予过建议的全体线性代数数学团队成员表示感谢.

在编写中难免存在不妥或商榷之处，恳请读者指教并提出宝贵意见.

作者的 e-mail 地址：liujianping60@163.com

目　　录

第 1 章 矩　　阵

1.1 基本要求精述

(1) 理解矩阵的概念，掌握常见的特殊矩阵及其性质.

(2) 熟练掌握矩阵的线性运算、乘法运算、转置运算及其运算规律.

(3) 理解逆矩阵的概念，掌握逆矩阵的性质及求逆矩阵的方法.

(4) 熟练掌握矩阵的初等变换，了解初等矩阵的性质及其与初等变换、可逆矩阵的关系.知道矩阵的标准形分解.

(5) 了解分块矩阵及其运算.

1.2 基本内容精讲

1.2.1 矩阵的概念

(1) 定义

由 $m\times n$ 个元素 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行、n 列的矩形元素表

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 $m\times n$ 维(阶)矩阵，简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$.

注 1　本书中我们讨论的主要是实矩阵，即 $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} 为实数的情形.

注 2　当 $m=n$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵.

注 3　称 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}_{m\times n}$ 为同维(阶)矩阵，如果两个同维矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的对应元素相等，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

(2) 特殊矩阵

零矩阵： 元素全为零的矩阵，记作 $\boldsymbol{O}$.

行矩阵： $\boldsymbol{A}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$

列矩阵： $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$

三角阵：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 称为上三角阵，满足 $a_{ij}=0\ (i>j)$

$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 称为下三角阵，满足 $a_{ij}=0\ (i<j)$

对角阵：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\overset{\Delta}{=\!=}\mathrm{diag}(a_{11},a_{12},\cdots,a_{nn})$，满足 $a_{ij}=0(i\neq j)$

数量阵：$\mathrm{diag}(k,k,\cdots,k)=\begin{bmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{bmatrix}$

单位阵：$\mathrm{diag}(1,1,\cdots,1)=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$，常记作 $\boldsymbol{I}_n$ 或 $\boldsymbol{I}$，有时也记作 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$.

对称阵：　$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，满足 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$

反对称阵：$\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，满足 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$

注 1　行(列)矩阵通常称为行(列)向量，并习惯用小写字母表示，其每一元素称为分量，分量个数称为向量的维数.

注 2　上述所列的特殊矩阵，除零矩阵、行或列矩阵外，均为方阵.

注 3　对反对称阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 来说，必有 $a_{ii}=0\ (i=1,2,\cdots,n)$.

注 4　任一方阵 $\boldsymbol{A}$ 均可表为一个对称阵与一个反对称阵之和，即

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$$

1.2.2　矩阵的运算

(1) **加法**：设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

条件：同维矩阵才能相加.

运算规则：交换律　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

结合律　$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

零元素　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$

负元素　$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$

(2) **数乘**：设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$k$ 为数，则 $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$

运算规则：分配律　$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$

结合律 $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$

零元素 $0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

1 元素 $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$, $(-1)\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$

(3) **乘法**:设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$,则 $\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times n}$,其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}\,(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

条件:左边矩阵的列数等于右边矩阵的行数.

运算规则:结合律 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$,$(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=k(\boldsymbol{AB})$,$k$ 为任意数

分配律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$,$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$

注 1 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}$.

注 2 交换律不满足,即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 称 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 可交换相乘.

注 3 消去律不满足,即若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$,$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}\nRightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$. 但当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

注 4 方阵的幂:设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵.

(ⅰ) 指数法则:$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$,$(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$($k$,$l$ 为正整数)

(ⅱ) 矩阵多项式:设 m 次多项式

$$f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

则 $f(\boldsymbol{A})=a_m\boldsymbol{A}^m+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{I}$ 是一个 n 阶矩阵.

(ⅲ) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,则

$$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}),(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2\pm2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2,(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$$

一般有 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^m=C_m^0\boldsymbol{A}^m+C_m^1\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{B}+\cdots+C_m^{m-1}\boldsymbol{AB}^{m-1}+C_m^m\boldsymbol{B}^m$($m$ 为自然数)

(4) **转置**:设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$,则 $\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置阵,记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$.

运算规则:$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$, $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$,

$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$($k$ 为数), $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

1.2.3 矩阵的初等变换与初等矩阵

(1) 矩阵的初等行变换、初等列变换统称为初等变换,有如下三类:

第一类,将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行(列)与第 j 行(列)对换,记作 $r_{ij}(c_{ij})$.

第二类,以非零常数 k 乘 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行(列),记作 $r_i(k)(c_i(k))$.

第三类,将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行(列)的 k 倍加到第 j 行(列)上,记作 $r_{ij}(k)(c_{ij}(k))$.

(2) 单位阵 $\boldsymbol{I}$ 经过一次初等变换后得到的矩阵称为初等矩阵.

$$\boldsymbol{I}\overset{r_{ij}}{\sim}\boldsymbol{R}_{ij},\quad \boldsymbol{I}\xrightarrow{r_i(k)}\boldsymbol{R}_i(k),\quad \boldsymbol{I}\xrightarrow{r_{ij}(k)}\boldsymbol{R}_{ij}(k),$$

$$\boldsymbol{I}\overset{c_{ij}}{\sim}\boldsymbol{C}_{ij},\quad \boldsymbol{I}\xrightarrow{c_i(k)}\boldsymbol{C}_i(k),\quad \boldsymbol{I}\xrightarrow{c_{ij}(k)}\boldsymbol{C}_{ij}(k).$$

其中 $\boldsymbol{R}_{ij}=\boldsymbol{C}_{ij}$,$\boldsymbol{R}_i(k)=\boldsymbol{C}_i(k)$,$\boldsymbol{R}_{ij}(k)=\boldsymbol{C}_{ji}(k)$.

(3) 初等变换与初等矩阵之间的关系

初等矩阵左(右)乘 $\boldsymbol{A}$,相当于对 $\boldsymbol{A}$ 进行一次相应的初等行(列)变换,例如

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_{ij}} \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{R}_{ij}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{A} \xrightarrow{c_{ij}} \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_{ij}=\boldsymbol{B}.$$

注 1 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换得到矩阵 $\boldsymbol{B}$,则称 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 等价,此时必有等式 $\boldsymbol{R}_s\cdots\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1\cdots\boldsymbol{C}_t=\boldsymbol{B}$成立,其中 $\boldsymbol{R}_1,\cdots,\boldsymbol{R}_s$ 与 $\boldsymbol{C}_1,\cdots,\boldsymbol{C}_t$ 均为初等矩阵.

注 2 任一矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等变换后均可化为形如$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$的矩阵,其中 r 为 $\boldsymbol{A}$ 的秩,称矩阵$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$为 $\boldsymbol{A}$ 的标准形.

1.2.4 可逆矩阵的定义

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵,称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

注 1 可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必是方阵,其逆必唯一,记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$,即有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$$

注 2 可逆矩阵又称为非退化阵或非奇异阵或满秩阵,不可逆阵又称为退化阵或奇异阵或降秩阵.

1.2.5 可逆矩阵的性质

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^{-1}$均可逆,且

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A},\quad (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$$

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,数 $k\neq0$,则 $k\boldsymbol{A}$ 可逆,且$(k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$

(3) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同阶可逆阵,则 $\boldsymbol{AB}$ 可逆,且$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

注 1 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶的可逆矩阵,$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 不一定可逆.

注 2 初等矩阵都是可逆阵,且其逆也是初等矩阵.

$$\boldsymbol{R}_{ij}^{-1}=\boldsymbol{R}_{ij},\quad \boldsymbol{R}_i^{-1}(k)=\boldsymbol{R}_i\left(\frac{1}{k}\right),\quad \boldsymbol{R}_{ij}^{-1}(k)=\boldsymbol{R}_{ij}(-k)$$

因此,对任一矩阵 $\boldsymbol{A}$,必存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{PAQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$,这称为 $\boldsymbol{A}$ 的标准形分解.

1.2.6 可逆矩阵的判别方法

(1) 利用定义:若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$,则必有 $\boldsymbol{A}$ 可逆,且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

(2) 利用行列式:若$|\boldsymbol{A}|\neq0$,则 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

(3) 利用性质(3):将矩阵分解成可逆矩阵的乘积,则 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

(4) 利用矩阵的秩:$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,若 $r(\boldsymbol{A})=n$,则 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

(5) 利用线性方程组:若 $n\times n$ 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解,则 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

(6) 利用向量组的线性无关性:若方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行(或列)向量组线性无关,则 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

(7) 利用初等矩阵:若 $\boldsymbol{A}$ 可分解为有限个初等矩阵之积,则 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

(8) 利用特征值:证明数零不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,则 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

(9) 利用反证法:这是常用方法.

1.2.7 逆矩阵的计算方法

(1) 利用初等变换

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}) \xrightarrow{\text{行变换}} (\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{A}^{-1}) \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

注 1 对$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}) \sim (\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{A}^{-1})$只能用行初等变换.

对$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}$只能用列初等变换.

注 2 若$\boldsymbol{A}$可逆且$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$,则$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$可由初等行变换求得

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B}) \xrightarrow{\text{行变换}} (\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$$

(2) 利用伴随阵

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^* \tag{1.5}$$

注 在具体计算时这一公式适用于较低阶的矩阵.

(3) 利用分块矩阵,见 1.2.8.

(4) 凑法

当条件中有矩阵方程时,通过矩阵运算规律从矩阵方程中凑出$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$的形式,从而可得$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$,这一方法适用于抽象矩阵求逆.

1.2.8 分块矩阵

(1) 定义

用若干条纵线和横线把一个矩阵分成若干个小块,每一小块称为矩阵的一个子块或子矩阵,则以这些子块为元素的原矩阵称为分块矩阵.

(2) 运算

进行分块矩阵的加、减、乘法和转置运算,可将子矩阵当作通常矩阵的元素看待.

注 1 同维矩阵,只有用同样的分块方法分块时,才能进行分块相加.

注 2 分块乘法只有当左边矩阵的列分法与右边矩阵的行分法一致时才能进行.

注 3 分块转置除了行列互换外,每一子块也须转置,即若

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} \end{bmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s2}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1r}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{2r}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

这一点容易忽视.

(3) 利用分块矩阵求逆阵

对分块对角阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{bmatrix}$$

若 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,s)$可逆,则 $\boldsymbol{A}$ 可逆且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s^{-1}\end{bmatrix}$$

对

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} & & & \boldsymbol{A}_1 \\ & & \boldsymbol{A}_2 & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{A}_s & & & \end{bmatrix}$$

若 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,s)$可逆,则 $\boldsymbol{A}$ 可逆,且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} & & & \boldsymbol{A}_s^{-1} \\ & & \boldsymbol{A}_{s-1}^{-1} & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$$

对

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}\end{bmatrix} \quad 或 \quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{C}\end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 为 $m\times m$ 可逆阵,$\boldsymbol{C}$ 为 $n\times n$ 可逆阵,则 $\boldsymbol{A}$ 可逆,且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1} & -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}^{-1}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1}\end{bmatrix} \quad 或 \quad \boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{C}^{-1}\end{bmatrix}$$

注 当矩阵的零元素较多时,可考虑分块,使高阶矩阵的运算转化为低阶矩阵的运算,这是简化矩阵运算的一个途径.

(4) 用列(行)分块推得的结论

若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列($j=1,2,\cdots,n$),$\boldsymbol{\beta}_i^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行($i=1,2,\cdots,m$),又设 $\boldsymbol{e}_j$ 是单位阵 $\boldsymbol{I}_n$ 的第 j 列,$\boldsymbol{e}_i$ 是单位阵 $\boldsymbol{I}_m$ 的第 i 列,则有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{\alpha}_j \quad (j=1,2,\cdots,n)$$
$$\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\beta}_i^{\mathrm{T}} \quad (i=1,2,\cdots,m)$$
$$\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j=a_{ij} \quad (i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$$

则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的计算也可转化为方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{e}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的求解问题.

(5) 关于正交阵

定义： 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$，称 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵.

结论： 将 $\boldsymbol{A}$ 列分块 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$，则由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ 可得

$$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j.\end{cases}$$

同理，由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$ 可得 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组具有同样的结论.

1.3 典型例题精析

1.3.1 矩阵乘法

【例 1】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -6 & 2\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{BA},\boldsymbol{A}^2$.

解 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -6 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -6 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 5\\ -20 & -10\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

注 1 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，交换律不满足.

注 2 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，可有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O},\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$.

注 3 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，但 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{B}$，消去律不满足.

【例 2】 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，求与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的所有矩阵.

解 解法一 若 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换，则由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 知，$\boldsymbol{B}$ 必为二阶方阵.

设 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$，则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}+b_{21} & b_{12}+b_{22}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{11}+b_{12}\\ b_{21} & b_{21}+b_{22}\end{bmatrix}$$

根据 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，有

$$\begin{cases} b_{11}+b_{21}=b_{11} \\ b_{12}+b_{22}=b_{11}+b_{12} \\ b_{21}=b_{21} \\ b_{22}=b_{21}+b_{22} \end{cases}$$

解得 $b_{21}=0, b_{11}=b_{22}$，由此得到与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的任一矩阵是

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{11} \end{bmatrix}$$

其中 b_{11}, b_{12} 为任意实数.

解法二 将 $\boldsymbol{A}$ 分解为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\boldsymbol{I}+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由于单位阵 $\boldsymbol{I}$ 与任何同阶方阵都可交换，故问题变为求与 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\boldsymbol{C}$ 可交换的矩阵，设其为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{CB}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{BC}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & b_{11} \\ 0 & b_{21} \end{bmatrix}$$

由 $\boldsymbol{CB}=\boldsymbol{BC}$ 得 $b_{21}=0, b_{11}=b_{22}, b_{12}$ 任意，故与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{11} \end{bmatrix}$$

其中 b_{11} 和 b_{12} 是任意常数.

【例 3】 已知 $\boldsymbol{\alpha}=\left[\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2}\right]^{\mathrm{T}}$ 是 n 维列向量，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解 显然 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，由矩阵运算规律可得

$$\boldsymbol{AB}=[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}][\boldsymbol{I}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}]=\boldsymbol{I}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}+(1-2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\left[\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2}\right]\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，所以 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$.

由于 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是同阶方阵，故由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$，可得必有 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$.

注 1 对 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 来说，$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 有很大不同，由此也说明任意矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 与